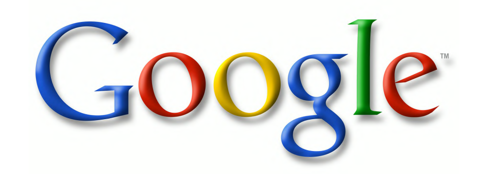
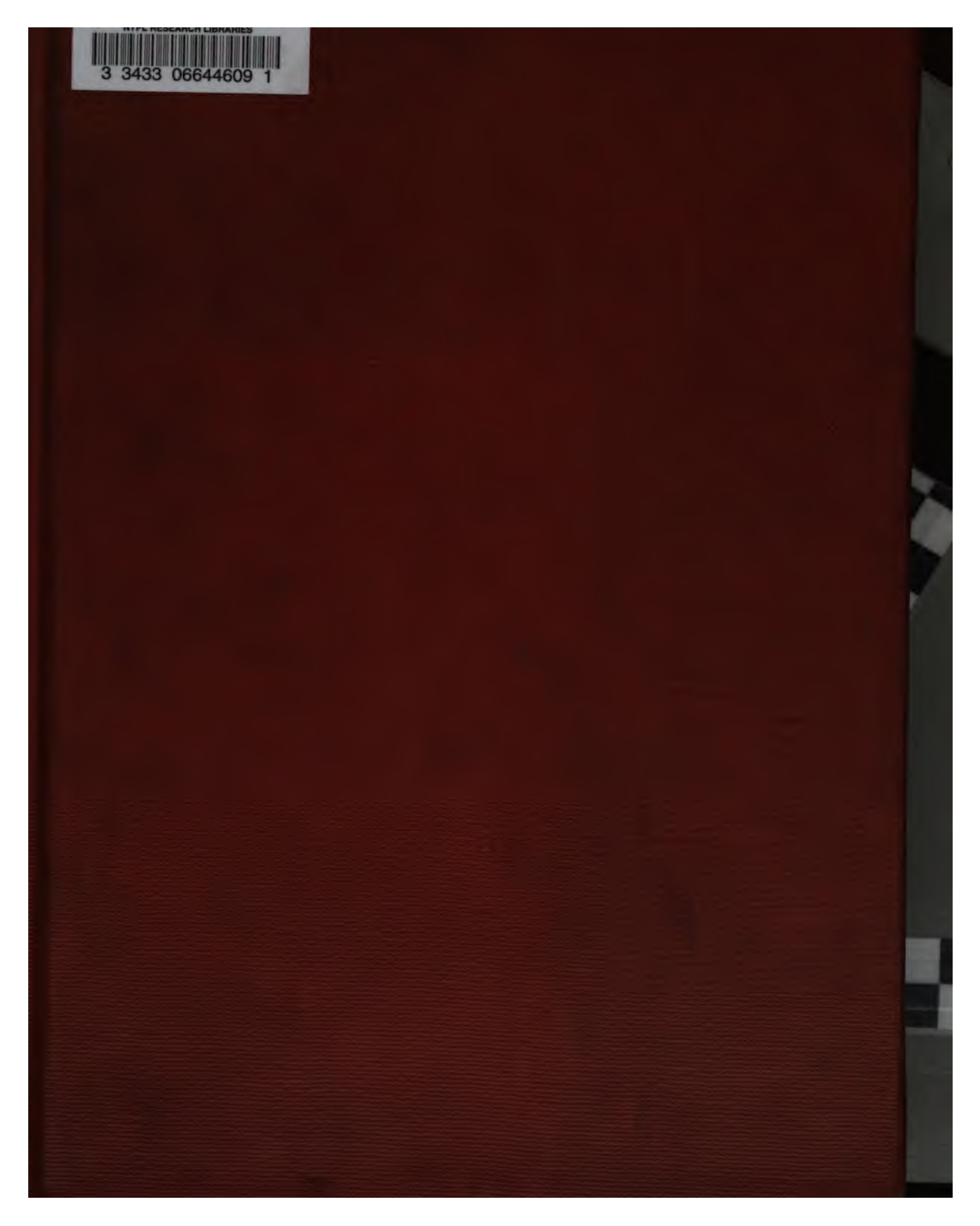
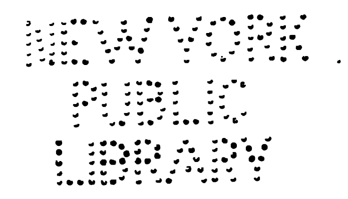

Google


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644609 1

1, Mechanics, 1741

8 ⁊D

SUITE
DE LA
MESURE
DES SURFACES,
ET
DES SOLIDES.



LA MECHANIQUE GÉNERALE,

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE, L'HYDROSTATIQUE, ET L'HYDRAULIQUE,

POUR SERVIR D'INTRODUCTION AUX SCIENCES

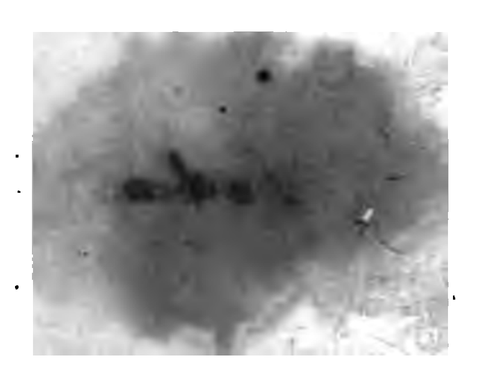
PHYSICO-MATHEMATIQUES.

Par M. l'Abbé DEIDIER, *Professeur de Mathématique aux Ecoles Royales d'Artillerie de la Fére.*



A PARIS, RUE S. JACQUES,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Nôtre-Dame.

M. DCC. XLI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.





A SON ALTESSE SERENISSIME
MONSEIGNEUR
LE COMTE D'EU.

ONSEIGNEUR,

La reconnoissance & le devoir exigent de moi le tribut de cet Ouvrage que j'ose

prendre la liberté d'offrir à VOTRE ALTESSE SERENISSIME; *lorſque je le compoſai, je n'avois en vûe que l'inſtruction du Public, auquel j'avois déja conſacré mes autres Traités; mais depuis que* V. A. S. *a daigné me choiſir pour remplir une Place de Profeſſeur de Mathématiques dans une des Ecoles de l'Artillerie, j'ai retouché avec attention tout ce que j'avois écrit ſur les Méchaniques, & je n'ai rien négligé pour rendre cette Matiere encore plus utile à Mrs. les Officiers de l'Artillerie & aux autres Corps qui ont le bonheur d'être ſous ſes Ordres; leur inſtruction eſt aujourd'hui mon unique objet, & je n'épargnerai rien pour y réuſſir, trop heureux ſi par mes ſoins & mon application je puis mériter la puiſſante protection*

EPISTRE.

d'un Prince également Auguste & par sa Naissance, & par ses éminentes Qualités, & s'il veut bien regarder cet Ouvrage comme une marque du profond respect avec lequel je suis

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SERENISSIME

Le très-humble &
très-obéissant Serviteur
DEIDIER.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé ; *La Méchanique Générale*, dont j'ai crû l'Impression utile. Fait à Paris ce premier Janvier 1741.

MONTCARVILLE.

Nota. *Le Privilege est le même que celui de la Mesure des Surfaces & des Solides, du meme Auteur, qui se trouve au commencement du même Traité, dont celui-ci est la Suite.*

PRÉFACE.

LA plûpart des Auteurs qui ont traité des Méchaniques ne se sont attachés qu'à ce qui concerne l'équilibre des corps, & de-là bien des Gens se sont imaginés que cette Science rouloit uniquement sur les Machines dont nous faisons usage pour les différens besoins de la vie, & pour ses agrémens. Il faut cependant se détromper ; la Méchanique est la Science du mouvement, & le mouvement en général renferme toute sorte de mouvemens de quelque cause qu'ils puissent provenir. Dans ce sens la Méchanique est la Science universelle de tous les effets que la Nature & l'Art produisent dans les Corps. Les anciens Philosophes peu instruits des secrets de la Physique, n'en expliquoient les causes que par des qualités occultes, des Horreurs du Vuide, des Sympathies, ou Antipathies, des Antiperistases, des Attractions, & par une infinité d'autres termes dont l'impénétrable obscurité fait assez voir qu'ils cherchoient moins à découvrir la verité, qu'à cacher leur profonde ignorance aux yeux du crédule public. Le Vulgaire ne manquoit cependant pas d'être ébloui par leurs discours ; ce que les esprits ordinaires entendent le moins est presque toujours ce qu'ils admirent le plus. D'ailleurs les Philosophes des anciens tems passoient pour de grands Hommes. Ils quittoient tout pour s'attacher à leur prétendue Philosophie ; leur air

auſtere, leurs tons déciſifs, leur façon de vivre, leurs habillemens & ſouvent même leur mal-propreté, tout ſembloit parler en leur faveur. Quel courage n'auroit-il pas fallu pour appeller de leur Jugement au Tribunal de la Raiſon. Ces Préjugés paſſoient de l'eſprit des Peres dans celui des enfans, & ſe fortifioient de plus en plus. Quelque talent que l'on eut, de quelque genie que l'on fût doüé on ne s'imaginoit point qu'il fut permis d'aller plus loin que ces grands Hommes qu'on regardoit comme venus du Ciel. Leurs Livres étoient autant d'Oracles que l'on conſultoit avec ſoin, & l'on ne croyoit avoir acquis quelque Science, que lorſqu'on ſe jugeoit en état de donner une prétendue clarté à leur obſcur galimathias : de-là cette foule innombrable de grands in-folio auſſi ennuyeux qu'aſſommans, dont les Bibliotheques même les mieux choiſies ſe trouvoient inondées. Le mal s'étoit étendu juſqu'aux Mathematiques. Il n'y avoit ni ordre ni méthode dans les Ecrits d'Euclide ; n'importe, on eut crû faire un crime d'en déranger la moindre propoſition ; il falloit s'y attacher ſcrupuleuſement, ſuivre ſes démonſtrations à la Lettre, ou s'excuſer par des longues Diſſertations, ſi l'on oſoit y faire le moindre changement, quelque clarté qu'il pût apporter au ſujet. On a vû plus d'une fois de grands Géometres ſe faire une guerre puerile pour ſe diſputer la gloire de mieux entendre un mot grec du Texte d'Euclide, de Diophante, ou de quelqu'autre Ecrivain de la venerable Antiquité.

Tel a été l'aveuglement des Hommes pendant une longue ſuite de Siécles, & tel ſeroit peut-être encore le Nôtre, ſi Deſcartes n'avoit entrepris de nous ouvrir les yeux. Cet illuſtre Philoſophe qui ſera toujours au-deſſus de tout éloge, s'étant apperçû que l'ignorance

ne se perpetuoit que par la force des Préjugés ne s'appliqua d'abord qu'à nous en faire voir le ridicule, mais bientôt après il nous montra par son exemple qu'il n'y avoit qu'à secouer leur joug pour élever l'esprit humain bien au-delà des bornes étroites où sa trop credule docilité l'avoit réduit. Ce ne furent ni des déclamations diffuses & inintelligibles, ni des termes obscurs & empoulés, ni des tons hauts & décisifs dont il crut devoir se servir pour nous convaincre de la vérité ; il n'en avoit pas besoin ; un discours assez court, simple, uni & dont les principes étoient à la portée de tous les esprits, furent les uniques armes qui le firent triompher de l'erreur, malgré la possession immémoriale dont il ne paroissoit pas qu'on pût la dépouiller. Ne s'en tenir qu'à l'évidence en fait de Science purement humaine, n'affirmer ou nier que ce que l'on voit clairement devoir être affirmé ou nié, en un mot faire usage de sa Raison, c'est ce qu'il semble naturellement que les Hommes de tous les Siécles auroient dû se dire à eux-mêmes, & c'est cependant ce que le seul Descartes a pû leur persuader, tant il est vrai que les Préjugés une fois établis sont des Tyrans dont on ne se délivre qu'avec une extrême difficulté.

Le Discours sur la methode eut tout le succès que son Auteur en attendoit ; la mode des Traductions, des Commentaires & des Scholies s'abolit tout-à-coup ; on aima mieux travailler sur son propre fonds que de cultiver inutilement celui d'autrui ; & au lieu de ces redites éternelles qui ne manquoient pas de reparoître sur la Scéne sous différentes formes, on ne vit bientôt plus que des Ouvrages nouveaux, pleins d'admirables découvertes, qui firent l'honneur du Siécle & celui de leurs Auteurs.

Les qualités occultes furent les premieres qui rentrerent dans le pays chimerique d'où l'ignorance & l'orgueïl les avoit fait sortir. Ce fut dans la Nature même, & non plus dans des êtres logicaux que l'on chercha la cause des effets naturels, & voici comme l'on crut devoir raisonner : Tous les changemens qui arrivent aux Corps sont ou des changemens de lieu ou des changemens de figure & d'arrangement, ou des changemens de configuration dans leurs parties, on ne sçauroit en concevoir d'autres, & tout ce qu'on voudroit y ajoûter pour expliquer ce qui arrive aux corps seroit non-seulement inintelligible, mais encore inutile. Or tous ces changemens ne se font que par le mouvement; donc le mouvement est la cause générale de tous les effets que la nature ou l'art peuvent produire dans les corps. Voilà déja bien du fatras retranché de la Physique ; plus de Sympathie, plus d'Horreur du vuide, plus d'attraction, le mouvement fait tout. Quoi de plus simple ? Il faut cependant avoüer que nous n'en serions pas plus sçavans si l'on s'en étoit tenu là. Le mot de mouvement est à la verité plus clair que celui de qualité occulte. Le son du premier reveille une idée, le son de l'autre n'en reveille point. Mais en est-ce assez pour des Philosophes, & croirions-nous surpasser les anciens si nous nous contentions de dire que la chaleur du feu provient du mouvement ? Voyons donc ce que la nouvelle Philosophie ajoûte à la premiere démarche que ses recherches lui ont fait faire.

Le mouvement a des Loix constantes & inviolables qu'il n'abandonne jamais. L'experience & la raison nous en ont fait connoître un assez grand nombre, & à la faveur de la Geometrie jointe au Calcul, on en découvre tous les jours beaucoup d'autres qui peuvent mener bien

loin dans la connoissance du Méchanisme des corps sensibles. La chose est un peu plus difficile à l'égard des corps insensibles, c'est-à-dire des parties infiniment petites qui composent les corps sensibles, & dont les différentes configurations forment la différence des corps. Les Loix du mouvement sont à la verité toujours les mêmes, mais il s'agit de trouver le rapport des Masses, des vitesses, des espaces parcourus & des tems, & c'est ce qui nous échape à cause de l'infinie petitesse de ces corps. C'est ici où les experiences doivent suppléer aux secours qui nous manquent, il faut les faire avec attention, les réïtérer souvent, & sur-tout prendre garde de ne se laisser prévenir par aucun Préjugé. Si l'on ne s'observe de près là-dessus, les expériences ne manqueront pas de dire ce qu'on voudra, on pourroit en citer bien des exemples, & des exemples très-propres à reveiller l'attention.

On peut donc distinguer dans la nature deux sortes de Méchanisme, l'un qui concerne les Corps sensibles, & l'autre qui concerne les parties insensibles de ces Corps. Je donne au premier le nom de Méchanique générale, à-peu-près comme on nommoit Physique générale la partie de la Physique qui traitoit des Corps en général, & par la même raison, je nomme Méchanique particuliere ce qui regarde le Méchanisme des parties insensibles des Corps. Comme toutes les Loix du mouvement de l'un & l'autre Méchanisme sont comprises dans la Méchanique générale, je ne m'attache aussi qu'à les bien détailler, laissant à ceux qui les auront comprises le soin d'en faire l'application à la Méchanique particuliere, en y employant les recherches & les expériences réïtérées que demandent l'étendue & la difficulté d'un si vaste

ſujet. Cet Ouvrage comprend quatre parties. Dans la premiere je traite du mouvement des Corps ſolides; dans la ſeconde je conſidere les ſolides dans les Fluides, & les Fluides entr'eux; dans la troiſiéme j'examine le mouvement de l'air, & dans la quatriéme le mouvement des Fluides. Entrons dans un plus grand détail pour la ſatisfaction des Lecteurs.

Le mouvement direct ou réflechi peut ſe faire ou en ligne droite ou en ligne courbe, & l'un ou l'autre de ces mouvemens peuvent être ou uniforme ou acceleré. Dans le mouvement uniforme & en ligne droite le Corps ſuit toujours la même direction & parcourt des eſpaces égaux dans des tems égaux; comme c'eſt ici le mouvement le plus ſimple qu'on puiſſe imaginer, je commence par l'examiner dans le ſecond Chapitre de la premiere Partie, après avoir donné dans le premier les définitions & les principes néceſſaires pour l'intelligence du ſujet. Les Corps peuvent avoir différens rapports de Maſſes, de Viteſſes, de Forces, d'Eſpaces & de Tems, c'eſt en ſuppoſant la connoiſſance de quelques uns de ces rapports qu'on parvient à découvrir les autres, & à connoître les Loix que la nature a établies. Pour abreger le diſcours je me ſers du calcul, mais en même tems je fais voir aux perſonnes qui commencent qu'on peut déduire les mêmes Loix par le ſimple raiſonnement.

Il y a dans tous les Corps une force ou impreſſion qui les preſſe toujours vers un côté plutôt que vers un autre, & cette force ſe nomme peſanteur. Quelle qu'en puiſſe être la cauſe il eſt sûr qu'elle exiſte. Qu'on tienne un Corps dans ſa main on ſent qu'il peſe vers le centre de la terre, & ſi on ne le ſoutient plus, on éprouve toujours qu'il ſe porte de ce côté. Or la peſanteur n'abandonnant,

jamais les Corps, doit agir ſur eux avec plus de force que les Agents extérieurs, qui après leur avoir communiqué une premiere impreſſion ne peuvent plus rien faire ſur eux. Un Corps pouſſé par une force externe dont il ſe ſépare l'inſtant d'après ne reçoit plus ſes coups, au contraire un Corps pouſſé par ſa peſanteur reçoit à chaque inſtant une nouvelle impreſſion, & de là il ſuit néceſſairement que ſon mouvement doit être acceleré. Galilée eſt le premier qui a trouvé que les Corps qui deſcendent librement reçoivent dans des tems égaux des accroiſſemens égaux de viteſſe, & c'eſt ce qu'on nomme *mouvement uniformement acceleré*. On comprend ſous ce nom le mouvement retardé, c'eſt-à-dire, le mouvement d'un Corps qui eſt pouſſé avec une direction contraire à celle de ſa peſanteur, laquelle ne ceſſant d'agir ſur lui doit auſſi diminuer ſon mouvement à chaque pas. Ce que Galilée nous enſeigne là-deſſus ne regarde que les corps ſublunaires, les expériences l'ont conduit à cette découverte, & les expériences ne peuvent ſe faire à une diſtance trop grande de la ſurface de la Terre. Mais à l'égard des autres corps on peut établir d'autres Hypotèſes ainſi qu'ont fait les Aſtronomes pour expliquer les Phenomenes céleſtes. On trouvera dans le troiſiéme Chapitre l'explication de ces différentes Hypotéſes & les Loix d'acceleration qu'elles impoſent au corps, à commencer par celle de Galilée à laquelle on doit s'en tenir, lorſqu'il s'agit du mouvement des corps qui ne ſont point à une diſtance trop grande de la ſurface de la Terre.

On nomme centre de peſanteur ou de gravité le point autour duquel toutes les parties d'un corps ſont en équilibre, de façon que ſi ce centre ne ſe meut point, toutes les parties ſont dans un parfait repos; de même ſi plu-

ſieurs corps unis par un même lien ſe contrebalancent autour d'un même point, ce point ſe nomme centre d'Equilibre. Je m'applique à la recherche de l'un & l'autre de ces centres dans le quatriéme Chapitre, mais comme j'ai traité cette matiere amplement dans la *Meſure des Surfaces & des Solides*, je n'en donne ici que les principes & les regles, renvoyant pour le détail à l'ouvrage cité.

On trouvera dans le même Chapitre une remarque en forme de diſſertation touchant la prétendue diſtinction que quelques Auteurs modernes ont cru devoir mettre entre les forces vives & les forces mortes. Cette matiere n'eſt point étrangere au ſujet qui eſt traité dans ce Chapitre, ainſi qu'on va voir. La force morte eſt l'effort que fait une puiſſance ſur un corps ſans pouvoir ſurmonter l'obſtacle qui empêche le corps de ſe mouvoir; tel eſt l'effort que fait la peſanteur ſur un corps qui ſe trouve arrêté par un obſtacle perpendiculaire à la direction de ſon centre de gravité; car alors ce centre de gravité ne pouvant deſcendre plus bas toutes les parties du corps ſont autour de lui dans un parfait repos, la force *vive* au contraire eſt la force qui meut actuellement le corps. M. de Leibnits fut le premier qui s'imagina que ces deux ſortes de forces étoient de différente nature. Selon lui les forces mortes ſont entr'elles comme les maſſes multipliées par les viteſſes, & au contraire les forces vives ſont comme les maſſes multipliées par les quarrés des viteſſes. Des expériences mal interprêtées le firent tomber dans cette erreur. En Angleterre on rejetta ſon ſentiment avec mépris, en France on le réfuta ſérieuſement, & ſelon toutes les apparences la mort de M. de Leibnits auroit mis fin à la diſpute ſi M. Jean Bernoulli,

environ

environ vingt-huit ans après, ne se fût avisé de la faire revivre. Ce sçavant Geométre envoya à l'Académie Royale des Sciences un discours sur les Loix de la communication du mouvement, qui fut imprimé en 1727 chez Jombert Libraire rue Saint Jacques à Paris. Ce discours renfermoit beaucoup de belles choses dont l'Académie parla avec éloge, mais loin d'adopter ce qui regardoit la distinction des forces mortes & des forces vives, elle fit imprimer en 1728 une Dissertation de M. de Mairan, où cet illustre Académicien traita la matiere avec toute la profondeur de son génie, & fit voir clairement l'inutilité de cette frivole distinction. Je n'avois point encore vû la Dissertation de M. de Mairan lorsque je composai la mienne, le Discours de M. Bernoulli m'étant tombé par hazard entre les mains, je crus que les preuves sur lesquelles un Geométre de ce nom tâchoit d'appuyer son sentiment méritoient d'être discutées de façon à empêcher le progrès de l'erreur. Quelque tems après M. de Mairan ayant eu la bonté de me communiquer sa Dissertation, j'eus le plaisir de voir que si je n'avois pas pris la même route je me trouvois du moins parfaitement d'accord avec ce sçavant Geométre dans toutes les conclusions. C'est ce qui m'a obligé de ne point supprimer ce que j'avois écrit là dessus, dans la vûe que bien des personnes qui n'ont pas la commodité d'avoir les Mémoires de l'Académie, trouveront dans cet Ouvrage des principes suffisans pour se garantir d'un prejugé dans lequel quelques Sçavans sont encore aujourd'hui. On verra dans cette même Dissertation les raisons qui m'ont porté à y faire des additions considérables.

La doctrine du sixiéme Chapitre est toute fondée sur la connoissance des centres de gravité, j'y enseigne com-

ment on peut connoître ſi un corps qui eſt appuyé ſur l'un de ſes côtés doit reſter ferme ou s'il doit tomber. Quelquefois un corps paroît devoir ſe tenir dans ſa ſituation & il tombe ; quelquefois il paroît devoir tomber & il reſte debout, le Clocher de Piſe & quelques autres Edifices bâtis ſur le même goût ont toujours ſemblé menacer ruine, & cependant ils n'ont jamais bougé, c'eſt que la direction de leur centre de gravité paſſe par leur baſe. Que ſi quelques corps tombent contre toute eſpérance, c'eſt que la direction de leur centre tombe hors de leur baſe, & que par conſéquent ce centre n'eſt pas empêché de ſuivre l'impreſſion de la peſanteur. Par la même conſidération du centre de gravité je détermine quelle partie d'un poids eſt ſupportée par deux hommes qui le portent ou par deux ſoûtiens ſur leſquels il eſt appuyé.

Lorſque deux ou pluſieurs forces qui ont différentes directions agiſſent en même tems ſur un même corps, la direction que ce corps prend eſt moyenne entre les directions des forces qui agiſſent ſur lui, d'où il ſuit qu'une ſeule force qui avec la direction moyenne feroit parcourir dans le même tems un eſpace égal à celui que les autres forces font parcourir à ce corps, feroit équivalente à ces forces. La force de la direction moyenne ſe nomme force *compoſée*, les forces des autres directions ſe nomment forces *compoſantes*, & le mouvement qui en eſt produit ſe nomme mouvement *compoſé*. Les principes de ce mouvement ſont extrémement fertiles pour les Méchaniques, ainſi qu'on peut voir dans la Méchanique de M. Varignon qui n'en a point employé d'autres. On peut diſtinguer pluſieurs ſortes de mouvement compoſé ſelon la nature & les directions des forces qui le compoſent. 1°. Si les forces compoſantes ſont uniformes &

ſuivent toujours leurs premieres directions, le mouvement eſt uniforme & en ligne droite. 2°. Si les forces étant uniformes changent à chaque inſtant de direction, le mouvement eſt en ligne courbe, & il peut être ou uniforme, ou acceleré, ou retardé ſuivant une Loi quelconque d'acceleration, ſelon que les changemens de direction des forces compoſantes conſervent, augmentent, ou diminuent leurs efforts. 3°. Si les forces compoſantes ſuivent une même direction & une même Loi d'acceleration, le mouvement eſt en ligne droite & acceleré. 4°. Si les forces changent à tout moment de direction en ſuivant la même Loi d'acceleration, le mouvement eſt en ligne courbe, & il peut être ou acceleré ou retardé. 5°. Si les forces ſont l'une uniforme, l'autre retardée, & qu'elles ſuivent toujours la même direction, le mouvement eſt en ligne courbe & mêlé de l'uniforme & du retardé. 6°. Enfin ſi l'une des forces étant uniforme, l'autre eſt accelerée, & que les directions de l'une & de l'autre changent toujours, le mouvement eſt en ligne courbe, & il peut être, ou mêlé d'uniforme & de l'acceleré, ou mêlé de retardé & de l'acceleré, ou tout acceleré, ou tout retardé, ſelon que les différentes directions des forces cauſeront de changement à ces forces. Le cinquiéme Chapitre contient ce qui concerne le mouvement compoſé dont les forces compoſantes ſont uniformes, ſoient que leur directions changent ou qu'elles ne changent pas, & ce mouvement entre pour quelque choſe dans le ſixiéme Chapitre dont nous avons déja parlé. Dans les Chapitres 7e & 8e je traite du mouvement compoſé dont les forces compoſantes ſont accelerées, ce qui renferme la deſcente des corps le long des plans inclinés & le long des lignes courbes. Dans le neuviéme

je traite à part du mouvement des Pendules & de la maniere de trouver leur centre d'oſcillation, & dans le dixiéme j'examine le mouvement composé de deux forces dont l'une eſt uniforme & l'autre accelerée, c'eſt-à-dire le mouvement des corps projettés, c'eſt dans celui-ci qu'eſt renfermée toute la Théorie & la Pratique du jet des Bombes, avec des découvertes tout-à-fait nouvelles touchant la maniere de tirer ſur un but qui eſt au-deſſus ou au-deſſous du niveau de la batterie.

Lorſque les corps en mouvement viennent à ſe rencontrer avec les mêmes directions, ou avec des directions contraires, ou avec des directions obliques, il ſe fait du changement dans les forces ou dans les directions ſelon les rapports des Maſſes & des Viteſſes des corps, & auſſi ſelon que ces corps ſont élaſtiques ou ne le ſont pas. Tout ceci eſt examiné avec une extrême ſoin dans le onziéme Chapitre, mais comme je n'y traite principalement que du choc des corps ſelon une même direction, ou ſelon des directions contraires, & qu'à l'égard du choc ſelon des directions obliques dont je ne dis qu'un mot, je ſuppoſe que les corps ſe choquent dans leur centres de gravité, j'ai cru devoir mettre à la fin de ce premier livre une addition où je traite à part du choc des corps projettés, ſoit que leur direction dans l'inſtant du choc ſoit perpendiculaire ou oblique aux corps choqués, ſoit qu'elle paſſe par les centres de gravité où qu'elle n'y paſſe pas. On y trouvera auſſi des choſes très-curieuſes touchant les chocs obliques des corps qui ſe meuvent uniformement.

Si tandis qu'un corps ſe meut autour d'une courbe, il ſe trouve une force qui à chaque inſtant tende à l'éloigner d'un point conſideré comme centre, cette force

ſe nomme force *centrifuge*, & ſi au contraire cette force tend à le rapprocher de ce point, elle ſe nomme force *centripete*. Les Aſtronomes font grand uſage de ces ſortes de forces, on les trouvera traitées dans le douziéme Chapitre.

Juſqu'ici j'ai fait abſtraction de la reſiſtance que l'air oppoſe au mouvement des corps. Cependant l'air reſiſte, l'expérience & la raiſon nous en aſſurent également: donc cette reſiſtance doit cauſer quelque alteration dans les Loix qui ont été établies dans les Chapitres précédens. Wallis eſt le premier qui ait entrepris de ſoûmettre cette matiere au Calcul. Ce ſçavant Anglois dans le Chapitre 101 de ſon Algebre établit deux Hypotèſes. Selon l'une les réſiſtances de l'air à chaque inſtant ſont comme les viteſſes reſtantes au commencement de ces inſtans, & ſelon l'autre ces réſiſtances ſont comme les quarrés des viteſſes reſtantes. La premiere conſidere l'air comme un corps à reſſort, lequel reſiſte toujours dans la raiſon de ſa compreſſion, la ſeconde le conſidere comme un corps Fluide dont la maſſe eſt toujours proportionnelle à la viteſſe, & qui reſiſte par conſéquent dans le rapport de la maſſe multipliée par la viteſſe, c'eſt-à-dire dans le rapport des quarrés des viteſſes. Les Geométres ſe ſont partagés entre ces deux Hypotèſes, mais enfin la ſeconde l'a emporté comme étant la plus naturelle. Suppoſons que deux corps de même poids & de même volume viennent à choquer l'air l'un avec une viteſſe ſimple & l'autre avec une viteſſe double. Le nombre des Molecules d'air que le ſecond rencontrera dans un inſtant ſera double du nombre des Molecules d'air que le premier rencontrera dans le même inſtant, c'eſt la Loi des Fluides. Donc le nombre des reſſorts chocqués ſera auſſi

double ; or ces resſorts ſeront comprimés doublement à cauſe de la viteſſe double, dont le ſecond corps les choque ; donc la reſiſtance de ces reſſorts ſera quadruple de la reſiſtance des reſſorts choqués par le premier corps ; & par conſéquent les reſiſtances ſont dans la raiſon des quarrés des viteſſes. Quoique ce que nous venons de dire en faveur de la ſeconde Hypotèſe paroiſſe démontré, je n'ai pas laiſſé que d'examiner l'une & l'autre Hypotèſe dans le treiziéme Chapitre en les appliquant au mouvement uniforme & au mouvement acceleré : j'aurois bien ſouhaité pouvoir en tirer quelque choſe pour le mouvement des corps projettés ; l'art de jetter des Bombes en deviendroit peut-être plus parfait, & peut-être auſſi n'en ſerions nous pas plus ſçavans ; le mouvement des Bombes eſt extrêmement rapide, ſa durée eſt très-courte, la reſiſtance de l'air au premier inſtant ne peut être que fort petite, de-là bien des perſonnes concluent que la reſiſtance totale ne peut cauſer qu'une legere différence ; d'autres au contraire fondés ſur des expériences ſoûtiennent que cette différence n'eſt point à négliger ; mais les expériences qu'ils nous rapportent ayant été faites dans le plein dépendent d'une infinité de circonſtances dont la moindre eſt peut-être la reſiſtance de l'air telle que nous la ſuppoſons, c'eſt-à-dire uniforme & conſtante ; l'air n'eſt point homogene par tout, ni dans toutes ſes parties, il ſe trouve tantôt plus dilaté, tantôt plus condenſé ; les vapeurs & les exhalaiſons n'y ſont pas également mêlées en tous lieux ni en tout tems ; les vents y ſoufflent inégalement ; d'un inſtant à l'autre tout change. D'ailleurs la Poudre ne ſçauroit être de même nature dans toutes ſes parties, deux charges égales d'une même Poudre font rarement le même effet ; il y a

ici tant de différentes conbinaiſons qu'il n'eſt pas poſſible d'y rien demêler ; auſſi les expériences quelques réïterées qu'elles ſoient ne ſont-elles jamais parfaitement d'accord entr'elles ; pourquoi voudrions-nous fixer ce que la nature elle même ne fixe pas ? Nous ignorons encore quel eſt l'eſpace qu'une certaine force de Poudre pourroit faire parcourir à un Boulet dans le vuide dans un tems déterminé, & quelle eſt la quantité dont ſa peſanteur le feroit deſcendre dans le même tems, cela demanderoit des expériences qui n'ont pas été faites, mais ſuppoſons pour un inſtant que nous ſachions à quoi nous en tenir ; dirons-nous qu'en faiſant une épreuve dans le plein avec la même force de Poudre la différence des eſpaces parcourus dans le plein & dans le vuide nous donnera la véritable meſure de la reſiſtance ? Il faudroit pour cela que l'air & la poudre ne fuſſent point ſuſceptibles de tous les changemens dont nous avons parlé, & que par conſéquent les épreuves ne variaſſent point elles-mêmes, faute de quoi tout ce que nous pourrons en conclure ne ſera jamais que pour des cas particuliers & hypothetiques qui ſeroient inutiles pour le général : au reſte on ne blâme point ici les perſonnes qui s'appliquent à ſurmonter les difficultés d'une matiere ſi épineuſe. Leur travail ne peut être que louable quand même il n'aboutiroit qu'à des approximations.

La plûpart des Loix du mouvement dont il eſt parlé dans les Chapitres précédens, ont occaſionné l'invention des Machines ; on les diſtingue en ſimples & compoſées, les Machines ſimples ſont au nombre de cinq ; le Levier, la Poulie, la Roue dans ſon aiſſieu, la Vis, & le Coin, les Machines compoſées n'étant que des combinaiſons des Machines ſimples, peuvent être en nombre infini,

auſſi en invente-t'on tous les jours. On trouvera dans le quatorziéme Chapitre le calcul des forces des cinq Machines ſimples, de la balance, des roues dentées, des poulies multipliées, & de la vis jointe à la roue dans ſon aiſſieu ; ce que j'en dis peut s'appliquer au calcul des autres Machines dont je ne parle point de peur d'allonger cet Ouvrage ; d'ailleurs on en trouve un ſi beau détail dans les deux Volumes de l'Architecture Hydraulique de M. Belidor *, qu'il ſeroit inutile d'y rien ajouter.

Les Machines ont du frottement les unes plus, les autres moins, & ce frottement oblige d'y appliquer une puiſſance un peu plus grande qu'on ne la trouve par le calcul : la queſtion eſt donc de déterminer la quantité préciſe dont cette puiſſance doit être augmentée pour ſurmonter le frottement : ce ſujet a déja été traité par pluſieurs Auteurs en différentes façons : mais la maniere dont je m'y prens dans le quatorziéme & dernier Chapitre du premier Livre, a non-ſeulement le mérite de la nouveauté, mais encore celui d'une extrême ſimplicité ; une ſeule experience faite ſur une Machine d'une certaine matiere ſuffit pour déterminer par le plus ſimple calcul Arithmetique le frottement de toutes les Machines de même eſpece & de même matiere quelle qu'en ſoit la grandeur ou la petiteſſe & de quelque poids qu'elles puiſſent être chargées. J'eſpere que le public verra ce morceau avec plaiſir auſſi-bien que grand nombre de queſtions curieuſes dont ce premier Livre eſt rempli, & dont je n'ai point fait le détail de peur d'être trop long.

Le ſecond Livre traite de l'Hydroſtatique ou de la maniere dont les corps peſent dans les Fluides, & dont les Fluides peſent entr'eux. On conſidere dans les Corps la Maſſe, le Volume & la Denſité. La Maſſe eſt la quantité

* Imprimé en 1739. chez Jombert, rue S. Jacques à Paris.

tité de matiere dont le corps eſt compoſé ; le Volume eſt l'eſpace que ce corps occupe, & le plus ou le moins de Denſité conſiſte dans la façon dont les parties d'un corps ſont plus ou moins rapprochées entr'elles. De la Maſſe naît la peſanteur abſolue, car cette peſanteur eſt toujours proportionnelle à la Maſſe ; de la Denſité conſiderée ſous un même Volume naiſſent les peſanteurs ſpecifiques des corps ; le rapport des Maſſes, des Volumes, & des denſités pouvant varier à l'infini, on peut parvenir à la connoiſſance de ces rapports par la connoiſſance de quelques-uns d'entr'eux, & c'eſt ce qui fait le ſujet du premier Chapitre.

Dans le ſecond je traite de l'Equilibre des Liqueurs ; c'eſt par le moyen de deux Tubes verticaux qui ſe communiquent par un Tube horizontal que cet Equilibre ſe trouve : ſi l'on verſe d'une même Liqueur dans l'un des Tubes verticaux, cette Liqueur paſſera du Tube horizontal dans l'autre vertical, & l'on éprouvera toujours que la Liqueur ſe mettra de niveau dans l'un & l'autre Tube : mais ſi les Liqueurs ſont de différentes natures, celle qui peſera davantage ne montera pas tant que celle qui peſera moins : de-là on fixe la maniere de connoître les différentes peſanteurs ſpécifiques des Fluides & leurs différentes denſités. On démontre encore dans le même Chapitre que les Liqueurs renfermées dans un vaſe peſent ſur toutes les parties du fonds & des côtés à proportion des grandeurs de ces parties & des hauteurs des Liqueurs, d'où l'on prend occaſion de faire voir comment on pourroit élever par le moyen de l'eau un poids d'une extrême grandeur.

Dans les deux derniers Chapitres on examine de quelle façon les Corps peſent dans des Fluides qui ont plus ou

moins de pesanteur specifique qu'eux ; on y fait voir comment on connoît les pesanteurs spécifiques des Corps en les plongeant dans les Liquides, comment on peut faire que des Corps qui surnagent aillent au fonds, où restent entre deux eaux, que d'autres qui vont au fonds, restent entre deux ou surnagent, & grand nombre d'autreschoses curieuses dont le détail nous meneroit trop loin.

Le troisiéme Livre comprend tout ce qui concerne la mesure de l'air ; l'air pese, il a du ressort, il se comprime, il se dilate, il se condense, il se rarefie, il est susceptible de mouvement, c'est ce qu'on examine dans les cinq premiers Chapitres, en y employant le raisonnement joint aux expériences, dans le sixiéme on traite des Instrumens qui servent à connoître les variations qui arrivent à l'air par rapport à sa pesanteur, à sa densité, à son agitation, à sa rarefaction ou sa condensation, à sa secheresse & à son humidité.

Le quatriéme Livre traite du mouvement des Fluides, j'y examine le mouvement causé par la pesanteur, les différentes quantités d'eau qui doivent sortir par differens orifices dans des tems égaux selon les différens rapports des orifices & des hauteurs de la surface superieure du liquide, le mouvement qu'on peut donner aux Fluides par le moyen de l'air, ce qui se fait en employant les Machines hydrauliques ; le cours des rivieres, & enfin le choc des Fluides.

Tel est à peu près le plan de cet Ouvrage, & l'on peut voir par l'abregé que nous venons d'en faire que ce n'est pas sans raison que je lui ai donné le nom de Méchanique Générale ; tout le Méchanisme des Corps solides & Fluides s'y trouve compris, les Loix générales y sont détaillées dans la derniere exactitude, j'y ai entremêlé

grand nombre de Questions, de Problêmes, & de Remarques, où l'on trouve tout ce que la Physique peut attendre de la Geometrie : la précision, l'ordre & la méthode y sont observées avec le même soin que j'ai employé dans toutes les productions que j'ai mis au jour. J'espere que le Public fera le même accueil à cet Ouvrage, qu'il a bien voulu faire aux précédens.



ECLAIRCISSEMENS,

ET CORRECTIONS NECESSAIRES.

ON a certainement de grandes obligations aux Auteurs qui ont écrit avant Nous. Ils nous ont frayé les voyes, la plûpart des Matieres se trouvent débrouillées dans leurs Ouvrages, & sans eux, nous aurions à surmonter de grandes difficultés qui ne nous arrêtent plus aujourd'huy. Cependant il arrive quelquefois que la trop grande vénération que nous avons pour les Sçavans qui nous ont précédé nous jette dans l'erreur. Comme on trouve dans leurs Ecrits grand nombre de belles vérités que la force de leur génie leur a fait découvrir, on se persuade trop aisément que des personnes de ce caractere ne sçauroient se tromper, & l'on épouse sans réflexion jusqu'à leur faux raisonnemens. De-là vient que certains Paralogismes passent pendant long-tems d'Ouvrage en Ouvrage, & qu'on n'en découvre le faux que parce que la nécessité de faire accorder les principes nous oblige à examiner de plus près ce que la prévention nous avoit fait regarder comme incontestable & certain. C'est ainsi que les forces vives, & l'attraction ont encore leurs Partisans, & sans en chercher plus loin des exemples, c'est ainsi que j'ai donné moi-même dans ce Traité deux Démonstrations que je suis bien aise de retoucher pour faire voir au Public à qui j'ai consacré mes veilles, que si je puis commettre des fautes comme les autres hommes, du moins il ne m'arrivera jamais de vouloir les excuser. Je prie donc le Lecteur de suppléer à ce que j'ai trouvé de défectueux par les corrections que j'en vais faire, & de regarder ces Eclaircissemens comme une marque du desir que j'ai de ne lui rien présenter qui ne soit selon les regles de la plus exacte vérité.

Page 136. N°. 142. Proposition L. j'ai dit : *Si une force pousse ou tire un corps avec une direction oblique à ce corps, elle lui communique moins de mouvement que si elle le poussoit ou tiroit avec une direction perpendiculaire.* Cette Proposition doit s'entendre d'un corps qui est retenu par un point fixe & inébranlable autour duquel il peut tourner ; car il est visible que si le Corps CD

(*Fig*. 50.) eſt retenu par un point fixe D, ou qui ſoit entre B & D, la puiſſance qui le tirera ou qui le pouſſera ſelon la direction BA, ou AB, n'agira ſur lui que comme la force compoſante AE, à cauſe que l'autre compoſante AF ou EB trouvant une réſiſtance invincible ne donnera aucun mouvement au Corps. La même Propoſition eſt encore vraye quand le corps CD n'étant point retenu, la puiſſance AB le pouſſe ſelon la direction AB avec un levier AB qui n'eſt point uni au corps CD, car alors il eſt encore évident, & l'experience le confirme, que cette puiſſance n'agit ſur le corps que comme la force compoſante AE, & non ſelon l'autre compoſante AF qui ne fait que gliſſer le long du corps; d'où il arrive que ſi le corps CD n'eſt point retenu par quelque obſtacle, il s'approche peu à peu du levier AB, juſqu'à ce qu'étant parvenu à le toucher dans toute ſa longueur, le levier gliſſe & n'agit plus ſur lui; & il faut obſerver que pendant ce mouvement l'angle ABE doit néceſſairement diminuer à chaque pas, & que par conſéquent la perpendiculaire AE devenant toujours plus courte, l'action de la puiſſance ſur le corps, diminue auſſi inſenſiblement & devient enfin égale à zero. Voici maintenant les cas où la Propoſition ſeroit fauſſe, ſi le corps n'étoit point retenu par un point fixe.

1°. Si le Levier AB étoit attaché inébranlablement au corps CD, car dans cette ſuppoſition le corps ne réſiſteroit ni au mouvement ſelon AE, ni au mouvement ſelon AF, & par conſéquent la puiſſance qui le pouſſeroit agiſſant ſur lui ſelon l'un & l'autre de ces mouvemens, agiroit auſſi comme AB, c'eſt-à-dire avec la même force que ſi elle étoit perpendiculaire à CD.

2°. Si la puiſſance tiroit le corps CD (*Fig*. 249.) avec une corde AB attachée en B, & dont la direction fut horizontale; car alors le corps obéiroit auſſi au mouvement ſelon AE, & au mouvement ſelon AF, il faut concevoir que le corps CD fut ſur un plan horizontal; mais voici ce qui arriveroit ſelon que le centre de gravité ſeroit au point B, ou entre B & D, ou entre B & C. Si le centre de gravité étoit au point B, le corps CD s'avanceroit parallelement à lui-même, tandis que ſon centre de gravité parcoureroit la direction BA; car toutes les parties CB étant en équilibre avec les parties du bras BD, & les unes n'étant pas plus tirées que les autres, puiſqu'elles ſont tirées par le centre de gravité, elles doivent avancer également d'un côté & d'autre ſelon la direction BF, & ſuivre en même-

tems la direction BC, & par conséquent leur centre de gravité doit toujours être sur BA.

Si le centre de gravité étoit non plus en B, mais sur BD, par exemple en O, les parties du bras CO étant tirées par la direction FB ne seroient plus en équilibre avec les parties du bras DO, ainsi elles avanceroient peu à peu vers la direction AB jusqu'à ce que la partie CB du corps CD vint à toucher la corde selon toute sa longueur, & alors la direction de la corde AB passeroit par le centre de gravité O, & le corps s'avanceroit sans changer davantage de direction, & il faut observer que tandis que l'angle CBA diminueroit peu à peu, le point B avanceroit toujours selon les différentes directions composées des directions variantes & infiniment petites BE, BF, car ces directions changeroient à chaque instant.

Si le centre de gravité étoit entre C & B, le contraire arriveroit, c'est-à-dire l'angle CBA s'aggrandiroit peu à peu jusqu'à ce que la partie BD du corps CD vint à toucher la corde selon sa longueur, & alors le corps suivroit la direction sans changer davantage de direction, mais auparavant le point B suivroit les différentes directions composées des directions variantes & infiniment petites dont le mouvement seroit composé comme il a été dit.

Il y auroit bien des choses à remarquer touchant ces deux derniers cas, mais comme cela m'écarteroit de mon sujet, il me suffit d'avoir fait remarquer ce que j'ai mis dans l'énoncé de la Proposition dont il s'agit, & qu'il faut nécessairement l'entendre d'un corps qui est attaché par un point fixe autour duquel il puisse tourner, & ne l'étendre tout au plus qu'à un corps poussé par un levier AB qui ne tiendroit point au corps CD. La même chose doit se dire du premier Corollaire de cette Proposition ; ce sont là de ces inadvertances qui arrivent assez souvent à un Auteur trop plein de son sujet. Le Corollaire II. de cette même Proposition fait assez voir que je n'envisageois alors que les corps qui peuvent tourner autour d'un point fixe.

Page 154. N°. 175. Corollaire VIII. de la Proposition CLXX. j'ai dit que si deux plans inclinés CB, EG (*Fig. 63.*) étoient perpendiculaires entr'eux, & que deux puissances, ou poids M, N, soutinssent un poids A avec des directions RA, QA, paralleles aux plans inclinés, on n'avoit qu'à mener la droite RQ horizontale, & que les puissances ou poids M, N, seroient toujours entre

eux réciproquement comme les cordes RA, QA ; c'eſt-à-dire qu'on auroit M, N :: QA, RA, cela eſt abſolument vrai ſoit que les puiſſances M, N, ſoutiennent tout le poids A, ou qu'elles n'en ſoutiennent qu'une partie, & il eſt encore sûr que ſi les deux plans inclinés ſoutenoient tout le poids A ou une partie de ce poids, ils ſeroient entr'eux non plus réciproquement comme RA à QA, mais directement comme RA à QA, c'eſt-à-dire qu'on auroit la réſiſtance du plan CB eſt à la réſiſtance du plan EG comme RA eſt à QA, ainſi que je le démontrerai bientôt. Mais dans le Corollaire X. de la même Propoſition pag. 155. N°. 177. j'ai avancé que ſi les plans inclinés CB, EG étoient obliques entr'eux (*Fig.* 64.) les puiſſances M, N, ſeroient encore entr'elles comme AQ eſt à AR, & ceci eſt une erreur dans laquelle je ſuis tombé par la trop bonne opinion que j'ai eu des Ecrits d'un celebre Auteur dont les Ouvrages ſont entre les mains du Public. Pour corriger donc ce défaut, il faut dire que *ſoit que les puiſſances* M, N, *ſoutiennent tout le poids, ou qu'elles n'en ſoutiennent qu'une partie, on aura toujours dans ce cas* M *eſt à* N *comme le ſinus de l'angle* ZAQ *eſt au ſinus de l'angle* ZAR, *ou comme les ſinus de l'angle* GEF *au ſinus de l'angle* BCD, *c'eſt-à-dire les puiſſances* M, N, *ſeront entr'elles réciproquement comme les ſinus de complement des angles d'inclinaiſon de leur plan* CB, EG, *& ſi les plans* CB, EG *ſoutiennent le poids* A *en tout ou en partie, on aura la réſiſtance du plan* CB *eſt à la réſiſtance du plan* EG *comme le ſinus de l'angle* OAV *au ſinus de l'angle* TAV, *ou comme le ſinus de l'angle* EGF *au ſinus de l'angle* CBD, *& par conſéquent les réſiſtances de ces plans ſeront entr'elles réciproquement comme les ſinus de leurs angles d'inclinaiſon.* Avant de démontrer tout ceci, voici le principe que je crois devoir employer.

Si deux puiſſances A, B, (Fig. 250.) *qui tirent avec des directions* DA, DB, *ſont en équilibre avec une troiſiéme puiſſance* C *qui tire avec une direction* CD, *la puiſſance* C *eſt à la puiſſance* A *comme le ſinus de l'angle* ADB *fait par les directions des deux autres puiſſances* A, B, *eſt au ſinus de l'angle* BDC *fait par la direction de la puiſſance* B *avec la direction de la puiſſance* C ; *de même la puiſſance* C *eſt à la puiſſance* B *comme le ſinus de l'angle* ABD *fait par les deux puiſſances* A, B, *eſt au ſinus de l'angle* ADC *fait par la direction de la puiſſance* A, *& de la puiſſance* C.

Pour prouver ce principe, il n'y a qu'à obſerver que les puiſſances A, B, ne peuvent être en équilibre avec la puiſſance C,

à moins qu'elles ne puiſſent faire parcourir à un corps mis en D un eſpace DE ſelon la direction contraire à la direction DC, égal à l'eſpace DC que la puiſſance C feroit parcourir au même corps dans le même-tems ſelon la direction DC ; car il eſt viſible que cette condition étant miſe, le corps mis en D ne pourra avancer ni vers E ni vers C, & que les trois puiſſances ſeront en équilibre ; faiſant donc DE = DC, & menant EA parallele à BD, & ER parallele à AD, les puiſſances A, B qui feroient parcourir au corps D l'eſpace DE dans le tems que la puiſſance C lui feroit parcourir l'eſpace DC, ſeront exprimées par les droites AD, DR, ou ER, DR, & la puiſſance C ſera exprimée par DC ou DE ; or dans le triangle EDR, le côté ED eſt le ſinus de l'angle ERD ou de l'angle ERB, ou ADR qui eſt le ſinus de complement de l'angle ERD, le côté ER eſt le ſinus de l'angle EDR, ou de ſon complement RDC, & le côté DR eſt le ſinus de l'angle DER ou de ſon alterne EDA, ou de ſon complement ADC ; donc la puiſſance C eſt à la puiſſance A comme le ſinus ED de l'angle ADR fait par les deux puiſſances A, B, eſt au ſinus ER de l'angle BDC fait par la direction de la puiſſance B avec la direction de la puiſſance C, & de même la puiſſance C eſt à la puiſſance B comme le ſinus ED de l'angle ADR eſt au ſinus DR de l'angle ADC fait par la direction de la puiſſance C ; ce principe ainſi poſé, venons à l'état de la Queſtion.

Si les plans inclinés CB, EG (*Fig. 63.*) ſe coupent à angles droits, la puiſſance M eſt à la puiſſance N comme le ſinus de l'angle ZAQ au ſinus de l'angle ZAR ; or le triangle RAQ étant rectangle eſt ſemblable aux triangles rectangles ZAQ, ZAR ; donc l'angle ZAQ eſt égal à l'angle ZRA, & l'angle ZAR eſt égal à l'angle ZQA, & par conſéquent la puiſſance M eſt à la puiſſance N comme le ſinus de l'angle ZRA eſt au ſinus de l'angle ZQA, ou comme la corde AQ à la corde RA ; ainſi ce que j'ai avancé pour ce cas eſt abſolument vrai, & alors la peſanteur du poids eſt exprimée par la droite RQ qui eſt le ſinus de l'angle RAQ.

Que ſi les puiſſances M, N, ne ſoutenoient qu'une partie du poids, il eſt aiſé de voir qu'elles ſeroient toujours entr'elles comme le ſinus de l'angle ARQ au ſinus de l'angle ZRA.

Si les plans inclinés CB, EG, ſoutenoient le poids tout entier ou une partie du poids, la réſiſtance du plan CB ſeroit à

la

la résistance du plan EG comme le sinus de l'angle IAO au sinus de l'angle LAO par le principe précédent; car ces deux résistances font le même effet que deux puissances qui pousseroient de L en A & de I en A, & qui seroient en équilibre avec le poids A ; or l'angle IAO est égal à l'angle ZAR ou ZQA, & l'angle LAO est égal à l'angle ZAQ ou ZRA ; donc la résistance du plan CB seroit à la résistance du plan EG comme le sinus de l'angle ZQA au sinus de l'angle ZRA, ou comme la corde RA à la corde QA, & par conséquent les résistances des deux plans seroient dans la raison réciproque des puissances M, N, ou dans la raison réciproque des sinus de leurs angles d'inclinaison à cause de l'angle ZQA égal à l'angle d'inclinaison EGF, & de l'angle ZRA égal à l'angle d'inclinaison CBD.

Supposé donc que les puissances M, N, soutinssent ensemble une partie du poids A, par exemple le tiers, & que les deux plans soutinssent les deux tiers restans, on prendroit le tiers de RQ pour exprimer le tiers du poids, & prenant ce tiers pour rayon total, les sinus des angles QRA, RQA, exprimeroient les puissances M, N, aprés quoi on prendroit les deux tiers de RQ pour exprimer les deux tiers du poids, & prenant ces deux tiers pour sinus total les sinus des angles RQA, QRA exprimeroient les résistances des plans CB, EG.

Supposons maintenant que les plans inclinés CB, EG (*Fig. 64.*) fassent entr'eux un angle aigu ou obtus ; la puissance M sera à la puissance N comme le sinus de l'angle ZAQ au sinus de l'angle ZAR, mais le triangle RQA n'étant plus rectangle, l'angle ZAQ ne sera plus égal à l'angle ZRA, & l'angle ZAR ne sera pas non plus égal à l'angle ZQA, & par conséquent la puissance M ne sera pas à la puissance N comme le sinus de l'angle QRA au sinus de l'angle RQA, ou comme la corde QA à la corde RA ; mais à cause que l'angle ZAQ est le complement à l'angle droit de l'angle ZQA, & que l'angle ZAR est le complement à l'angle droit de l'angle ZRA, on aura M est à N comme le sinus de complement de l'angle ZQA au sinus de complement de l'angle QRA ; or l'angle ZQA étant égal à l'angle d'inclinaison EGF, le sinus de complement de ZQA est égal au sinus de complement de l'angle d'inclinaison EGF, & l'angle ZRA étant égal à l'angle d'inclinaison CBD, le sinus de complement de ZRA est égal au sinus de complement de l'angle d'inclinaison CBD ; donc on aura M est à N comme le sinus de comple-

ment de l'angle EGF au ſinus de complement de l'angle CBD, ou comme le ſinus de GEF au ſinus de BCD, c'eſt-à-dire les puiſſances M, N, dans ce cas, ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus de complement des angles d'inclinaiſon de leur plan.

Si les plans CB, EG, ſoutenoient le poids, la réſiſtance du plan CB ſeroit à la réſiſtance du plan EG comme le ſinus de l'angle VAO au ſinus de l'angle VAT; or à cauſe des triangles rectangles ſemblables OAV, XGV, l'angle VAO eſt égal à l'angle d'inclinaiſon EGB, ou à l'angle ZQA, & à cauſe des triangles ſemblables YAT, YBX, l'angle VAT eſt égal à l'angle d'inclinaiſon CBD, ou à l'angle ZRA; donc la réſiſtance du plan CB ſeroit à la réſiſtance du plan EG comme le ſinus de l'angle EGF au ſinus de l'angle CBD, ou comme la corde RA à la corde QA, c'eſt-à-dire que les réſiſtances de ces plans ſeroient entre elles réciproquement comme les ſinus de leurs angles d'inclinaiſon.

Si les puiſſances M, N, ſoutenoient une partie du poids A, par exemple le quart, & que les deux plans ſoutinſſent les trois quarts reſtans, on prendroit le quart de RQ pour exprimer le quart du poids A, & prenant ce quart pour ſinus total, le ſinus de complement des angles RQA, QRA exprimeroit les puiſſances M, N, après quoi on exprimeroit les trois quarts du poids A par les trois quarts de RQ, & prenant ces trois quarts pour ſinus total, les ſinus des angles RQA, QRA, exprimeroient les réſiſtances des plans CB, EF.

Au reſte, lorſqu'il s'agit de chercher les forces de deux puiſſances qui ſoutiennent un poids par le moyen d'une corde, il vaut mieux ſe ſervir tout d'un coup du principe que j'ai expliqué ci-deſſus, que d'avoir recours à des plans inclinés paralleles aux directions des cordes; car par cette voye on ne parvient à ce qu'on cherche que par de longs circuits qui peuvent vous tromper, comme on vient de voir.

Je ſuis bien aiſe de faire obſerver en paſſant que quelque petit que ſoit le poids A, & quelque grande au contraire que puiſſent être les puiſſances M, N, qui le tirent, la corde RAQ fera toujours un angle, & ne pourra jamais être tendue en ligne droite; car ſi la corde pouvoit prendre la poſition RQ, les puiſſances M, N, ſeroient alors entr'elles comme les droites RZ, ZQ, & tireroient dans les directions de ces deux droites, mais ces directions n'étant point oppoſées à la direction ZA de la peſan-

teur, ne pourroient empêcher cette pesanteur de tirer le corps; donc quand même les puissances M, N, seroient infinies, elles ne pourroient tendre la corde en ligne droite.

Après avoir corrigé dans mon Ouvrage les deux endroits défectueux qu'on vient de voir, je vais réparer une espece d'inexactitude dans laquelle on pourroit m'accuser d'être tombé dans une autre Proposition.

Page 155. N°. 178. Proposition LIX. J'ai dit: *Que si un corps spherique* A (Fig. 65.) *qui est sur un plan incliné* BC *est tiré par des puissances* H, G, *&c. dont les directions ne soient pas paralleles au plan incliné, & fassent par conséquent un angle avec ce plan, & que chacune de ces forces soit en équilibre avec le corps, la force sera au corps* A *comme le sinus de l'angle d'inclinaison du plan sur la base, est au sinus de complement de l'angle de traction fait par la direction de la force avec le plan incliné.* Cette Proposition est absolument vraye dans toutes ses parties, ainsi que je le démontrerai bientôt mieux, mais son inverse est fausse, c'est-à-dire il n'est pas toujours vrai que quand la force est au poids comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle de traction, il y ait équilibre entre la force & le poids; or quoique je n'aye point parlé de cette inverse, cependant afin qu'on ne s'y trompe pas, & pour faire voir en même-tems au Lecteur le cas où cette inverse n'a point lieu, voici un Eclaircissement qu'il faut mettre avec sa demonstration à la fin du Corollaire II. de la même Proposition, page 160.

Nota. Que quoique la Proposition que nous venons de démontrer soit dans l'exacte rigueur, de même que ses Corollaires, cependant son inverse n'est pas toujours veritable, & pour le prouver nous employerons la méthode du mouvement composé qui est beaucoup plus simple que celle du levier coudé.

Soit le plan incliné CB (*Fig.* 251.) sur lequel est le corps A; du point d'attouchement X j'éleve sur le plan la perpendiculaire XZ qui passe par le centre de la sphere; du centre A je mene OT parallele au plan incliné, & le grand cercle OXTV de la sphere se trouve coupé en quatre parties égales. Je suppose que la pesanteur du corps A soit exprimée par la ligne AQ, cette pesanteur sera équivalente aux deux forces AX, AR, & n'agira que comme AR, à cause que le plan CB s'oppose invinciblement à AX. Je prens AM égal à AR, j'éleve au point M la perpendiculaire indéfinie MN, & du centre A je conçois des

droites AG, AE, AN, qui paſſent par tous les points du quart de cercle OV ; cela poſé.

Je dis 1°. *Que les puiſſances qui tireroient le corps* A *avec les directions* AG, AE, &c. *& qui ſeroient exprimées par les droites* AG, AE, &c. *compriſes entre le centre & la perpendiculaire* MN, *ſeroient chacune à la peſanteur* AQ *comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du plan* CB *au ſinus du complement de l'angle de traction.*

Du point X je mene XS perpendiculaire ſur AQ, & XY perpendiculaire ſur la direction GL ; ainſi prenant pour ſinus total la droite AX, j'ai XS pour le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du plan, & XY pour le ſinus de l'angle de complement de l'angle de traction, comme il a été démontré dans la Propoſition LIX ; or le triangle GMA eſt ſemblable au triangle AXL, & celui-ci eſt ſemblable au triangle AXY ; & par conſéquent les triangles GMA, AXY étant ſemblables, j'ai GA, MA :: AX, XY, ou GA, XQ :: AX, XY, ce qui donne $GA \times XY = XQ \times AX$; de même les triangles AXQ, AXS, étant ſemblables, j'ai AQ, XQ :: AX, XS, ce qui donne $AQ \times XS = XQ \times AX$; donc $GA \times XY = AQ \times XS$, & par conſéquent GA, AQ :: XS, XY ; c'eſt-à-dire la force exprimée par GA, & qui tire le corps avec la direction GA eſt à la peſanteur AQ du corps comme le ſinus XS de l'angle d'inclinaiſon au ſinus XY du complement de l'angle de traction & on prouvera aiſément la même choſe de toutes les puiſſances, dont les directions paſſent par le quart de circonférence OV, & qui ſont exprimées par des lignes telles que AG, AP, &c. compriſes entre le centre & la droite MN.

Je dis 2°. *Que de toutes les puiſſances dont nous venons de parler, il n'y a que celles qui ſont compriſes entre la droite* OA *parallele au plan, & la verticale* AP *qui ſoient en équilibre avec le corps* A ; car la puiſſance qui tire ſelon OA, & qui eſt exprimée par la droite AM égale & contraire à la force AR, contrebalance cette force, & par conſéquent le corps s'appuye en X par la force AX, & ne deſcend point ; de même la force GA étant compoſée de la force AM égale & contraire à la force AR, & de la force GM contraire, mais moindre que la force AX, le corps doit néceſſairement s'appuyer en X, & l'on prouvera la même de toutes les autres puiſſances qui ſont entre AM & AP ; enfin la force AP étant compoſée de MA égale & contraire à AR, & de MP ou AV égale & contraire à AX, il doit encore y avoir équilibre entre la puiſſance & le poids A ; mais quant aux puiſ-

ſances qui paſſeront entre la verticale AP, & la droite AV qui termine le quart de circonference, elles ne ſeront plus en équilibre; car la force NA étant compoſée de AM égal & contraire à AR, & de MN ou AZ contraire, mais plus grand que AX, il eſt viſible que quoique AM contrebalance AR, cependant AZ doit entraîner AX, & par conſéquent l'équilibre doit être rompu, & le corps A doit être enlevé, & il faut dire la même choſe de toutes les puiſſances dont les directions ſe trouveront entre AP, & AZ.

Que ſi on veut que les puiſſances dont les directions ſont entre AP & AZ, pouſſent le corps A au lieu de le tirer, alors il arrivera que le corps A peſera beaucoup plus ſur le plan CB, & qu'en même tems il ira deux fois plus vite ſelon la direction AR, car la force NA, par exemple, dans cette ſuppoſition étant compoſée de MA qui pouſſe de M vers A & qui eſt égale à AR, & de ZA qui pouſſe de Z vers A, & qui eſt encore plus grande que AX, il eſt viſible que les deux enſemble AX, ZA preſſeront le corps A contre le plan avec plus de force que ſi AX agiſſoit ſeule, & qu'en même tems les deux MA, AR lui donneront ſelon AR une viteſſe deux fois plus grande que celle que lui donneroit la force AR.

Quant à la puiſſance qui tireroit ſelon AZ, il eſt viſible qu'il ſuffit qu'elle ſoit plus grande que AX pour enlever le corps, mais ſi au lieu de tirer le corps elle le pouſſoit de Z en A; il eſt encore clair que quand même cette force ſeroit infinie, elle n'empêcheroit pas la puiſſance AR d'entraîner le corps ſelon la direction AR; c'eſt pourquoi au lieu de dire comme j'ai dit, page 159 ligne 8 : *qu'il faudroit une force infinie pour ſoûtenir le corps* A *en le pouſſant avec cette direction*, il faut dire, *qu'une force même infinie ne le retiendroit pas.*

Si nous conſiderons les puiſſances qui tirent avec des directions qui paſſent par le quart de circonférence OX (*Fig.* 252), je prens de même AM égal à AR, & menant MN perpendiculaire ſur AM, & enſuite du centre A des droites AH, AN, &c. terminées ſur M; je dis que *les puiſſances qui ſeront exprimées par ces droites ſeront à la peſanteur* AQ *du corps* A *comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de complement de l'angle de traction* ALQ, *& qu'elles ſeront toutes en équilibre avec le corps.*

Du point X je mene XS perpendiculaire ſur AQ & XH perpendiculaire ſur HA, l'angle XAS eſt égal à l'angle d'inclinai-

ſon du plan CB, & les triangles LAX, HAX étant ſemblables l'angle HAX eſt égal à l'angle HXL qui eſt l'angle de complement de l'angle de traction HLX, ainſi prenant pour ſinus total la droite AX, le ſinus de l'angle d'inclinaiſon ſera XS, & le ſinus de complement de l'angle de traction ſera XH, cela poſé.

Le triangle HMA eſt ſemblable au triangle HAX, à cauſe que ces deux triangles ſont rectangles, & que l'angle aigu MHA eſt égal à ſon alterne HAX, donc HA, MA :: AX, XH, ou HA, XQ :: AX, XH, ce qui donne $HA \times XH = XQ \times AX$; de même les triangles rectangles ſemblables AXQ, AXS donnent AQ, XQ :: AX, XS, donc $AQ \times XS = XQ \times AX$, & par conſéquent $HA \times XH = AQ \times XS$, d'où l'on tire HA, AQ :: XS, XH, c'eſt-à-dire la puiſſance HA eſt à la peſanteur AQ du poids A comme le ſinus XS de l'angle d'inclinaiſon du plan CB eſt au ſinus XH du complement de l'angle de traction, & on prouvera la même choſe des autres puiſſances dont les directions paſſent par le quart de cercle.

Il eſt aiſé de voir que toutes ces puiſſances ſeront en équilibre avec le corps A, car chacune d'elles ſera compoſée de la force AM égale & contraire à la force AR & d'une force qui tirera de M vers H, & par conſéquent l'effort que la peſanteur fait vers R ſera contrebalancé, & le corps A ſera encore plus preſſé ſur le plan & reſtera immobile.

Les puiſſances dont les directions paſſent par le quart de cercle VT, doivent pouſſer le corps vers L, & comme elles ont les mêmes directions que celles dont les directions paſſent par le quart de cercle OX, il eſt clair qu'elles ſeront en équilibre avec le corps A quand elles ſeront à la peſanteur AQ, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de complement de l'angle de traction.

Quant aux puiſſances dont les directions paſſent par le quart de cercle TX & qui pouſſent vers A; il eſt encore clair que celles qui paſſeront entre AT & la verticale AQ ayant les mêmes directions que celles qui paſſeroient entre OA & la verticale AP ſeront en équilibre avec le corps quand elles ſeront à la peſanteur AQ comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de complement de l'angle de traction, & que celles qui paſſeront entre la verticale AQ & la droite AX, ne ſeront point en équilibre avec le corps, quoi qu'elles ſoient à la peſanteur AQ comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de complement de

l'angle de traction ; car si ces puissances poussent le corps vers A elles l'enleveront de même que celles qui le tireroient & qui passeroient entre AP & AY, & si elles le tirent elles donneront au corps une double vitesse de A vers R, de même que celles qui le pousseroient & qui passeroient entre AP & AY.

On voit donc par là que quoiqu'il soit toujours vrai de dire qu'une puissance qui est en équilible avec le corps A est à la pesanteur de ce corps comme le sinus de l'angle d'inclinaison est au sinus de complement de l'angle de traction, cependant il est faux que toute puissance qui est à la pesanteur du corps A dans la raison du sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de complement de l'angle de traction, soit en équilibre avec cette pesanteur ou avec le poids A.

En finissant ces éclaircissemens je vais ajoûter ici deux Problêmes dont on ne sera pas fâché de voir la solution.

Problême I. *Deux puissances* A, B (Fig. 253, 254.) *tirant un levier* CD *avec des directions obliques* CA, DB, *on demande quel est le point où le levier* CD *devroit être attaché fixement afin que les deux puissances fussent en équilibre.*

Pour résoudre ce Problême, je prolonge les directions CA, DB, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en R, je prens les droites RS, RH, qui soient entr'elles comme les puissances A, B, & achevant le parallellogramme RM, je mene la diagonale RM, & le point O ou cette diagonale, est le point autour duquel les deux puissances seroient en équilibre.

Les puissances A, B, & la résistance du point fixe du levier que nous cherchons doivent être en équilibre, & par conséquent elles doivent faire le même effet que si la puissance en A poussant de R en S, & la puissance B de R en H une troisiéme puissance poussoit de M en R, & fut en équilibre avec A & B; or afin que cela fut, il faudroit que cette troisiéme puissance fut exprimée par MR, & qu'elle en eut la direction, selon le principe établi ci-dessus, donc la résistance du point du levier que nous cherchons doit être exprimé par MR, & ce point doit être dans cette direction, & par conséquent il doit être en O.

Et pour faire voir que ceci s'accorde avec les autres principes établis dans cet ouvrage, supposons AC = RS & BD = RH, du point O je mene les perpendiculaires OV, OT sur les directions des puissances, & il est visible qu'en prenant pour sinus total la droite RO, la perpendiculaire OV est le sinus de l'angle

ORV; & la perpendiculaire OT eſt le ſinus de l'angle ORS; or dans le parallelogramme MR ou dans le triangle MHR le côté MH = SR = AC eſt le ſinus de l'angle ORV & le côté HR = BD eſt le ſinus de l'angle HMR ou de ſon alterne ORS, donc les puiſſances AC, BD ſont entr'elles comme les perpendiculaires OV, OT, & par conſéquent les puiſſances AC, BD attachées aux extrémités du levier coudé TOV ſeroient en équilibre autour du point fixe O puiſqu'elles ſeroient entr'elles dans la raiſon reciproque de leur bras de levier. Il me reſte donc à faire voir que les mêmes puiſſances appliquées aux extrémités du levier CD ſont auſſi en équilibre autour du point fixe O, ce que je fais ainſi.

J'acheve les parallelogrammes PN, DB autour des forces AC, BD, & par conſéquent la force AC étant compoſée des deux CP, CN n'agit ſur le levier que comme CN à cauſe que PC trouve un obſtacle invincible en O, par la même raiſon la force DB compoſée des deux DQ, DE n'agit ſur le levier que comme DE, c'eſt pourquoi ſi je demontre que les forces CN, DE ſont en équilibre autour du point O, il ſera demontré auſſi que les forces AC, DB ſont en équilibre autour du même point. Or les triangles rectangles ANC, ou PAC & CTO étant ſemblables, nous avons AC, NC : : CO, OT, ce qui donne $AC \times OT = NC \times CO$, on prouvera aiſément que les triangles BED, DOV ſont ſemblables, ainſi l'on aura BD, ED : : DO, VO, ce qui donne $BD \times VO = ED \times DO$, mais nous avons prouvé que les forces AC, BD attachées aux extrêmités T, V du levier coudé TOV, ſeroient en équilibre autour du point O, & que par conſéquent on auroit $AC \times TO = BD \times OV$, mettant donc les valeurs de ces rectangles, nous aurons $NC \times CO = ED \times DO$, ce qui donne NC, ED : : DO, CO, c'eſt-à-dire les forces NC, ED ſont entr'elles reciproquement comme leur bras de levier, & par conſéquent elles ſont en équilibre autour du point O.

Problême II. *Deux plans verticaux* AB, CR (Fig. 255.) *étant donnés avec pluſieurs plans inégalement inclinés* AE, AF, AG, *&c. qui paſſent tous par le point* A, *trouver lequel de ces plans ſera parcouru dans un moindre tems par un corps qui deſcendroit le long de ce plan.*

J'éleve en A la perpendiculaire AC entre les deux plans AB, CR, & prenant A*g* ou CG égal à AC, je dis que le plan AG qui paſſe par le point G eſt le plan demandé; pour le prouver.

Je décris du centre *g* avec le rayon *g*A un demi-cercle AGB, qui

qui touche le plan CR en G, & qui coupe par conséquent les autres plans inclinés 1, 2, 3, 4, &c. j'ai prouvé N°. 196. Corollaire X, de la Proposition LXII, que le tems de la descente le long de chacune des cordes A1, A2, AG, A3, &c. étoit toujours égal au tems de la descente le long du diametre AM, & par conséquent le tems de la descente le long du plan AG, est égal au tems de la descente le long de telle corde que l'on voudra A1, A2, A3, &c. or tous les plans AE, AF, AH, &c. sont plus longs que les cordes A1, A2, A3, &c. donc le tems de la descente le long de ces plans est plus long que le tems de la descente le long des cordes A1, A2, A3, &c. & par conséquent le tems de la descente le long du plan AG est plus court que le tems de la descente le long de chacun des autres plans AE, AF, AH, &c.

FAUTES D'IMPRESSION.

Page 177, ligne 14, les parties GQ, QP prises sur la ligne AC, *lisez*, les parties AQ, QP prises sur la hauteur AC.

Page 202, ligne 4, je mene une ordonnée DG que je nomme $=z$, *lisez*, je mene une ordonnée DG & je nomme son abscisse $CG=z$.

Ibidem, ligne 28, & à l'ordonnée z, *lisez*, & à l'abscisse $CG=z$.

Page 209, 210, 211, & 212, il s'est glissé deux fautes d'inadvertance que je vais corriger ici. 1°. J'ai dit que pour trouver la pesanteur absolue d'un poids M (*Fig. 94.*) qui tiendroit un pont AB en équilibre, il falloit exprimer la pesanteur du pont par la longueur de la corde BC, au lieu qu'il falloit dire comme j'ai dit auparavant, qu'il falloit exprimer la pesanteur du pont par la distance CA du point C au point A. Or de-là il s'en est ensuivi que toutes les fois qu'il s'est agi du rapport des grandeurs a, b, je me suis servi par megarde des expressions suivantes. *Si le poids* M *pese autant que le pont .... la pesanteur absolue du poids* M *peut être égale ou plus grande que la pesanteur absolue du pont ...* au lieu de ces expressions il faut substituer celles-ci: *Si la ligne b qui exprime la pesanteur absolue du poids* M *est égale à la longueur de la corde exprimée par a .... la ligne qui exprime la pesanteur absolue du poids* M *peut être ou égale ou plus grande que la longueur de la corde.*

Au reste, quand on aura déterminé par les regles de ce Problême la longueur qui exprime la pesanteur du poids M, on trouvera aisément son rapport avec la pesanteur absolue du pont puisque cette pesanteur étant exprimée par CA, on peut connoître le rapport de la corde à la ligne CA & par conséquent celui de la ligne qui exprime la pesanteur du poids à la ligne CA.

Page 286, ligne 10, est égale à la différence de la quantité de mouvement après le choc, *lisez*; est égale à la quantité de mouvement après le choc.

Page 298, ligne 16, avec des vitesses proportionnelles aux masses, *lisez*, avec des vitesses reciproquement proportionnelles aux masses.

Page 466, ligne 20, étoit aigu, *lisez*, étoit obtus.

Page 512, ligne 29, & la pesanteur absolue de la colonne EB est à la pesanteur absolue de la colonne VD comme FB est à TD, *lisez*, & la pesanteur absolue de la colonne EB est égale à la pesanteur absolue de la colonne VD.





On trouve chez le même Libraire les Livres ſuivans.

NOuveau Cours de Mathematique très-utile pour élever les Commençans ſans le ſecours d'aucun Maître à la connoiſſance de tout ce qu'il y a de plus profond dans cette Science, contenant l'Arithmetique des Géometres, la Theorie & la Pratique de la Geometrie, la Meſure des Surfaces & des Solides, & le Calcul Intégral & Différentiel expliqués & appliqués à la Geometrie, par M. l'Abbé Deidier, en quatre volumes *in Quarto* enrichis de près de cent Planches.

Le Parfait Ingénieur François, ou la Fortification Réguliere & Irréguliere, avec l'Attaque & Défenſe des Places, ſuivant M. le Maréchal de Vauban, nouvelle Edition conſidérablement augmentée, par M. l'Abbé Deidier *in-Quarto*, enrichi de 50 planches, *ſous Preſſe*.

Memoires d'Artillerie de M. Surirey de S. Remy, avec des Notes & des Additions très-conſidérables, par M. Belidor, nouv. Edit. augmentée d'un volume, en trois volumes *in-Quarto*, *ſous Preſſe*.

De l'Attaque & de la Défenſe des Places, par M. de Vauban, *in-Quarto*, Grand-Papier avec quantité de grandes planches.

Memoires pour ſervir d'inſtruction dans la conduites des Sieges & dans la défenſe des Places, par M. le Maréchal de Vauban, *in-Quarto*, Grand-Papier avec Figures 1740.

Nouvelle Fortification tant pour un terrein bas & humide, que pour un ſec & élevé, avec la conſtruction de l'Hexagone à la Françoiſe, par M. le Baron de Coëhorn, nouv. Edit. *in-Octavo*, rempli de Figures 1741.

Le Bombardier François, ou nouvelle Méthode de jetter les Bombes avec préciſion, avec un Traité des Feux d'Artifice, par M. Belidor, *in Quarto* avec Figures.

Sentimens d'un Homme de Guerre ſur le Syſtème du Chevalier Folard, *in-Quarto*.

L'Ingenieur François, contenant la Géometrie pratique, la Fortification réguliere & irréguliere, ſuivant M. de Vauban, &c. par M. de la Londe, Ingénieur du Roy, *in-Octavo*, avec Figures.

Véritable maniere de fortifier de M. de Vauban, par M. du Fay, & le Chevalier de Cambray, *in-Octavo* figures.

La Science des Ingenieurs dans la conduite des travaux de Fortification par M. Belidor, *in Quarto*, grand-papier avec 50 planches.

Theorie nouvelle ſur le Mécaniſme de l'Artillerie, par M. Dulacq, Officier d'Artillerie, rempli de figures, & enrichi de vignettes, *in-Quarto* 1741.

Memoires de M. Goulon ſur l'Attaque & la Défenſe d'une Place, avec la Relation du Siege d'Ath, *in-Octavo*, figures.

Nouveau Traité de la perfection ſur le fait des Armes, avec l'exercice Militaire, par le ſieur Girard, ancien Officier de Marine, *in-Quarto*, orné de cent vingt planches.

Nouveaux Elemens de Fortification à l'uſage des Officiers, où l'on donne une idée générale de la Fortification indépendamment de tout Syſtème particulier, par M. le Blond *in* 12. avec figures.

La Fortification réguliere & irréguliere qui comprend la Conſtruction, l'Attaque, & la Défenſe des Places, ſuivant les plus célébres Auteurs, par M. Ozanam *in-Octavo*, avec quantité de planches.

Les regles du Deſſein & du Lavis pour les Plans & Elevations des Edifices Militaires, & pour deſſiner les Cartes particulieres des environs d'une Place, par M. Buchotte, Ingenieur du Roy, *in-Octavo*, avec figures.

Nouvelle maniere de fortifier les Places par le moyen des Contremines, par M. Dazin, *in*-12. avec figures.

Nouvelle Méthode pour apprendre à dessiner sans Maître, enrichie des proportions du corps Humain & de plusieurs figures d'Académie, gravées par les plus habiles Maîtres, *in*-4. grand-papier, enrichi de 120 Planche 1740.

Astronomie Physique, ou Principes Géneraux de la Nature, appliqués au Mécanisme Astronomique & comparés aux Principes de la Philosophie de M. Newton, *in* 4. enrichi de Vignettes & Figures en Taille douce 1740.

Lettre de M. de Mairan à Madame la M. D. C. avec sa Dissertation sur les forces des Corps, & la refutation des Forces vives, par M. l'Abbé Deidier, *in*-12. fig. 1741.

Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du Calcul Differentiel les proprietés des lignes Geométriques de tous les Ordres, par M. l'Abbé De Gua, *in*-12. 1740.

Les Tables des Sinus Tangentes & Sécantes, & des Logarithmes, par Adrien Wlacq, corrigées par M. Ozanam, avec la Trigonometrie; nouvelle édition, beaucoup plus correcte & plus belle que les précédentes, *in*-8. figures. 1741.

Nouveau Tarif du Toisé, tant superficiel que solide, où l'on trouve les Calculs du Toisé tout faits sans mettre la main à la plume, avec le Toisé des Bâtimens, suivant les Us & Coûtumes de Paris, *in*-8 *sous presse*.

Application de la Geométrie ordinaire & des Calculs Différentiel & Integral à la resolution de plusieurs Problémes; par M. Robillard le fils, *in* 4. avec fig. *sous-presse*.

Traité Analytique des Sections Coniques, des Fluxions & Fluentes appliqué à differens sujets de Mathematique; par M. Muller, nouvelle édition traduite de l'Anglois & augmentée considérablement par l'Auteur méme, *in*-4. avec figures *sous-presse*

Oeuvres de Physique & de Mathematique de M. Mariotte, de l'Académie des Sciences, nouv. édit en deux vol. *in*-4. avec quantité de fig. 17[illegible]0.

Essais de Physique par M. Musschenbroeck, Professeur de Philosophie, avec une description de nouvelles machines pneumatiques, en deux volumes *in*-4 avec fig. 1[illegible]3.

Architecture Hydraulique, ou l'Art de conduire, d'Elever & de menager les Eaux pour tous les besoins de la vie; par M. Belidor, en deux volumes *in*-4 grand-papier, enrichis de [illegible]00 planches 1[illegible]39.

Nouveau Cours de Mathematique à l'usage de l'Artillerie & du Génie; par M. Belidor, *in*-4. avec figures.

Cours de Mathematique, qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de guerre: Sçavoir l'Introduction, les Elemens d'Euclides, l'Arithmetique, la Trigonometrie & les Tables des Sinus, la Geométrie, la Fortification, la Mechanique, la Perspective, la Geographie & la Gnomonique; par M. Ozanam, en cinq volumes *in*-8

Les Recreations Mathematiques & Physiques; par M. Ozanam, en quatre volumes *in*-8 nouvelle édition 1741.

Les Elemens d'Euclides du P. Deschales, corrigés & augmentés par M. Ozanam, *in*-12. avec figures, nouvelle édition 1740.

Methode facile pour Arpenter & mesurer toutes sorte de superficies, avec le toisé des bois de Charpente; par M. Ozanam, *in*-12.

La Geométrie Pratique, contenant la Longimetrie, Planimetrie & Stereometrie, avec l'Arithmetique par Geométrie; par M. Ozanam, *in*-12.

Methode pour lever les plans & les Cartes de Terre & de Mer, *in*-12. avec fig.

L'usage du Compas de Proportion, avec un Traité de la division des champs; par M. Ozanam, *in*-8.

Nouvelle Méchanique ou Statique; par M. Varignon, de l'Académie des Sciences, en deux volumes *in*-4. avec 65 planches.

On trouve chez le même Libraire toutes sortes de Livres sur l'Architecture Civile & Militaire, & sur les differentes parties des Mathematiques.



LA MECHANIQUE GENERALE,

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE, L'HYDROSTATIQUE, ET L'HYDRAULIQUE, &c.

LIVRE PREMIER.

De la Méchanique des Solides, & de la Statique.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions, & Axiomes.

DEFINITION.

1°. ON dit qu'un Corps eſt en *repos*, lorſqu'il demeure toujours dans le même lieu, & qu'il eſt en *mouvement*, lorſqu'il change continuellement de lieu.

2°. La *peſanteur* ou *gravité* d'un Corps, eſt l'effort qu'il fait pour tendre au Centre de la Terre, & ſa *gravitation* eſt l'effort qu'il fait ſur un autre Corps qui eſt au-deſſous de lui.

3°. La *masse* d'un Corps est la matiere dont il est composé, & son *volume* est l'extension de cette matiere en longueur, largeur, & profondeur.

4°. La *Force motrice*, ou simplement la *Force* d'un Corps, est ce qui communique le mouvement au Corps; quelques Auteurs l'appellent *Force vive* ou *vivante*, lorsque ce Corps est actuellement en mouvement, & *Force morte*, lorsque le Corps n'étant pas en mouvement paroît cependant y tendre : telle est la force d'une pierre qui est suspendue par un fil. On verra dans la suite ce que l'on doit penser de cette distinction de forces.

5°. Par le *temps* on entend en Méchanique la partie du temps pendant laquelle le mouvement d'un Corps dure, & par l'*Espace* on entend le lieu que le Corps a parcouru pendant son mouvement. Si l'on considere le Corps comme un point, l'Espace parcouru est une ligne.

6°. La *vitesse* est un effet de la force motrice, qui fait qu'un Corps en mouvement parcourt un espace dans un temps déterminé.

La vitesse des Corps s'estime donc par les espaces parcourus dans des temps égaux. Supposons, par exemple, que le Corps A (*Fig.* 1.) parcoure dans une minute l'espace AC, & que le Corps B dans la même minute parcoure l'espace BD double de l'espace AC, la vitesse du Corps B sera double de la vitesse du Corps A. Que si le Corps B dans la même minute parcourt l'espace BE triple de l'espace AC, la vitesse de B sera triple de la vitesse de A, & ainsi des autres.

7°. La *Direction* est une ligne le long de laquelle on conçoit qu'un Corps se meut. Si le Corps A (*Fig.* 1.) se meut de A vers C le long de la droite AC, cette droite AC est la direction du Corps A.

8°. La vitesse jointe à la direction s'appelle l'*Effort*; ainsi l'effort est d'autant plus grand que la vitesse est plus grande.

9°. La *Force résistante* est une force qui agit selon une direction opposée à celle d'une autre force. Si le Corps A (*Fig.* 2.) est mû par une force de A vers B, & que le Corps B soit mû par une autre force de B vers A, la force de B s'appellera *Force résistante*, parce que sa direction est opposée à celle de la force qui meut le Corps A.

10. La *quantité du mouvement* d'un Corps, est le produit de sa masse par sa vitesse. Si le Corps A (*Fig.* 1.) pesant par exemple deux livres parcourt dans une minute un espace de trois pieds,

& que le Corps B pesant quatre livres parcoure six pieds, la vitesse du Corps B sera double de celle du Corps A (*N.* 6.); ainsi la vitesse de A sera à celle de B, comme 1 à 2. Multipliant donc le Corps A=2 par sa vitesse =1, & le corps B=4 par sa vitesse =2, les produits 2 & 8 exprimeront la quantité de mouvement de ces deux Corps, c'est-à-dire, le Corps B aura quatre fois plus de mouvement que le Corps A, parce que 8 est quadruple de deux.

Pour estimer la quantité du mouvement, il faut donc avoir égard & aux masses & aux vitesses, & la raison en est évidente. Car dans la supposition que nous venons de faire, les Corps A & B étant entr'eux comme 1 à 2, il est visible que si les vitesses étoient égales, il faudroit pour mouvoir le Corps B une force double de celle qui mouvroit le corps A ; mais la vitesse de B étant double de celle de A, il est encore visible que pour mouvoir B, il faut une force double de la précédente ; donc il faut une force qui soit à celle de A, comme 4 à 1. Or 4 est le produit de deux par deux, c'est-à-dire, de la masse de B par sa vitesse, & 1 est le produit de 1 par 1, ou de la masse de A par sa vitesse ; donc, &c.

11. On dit que le mouvement est *uniforme* lorsque le Corps a toujours la même vitesse, qu'il est *acceleré* lorsque la vitesse va toujours en augmentant, qu'il est *retardé* lorsque la vitesse va en diminuant ; & enfin qu'il est *uniformement acceleré* ou *retardé* lorsque dans des temps égaux la vitesse reçoit des augmentations ou des diminutions égales.

Si le Corps A (*Fig.* 3.) parcourt dans la premiere minute l'espace AB, dans la seconde minute l'espace BC égal à AB, dans la troisiéme l'espace CD égal à AB, & ainsi de suite, le mouvement du Corps A est un mouvement uniforme. Si le Corps A (*Fig.* 4.) parcourt dans la premiere minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BC plus grand que AB, dans la troisiéme, l'espace CD plus grand que BC, & ainsi de suite, le mouvement du Corps A est un mouvement acceleré. Si le Corps A (*Fig.* 5.) parcourt dans la premiere minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BC, moindre que AB, dans la troisiéme l'espace CD moindre que BC, & ainsi de suite, le mouvement du corps A est un mouvement retardé. Si le Corps A (*Fig.* 4.) parcourt dans la premiere minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BC plus grand que AB, dans la troisiéme l'espace CD plus grand que BC, & tou-

jours de même, en sorte que les accroissemens des vitesses soient toujours égaux dans des temps égaux, le mouvement du Corps A est un mouvement uniformement acceleré. Enfin si le Corps A (*Fig.* 5.) parcourt dans la premiere minute l'espace AB, dans la seconde, l'espace BC moindre que AB, dans la troisiéme, l'espace CD moindre que l'espace BC, & ainsi de suite; en sorte que les diminutions des vitesses soient toujours égales dans des tems égaux, le mouvement du Corps A est un mouvement uniformément retardé.

Axiomes.

12. *Rien ne se fait dans la Nature sans quelque raison suffisante.* Si aujourd'hui une chose est d'une façon & demain d'une autre, il est sûr qu'il y aura quelque raison de ce changement, à moins qu'on ne soit assez fou pour oser soûtenir qu'il est des choses qui échapent à la prévoyance de l'Auteur de la Nature, & que le seul hazard conduit.

13. *Si un Corps en mouvement a toujours la même vitesse, il parcourt des espaces égaux dans des tems égaux.* Car si avec sa vitesse il parcourt dans une minute l'espace d'un pied, il est évident que dans une autre minute, avec la même vitesse, il parcourra encore l'espace d'un pied, puisqu'il n'y a pas de raison pour pouvoir dire qu'il doit parcourir un espace moindre ou plus grand.

Si deux Corps en mouvement ont la même vitesse, ils parcourront dans le même tems des espaces égaux. Il n'y a pas de raison pour pouvoir dire que l'un doit parcourir un espace moindre ou plus grand que celui que l'autre parcourt; donc, &c.



CHAPITRE II.

Du Mouvement uniforme des Corps.

PROPOSITION PREMIERE.

14. *DANS le mouvement uniforme d'un Corps, les eſpaces parcourus ſont entr'eux comme les tems employés à les parcourir.*

DEMONSTRATION.

Puiſque dans le mouvement uniforme le Corps a toujours la même viteſſe, il eſt sûr que ſi le Corps A (*Fig. 6.*) parcourt dans un tems quelconque, par exemple, dans une minute l'eſpace AB, dans un ſecond tems égal au premier, il parcourra un eſpace BC égal au premier eſpace AB, & que ſi ce ſecond tems eſt double, triple, quadruple, &c. du premier, ou qu'il ne ſoit que la moitié, le tiers, le quart, &c. ou enfin qu'il ſoit au premier en telle raiſon rationnelle, ou ſourde qu'on voudra, l'eſpace parcouru ſera auſſi double, triple, quadruple, &c. du premier eſpace, ou la moitié, le tiers, & le quart, &c. ou enfin en même raiſon rationnelle, ou ſourde, que le ſecond tems eſt au premier; donc le ſecond eſpace ſera au premier, comme le ſecond tems eſt au premier.

Pour abreger les Demonſtrations ſuivantes, & ne pas multiplier les figures, nous appellerons le premier tems $= t$, le ſecond $= T$, le premier eſpace $= s$, le ſecond $= S$; & quand il s'agira de deux Corps en mouvement, nous appellerons la maſſe du premier $= m$, celle du ſecond $= M$, la viteſſe du premier u, celle du ſecond $= V$, la quantité de mouvement du premier $= q$, & celle du ſecond $= Q$.

PROPOSITION II.

15. *Dans le mouvement uniforme, ſi deux Corps* A *&* B *ont la même viteſſe, les eſpaces qu'ils parcourent ſont entr'eux comme les tems qu'ils employent à les parcourir.*

DEMONSTRATION.

Suppoſant que le Corps A dans le tems $= t$ parcoure l'eſpace

$=s$, le Corps B qui par la ſuppoſition a la même viteſſe que le Corps A, parcourra auſſi dans le même tems $=t$ un eſpace $=s$; or ſi nous ſuppoſons que le même Corps B parcoure dans un autre tems $=$ T un eſpace $=$ S, il eſt clair par la propoſition précédente que l'eſpace s qu'il aura parcouru dans le premier tems ſera au ſecond eſpace S parcouru dans le ſecond tems, comme le premier tems au ſecond; donc on aura s, S :: t, T; mais l'eſpace s parcouru dans le premier tems t, eſt égal à l'eſpace s parcouru par le Corps A dans le même tems t; donc les eſpaces s, S, parcourus par les Corps A, B, dans les tems t, T, ſont entr'eux comme les tems t, T.

PROPOSITION III.

16. *Dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus par deux Corps* A, B, *dans un même tems, ſont entr'eux comme les viteſſes des Corps.*

DEMONSTRATION.

Si le Corps A dans le tems t avec une viteſſe u décrit l'eſpace s, dans le même tems avec une viteſſe V multiple ou ſou-multiple de la premiere, il décrira un eſpace S équimultiple, ou équiſoumultiple du premier; & l'on aura s, S :: u, V; donc ſi l'on ſuppoſe que le Corps B dans le même tems t avec la viteſſe V parcoure l'eſpace S, il ſera vrai de dire que l'eſpace s parcouru par le Corps A eſt à l'eſpace S parcouru par le Corps B, comme la viteſſe u du Corps A à la viteſſe V du Corps B, & que par conſéquent les eſpaces parcourus par ces Corps dans un même tems, ſont entreux comme leurs viteſſes.

PROPOSITION IV.

17. *Dans le mouvement uniforme les eſpaces parcourus par deux Corps, ſont en raiſon compoſée de la raiſon des tems & de celle des viteſſes.*

DEMONSTRATION.

Que le Corps A avec une viteſſe u, décrive l'eſpace s dans le tems t, & le Corps B avec une viteſſe V décrive l'eſpace S dans le temps T, la raiſon des temps eſt t, T, celle des viteſſes eſt u, V, & la raiſon compoſée des deux eſt tu, TV, & il faut prouver que s, S :: tu, TV. Pour cela,

Supposons que le Corps B avec une vitesse u égale à celle du corps A décrive un espace r dans le tems T, alors les vitesses des corps A, B, étant les mêmes, on aura $s, r :: t, T$, (*N.* 15.) & comme les espaces S, r, que le Corps B décrit avec différentes vitesses sont décrits dans des tems égaux, on aura $r, S :: u, V$, (*N.* 16.) Multipliant donc les termes de la premiere proportion par ceux de la seconde, on aura $sr, Sr :: tu, TV$, & divisant la premiere raison par r, on aura $s, S :: tu, TV$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

18. Si l'on suppose $s = S$, on aura $tu = TV$; donc $t, T :: V, u$, c'est-à-dire, si les espaces parcourus uniformement par les Corps A, B, sont égaux, les tems sont entr'eux réciproquement comme les vitesses, & les vitesses réciproquement comme les tems.

COROLLAIRE II.

19. Si après avoir supposé $s = S$, on suppose encore $t = T$, on aura $V = u$, c'est-à-dire, que si les espaces parcourus uniformément par deux Corps A, B, dans des tems égaux sont égaux, les vitesses seront égales.

REMARQUE.

20. Ceux à qui les Démonstrations de cette proposition & de ses Corollaires paroîtront trop abstraites, peuvent s'en convaincre par un raisonnement simple qu'ils pourront appliquer aux Propositions suivantes, & dont voici la façon. Supposons, par exemple qu'on veuille démontrer que dans le mouvement uniforme les espaces parcourus par les Corps A, B, sont en raison composée de la raison des tems & de celle des vitesses ; je dis 1°. si les tems & les vitesses étoient égales, les espaces parcourus seroient égaux ; car il n'y a point de raison pour dire le contraire. 2°. Si les tems étoient égaux, & que la vitesse du Corps A fut par exemple à celle du Corps B, comme 2 à 1, l'espace parcouru par le Corps A, seroit à l'espace parcouru par le Corps B, comme 2 à 1, puisqu'une vitesse double fait parcourir un espace double. 3°. Si l'on suppose que le Corps A ayant une vitesse double de celle du Corps B, le tems de son mouvement devienne triple, il est visible qu'il parcourra un espace triple de celui qu'il auroit par-

couru, en ſuppoſant les tems égaux, & que par conſéquent l'eſpace parcouru par le Corps A ſera ſextuple de l'eſpace parcouru par le Corps B ; ainſi ces eſpaces ſeront comme 6 à 1. Or la raiſon 6, 1, eſt compoſée de la raiſon 2, 1, des viteſſes, & de la raiſon 3, 1, des tems. Donc les eſpaces parcourus par les Corps A, B, ſont en raiſon compoſée, &c.

PROPOSITION V.

21. *Dans le mouvement uniforme les viteſſes u & V, des Corps A, B, ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces s, S, & de la raiſon reciproque des tems T & t.*

DEMONSTRATION.

Par la Propoſition précédente on a $s, S :: tu, TV$; donc $sTV = Stu$; d'où l'on tire $u, V :: sT, St$. Or la raiſon sT, St, eſt compoſée de la raiſon s, S, qui eſt la raiſon directe des eſpaces & de la raiſon T, t, qui eſt la raiſon réciproque des tems ; donc les viteſſes u, V, ſont en raiſon compoſée, &c.

REMARQUE.

22. Pour montrer encore une fois aux Commençans comment on peut ſe convaincre de ceci par un raiſonnement fort ſimple, je dis 1°. ſi les eſpaces parcourus & les tems étoient égaux de part & d'autre, il eſt viſible que les viteſſes u & V ſeroient égales, parce qu'il n'y a point de raiſon de dire le contraire. 2°. Si nous ſuppoſons les tems égaux, & que l'eſpace s parcouru par le Corps A ſoit double de l'eſpace S parcouru par le Corps B, la viteſſe u du Corps A ſera évidemment double de la viteſſe V du Corps B ; ainſi ces viteſſes ſeront comme 2 à 1. 3°. Si en ſuppoſant l'eſpace parcouru par le Corps A double de l'eſpace parcouru par le Corps B, on ſuppoſe encore que le tems du mouvement de A ſoit quatre fois plus grand, il eſt sûr que ſa viteſſe ſera quatre fois moindre qu'elle ne ſeroit ſi les tems étoient égaux, puiſqu'il lui faut quatre fois plus de tems pour parcourir le même eſpace. Comme donc la viteſſe du Corps A étoit auparavant à la viteſſe du Corps, B comme 2 à 1, elle ſera maintenant comme $\frac{1}{4}$ de 2 eſt à 1, ou comme $\frac{1}{2}$ à 1, ou enfin comme 1 à 2, ou comme 2 à 4. Mais la raiſon 2, 4, eſt compoſée de la raiſon 2, 1, qui eſt la raiſon directe des eſpaces, & de la raiſon 1, 4, qui eſt la raiſon réciproque des tems. Donc. &c.

On

On appliquera le même raisonnement à tout ce que nous dirons dans les Corollaires & les Propositions suivantes, sans que je sois obligé de le répeter.

COROLLAIRE.

23. Puisque nous avons u, V :: sT, St, si nous divisons la derniere raison d'abord par T, & ensuite par t, nous aurons u, V :: $\frac{s}{t}$, $\frac{S}{T}$, c'est-à-dire, *les vitesses de deux Corps mûs uniformement, sont entr'elles comme les espaces divisés par les tems.*

PROPOSITION VI.

24. *Dans le mouvement uniforme, les tems pendant lesquels les Corps* A, B, *parcourent leurs espaces, sont en raison composée de la raison directe des espaces* s, S, *& de la raison réciproque des vitesses* V, u.

DEMONSTRATION.

Nous avons s, S :: tu, TV, (*N.* 17.) donc sTV $=$ Stu, & par conséquent t, T :: sV, Su. Or la raison sV, Su, est composée de la raison s, S, qui est la raison directe des espaces, & de la raison V, u, qui est la raison réciproque des vitesses. Donc les tems t, T, sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE.

25. *Si les espaces parcourus sont entr'eux comme les vitesses, les tems sont égaux.* Par l'hypotèse nous avons s, S :: u, V, & par (*N.* 17.) nous avons s, S :: tu, TV; donc u, V :: tu, TV, ou u, tu :: V, TV; & divisant la premiere raison par u, & la seconde par V, nous aurons 1, t :: 1, T; or dans cette proportion les deux antécédens sont égaux; donc les conséquens sont aussi égaux, & nous avons $t = $ T.

PROPOSITION VII.

26. *Dans le mouvement uniforme, les quantités de mouvement* q, *&* Q, *de deux Corps* A, B, *sont en raison composée de la raison des masses* m, M, *& des vitesses* u, *&* V.

DEMONSTRATION.

Par la définition de la quantité du mouvement (*N.* 10.) nous

B

avons $q = um$, & $Q = VM$; donc $q, Q :: um, VM$. Or la raiſon um, VM, eſt compoſée de la raiſon m, M, des maſſes, & de la raiſon u, V des viteſſes; donc les quantités de mouvement de deux corps A, B, ſont en raiſon compoſée, &c.

COROLLAIRE I.

27. Si $q = Q$, on aura $um = VM$; donc $u, V :: M, m$, c'eſt-à-dire, *lorſque les quantités de mouvement de deux Corps* A, B, *ſont égales, les viteſſes ſont en raiſon réciproque des maſſes.*

COROLLAIRE II.

28. Si outre $q = Q$, on a encore $M = m$, il eſt évident qu'on aura $u = V$, c'eſt-à-dire, *ſi deux Corps* A, B, *ont une égalité de mouvement & des maſſes égales, les viteſſes ſont auſſi égales.*

De même, ſi outre $q = Q$, on a $u = V$, il eſt viſible qu'on aura $m = M$, c'eſt-à-dire, *ſi les quantités de mouvement de deux Corps ſont égales, & leur viteſſes auſſi, les maſſes ſont égales.*

PROPOSITION VIII.

29. *Dans le mouvement uniforme les viteſſes de deux Corps* A, B, *ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des quantités de mouvement* $q = Q$, *& de la raiſon réciproque des maſſes* m, M.

DEMONSTRATION.

Puiſque nous avons $q, Q :: um, VM$ (*N.* 26.); donc $qVM = Qum$, & par conſéquent $u, V :: qM, Qm$; or la raiſon qM, Qm, eſt compoſée de la raiſon q, Q, qui eſt la raiſon directe des quantitez de mouvement, & de la raiſon M, m, qui eſt la raiſon réciproque des maſſes; donc les viteſſes u, V, ſont en raiſon compoſée, &c.

COROLLAIRE I.

30. Si l'on ſuppoſe $u = V$, on aura $qM = Qm$; donc $q, Q :: m, M$, c'eſt-à-dire, que *ſi les viteſſes des deux Corps ſont égales, les quantitez de mouvement ſont entr'elles comme les maſſes.*

COROLLAIRE.

31. Et ſi après avoir ſuppoſé $u = V$, on ſuppoſe $m = M$, il

est visible qu'on aura $q = Q$, c'est-à-dire, *si les vitesses sont égales & les masses aussi, les quantités de mouvement sont égales.*

Et par la même raison, *si les vitesses sont égales & les quantitez de mouvement aussi égales, il y a égalité entre les masses.*

PROPOSITION IX.

32. *Dans le mouvement uniforme, les masses* m, M, *de deux corps* A, B, *sont en raison composée de la raison directe des quantitez de mouvement* q, Q, *& de la raison reciproque* V, u, *des vitesses.*

DEMONSTRATION.

Puisque nous avons $q, Q :: um, VM$, (*N.* 26.) donc $qVM = Qum$, & par conséquent $m, M :: qV, Qu$. Or la raison qV, Qu, est composée de la raison q, Q, qui est la raison directe des quantitez de mouvement, & de la raison V, u, qui est la raison réciproque des vitesses. Donc les masses m, M, sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

33. Si l'on suppose $m = M$, on aura $qV = Qu$, donc $q, Q :: u, V$, c'est-à-dire, *si les masses sont égales, les quantitez de mouvement sont entr'elles comme les vitesses.*

PROPOSITION X.

34. *Dans le mouvement uniforme, les quantitez de mouvement* q, Q, *de deux corps* A, B, *sont en raison composée de trois raisons, dont les deux premieres sont les raisons directes des masses* m, M, *& des espaces* s, S, *& la troisieme est la raison* T, t, *qui est la raison réciproque des tems.*

DEMONSTRATION.

Par la Proposition V (*N.* 21.) Nous avons $u, V :: sT, St$, & par la Proposition VII. Nous avons $q, Q :: mu, MV$; multipliant donc les termes de la premiere proportion par ceux de la seconde, Nous aurons $qu, QV :: musT, MVSt$, ou bien $qu, musT :: QV, MVSt$, & divisant la premiere raison par u, & la seconde par V, on aura $q, msT :: Q, MSt$, ou $q, Q :: msT, MSt$. Or la raison msT, MSt, est composée de trois raisons, à sçavoir des deux m, M, & s, S, qui sont les raisons directes des masses, & des es-

paces, & de la raison T, t, qui est la réciproque des tems; donc les quantités q, Q, sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

35. Si l'on suppose $q=Q$, on aura $msT=MSt$; donc m, M :: St, sT, c'est-à-dire, *si les quantitez de mouvement sont égales, les masses m, M, sont entr'elles en raison composée de la raison directe des tems t, T, & de la raison S, s, qui est la réciproque des espaces.*

Puisqu'en supposant $q=Q$, on a $msT=MSt$, donc s, S :: Mt, mT, c'est-à-dire, *les quantitez de mouvement étant égales, les espaces s, S, sont en raison composée de la raison directe des tems t, T, & de la raison M, m, qui est la réciproque des masses.*

De même, en supposant $q=Q$, on a $msT=MSt$; donc t, T :: ms, MS, c'est-à-dire, *les quantitez de mouvement étant égales, les tems t, T, sont en raison composée des masses m, M, & des espaces s, S.*

COROLLAIRE II.

36. Si on suppose $q=Q$, & $m=M$, il est clair qu'on aura $sT=St$, donc s, S :: t, T, c'est-à-dire, *les quantitez de mouvement étant égales & les masses aussi, les espaces sont entr'eux comme les tems.*

COROLLAIRE III.

37. En supposant $q=Q$, $m=M$, & $s=S$, il est clair qu'on a $t=T$; de même, en supposant $q=Q$, $m=M$, & $t=T$, on aura $s=S$; & par la même raison on trouvera que, *si en comparant les quantitez de mouvement q, & Q, les masses m & M, les vitesses u, & V, & le tems t, & T, il y a égalité dans les termes de trois de ces raisons, il y aura égalité dans les termes de la quatrieme,*

COROLLAIRE IV.

38. Si on suppose $q=Q$, & $s=S$, on aura $mT=Mt$; donc m, M :: t, T, c'est-à-dire, *les quantités de mouvement étant égales & les espaces aussi, les masses sont entr'elles comme les tems.*

COROLLAIRE V.

39. Si on suppose $q=Q$, & $t=T$, on aura $ms=MS$; donc

m, $M :: S$, s, c'est-à-dire, *les quantitez de mouvement étant égales, & les tems aussi, les masses sont en raison reciproque des espaces.*

PROPOSITION XI.

40. *Dans le mouvement uniforme les espaces* s, S, *parcourus par deux Corps* A, B, *sont en raison composée de trois raisons, dont les deux premieres sont les raisons directes des quantitez de mouvement* q, Q, *& des tems* t, *&* T, *& de la raison* M, m, *qui est la raison réproque des masses.*

DEMONSTRATION.

Par la Proposition X (*N.* 34.) nous avons q, $Q :: msT$, MSt, donc $qMSt = QmsT$; & par conséquent s, $S :: qMt$, QmT ; or la raison qMt, QmT, est composée de trois raisons dont les deux premieres q, Q, & t, T, sont les raisons droites des quantités de mouvement & des tems, & la troisiéme M, m, est la raison réciproque des masses, donc les espaces s, S, sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

41. Si l'on suppose s, S, il est clair qu'on aura $qMt = QmT$; donc q, $Q :: mT$, Mt, c'est-à-dire, *les espaces étant égaux, les quantitez de mouvement sont en raison composée de la raison directe des masses & de la réciproque des tems.*

De même, de ce que $qMt = QmT$, *on a* m, $M :: qt$, QT, c'est-à-dire, *les espaces étant égaux, les masses sont entr'elles en raison composée des quantitez de mouvement & des tems.*

De même encore, de ce que $qMt = QmT$, on a t, $T :: Qm$, qM, c'est-à-dire, *les espaces étant égaux, les tems sont en raison composée de la raison directe des masses & de la reciproque des quantitez de mouvement.*

COROLLAIRE II.

42. Si on suppose $s = S$, & $m = M$, on aura $qt = QT$; donc q, $Q :: T$, t, c'est-à-dire, *les espaces étant égaux, & les masses aussi, les quantitez de mouvement sont en raison reciproque des tems.*

COROLLAIRE III.

43. Si l'on suppose $s = S$, & $t = T$, on aura $qM = Qm$;

donc q, Q :: m, M, c'eſt-à-dire, *les eſpaces étant égaux, & les tems auſſi, les quantités de mouvement ſont entr'elles comme les maſſes.*

PROPOSITION XII.

44. *Dans le mouvement uniforme, les maſſes* m, M, *des Corps* A, B, *ſont en raiſon compoſée de trois raiſons, ſçavoir des raiſons directes des quantitez de mouvement* q, Q, *& des tems* t, T, *& de la raiſon* S, s, *qui eſt la réciproque des eſpaces.*

DEMONSTRATION.

Par la Propoſition X (*N.* 34.) Nous avons q, Q :: msT, MSt; donc $qMSt = QmsT$, & par conſéquent m, M :: qSt, QsT; or la raiſon qSt, QsT, eſt compoſée de trois raiſons, ſçavoir des deux q, Q, & t, T, qui ſont les raiſons directes des quantités de mouvement & des tems, & de la raiſon S, s, qui eſt la réciproque des eſpaces. Donc les maſſes m, M, ſont entr'elles en raiſon compoſée, &c.

COROLLAIRE I.

45. Si l'on ſuppoſe $m = M$, on aura $qSt = QsT$; donc q, Q :: sT, St, c'eſt-à-dire, *en ſuppoſant les maſſes égales, les quantitez de mouvement ſont entr'elles en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces & de la raiſon réciproque des tems.*

De ce que $qSt = QsT$, on a s, S :: qt, QT, c'eſt-à-dire, *les maſſes étant égales, les eſpaces ſont en raiſon compoſée des tems & des quantitez de mouvement.*

De même, de ce que $qSt = QsT$, on a t, T :: Qs, qS, c'eſt-à-dire, *les maſſes étant égales, les tems ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces, & de la réciproque des quantités de mouvement.*

COROLLAIRE II.

46. Si l'on ſuppoſe $m = M$ & $t = T$, il eſt viſible qu'on aura $qS = Qs$, d'où l'on tire q, Q :: s, S, c'eſt-à-dire, *les maſſes étant égales, & les tems auſſi, les quantités de mouvement ſont entr'elles comme les eſpaces.*

PROPOSITION XIII.

47. *Dans le mouvement uniforme les tems* t, T, *employez par les Corps* A, B, *à parcourir leurs eſpaces, ſont en raiſon compoſée de trois*

raisons, dont les deux premieres sont les raisons directes m, M, *des masses,* & s, S, *des espaces,* & *la troisieme est la raison* Q, q, *qui est la reciproque des quantitez de mouvement.*

DEMONSTRATION.

Par la Proposition X. (*N* 34.) Nous avons q, Q :: msT, MSt, donc qMSt=QmsT, & par conséquent t, T :: Qms, qMS ; or la raison Qms, qMS est composée de trois raisons, sçavoir des deux m, M, & s, S, qui sont les raisons directes des masses, & des espaces, & de la raison Q, q, qui est la réciproque des quantités de mouvement; donc les tems t, T, sont entr'eux en raison composée, &c.

COROLLAIRE.

48. Si l'on suppose t=T, on aura Qms=qMS; donc q, Q :: ms, MS, c'est-à-dire, *les tems étant égaux, les quantitez de mouvement sont en raison composée des masses & des espaces.*

De ce que Qms=qMS, on a aussi m, M :: qS, Qs, c'est-à-dire, *les tems étant égaux, les masses sont en raison composée de la raison directe des quantitez de mouvement, & de la raison réciproque des espaces.*

De même, de ce que Qms=qMS, on a encore s, S :: qM, Qm, c'est-à-dire, *les tems étant égaux, les espaces sont en raison composée de la raison directe des quantitez de mouvement, & de la raison reciproque des masses.*

CHAPITRE III.

Du Mouvement uniformement acceleré, & du Mouvement uniformement retardé.

49. NOus avons déja dit (*N.* 11.) que le mouvement uniformement acceleré ou retardé d'un corps, est celui dont la vitesse reçoit dans des tems égaux des accroissemens égaux, ou des diminutions égales. Or delà il suit que les vitesses du mouvement uniformement acceleré sont entr'elles comme les tems pendant lesquels elles ont été acquises. Supposons, par exemple, que le Corps A à la fin de la premiere minute ait acquis un dégré de vitesse, à la fin de la seconde minute il aura

acquis un autre dégré de viteſſe, à la fin de la troiſiéme il en aura acquis un autre, & ainſi de ſuite. Donc la viteſſe acquiſe à la fin de deux minutes ſera double de la viteſſe acquiſe à la fin d'une minute, la viteſſe acquiſe à la fin de trois minutes ſera triple de la viteſſe acquiſe à la fin de la premiere, & ainſi des autres; & par conſéquent les viteſſes acquiſes à la fin des tems, ſeront entr'elles comme les tems.

AXIOMES.

50. *Si un Corps eſt en repos, il ne ſe mouvra jamais à moins que quelque cauſe ne le porte au mouvement, & s'il eſt en mouvement, il ſe mouvra toujours avec la même viteſſe & ſelon la même direction, à moins que quelque cauſe ne change ſon état.* Le Corps étant incapable de choix & de détermination, ne peut ſe donner à lui-même un état différent; ainſi s'il paſſe du repos au mouvement, ſi ſa viteſſe change, s'il prend une autre direction, &c. il faut qu'il y ait une cauſe qui produiſe ces effets.

Delà, il ſuit 1°. que ſi un Corps ſe meut en conſéquence d'une premiere impreſſion, il ſe mouvra toujours en ligne droite. 2°. Que ſi ſon mouvement eſt en ligne courbe, il y a deux forces qui le meuvent, l'une qui lui donne une direction en ligne droite, & l'autre qui lui fait changer de direction à chaque inſtant.

51. *Si les efforts de deux Corps* A, B, *ſont oppoſez & égaux, les deux Corps reſteront en repos l'un auprès de l'autre;* il n'y a point de raiſon pour pouvoir dire que l'un dût entraîner l'autre.

52. *Si un Corps qui eſt déja en mouvement vient à être pouſſé ſelon la même direction, ſon mouvement s'accelere, & s'il eſt pouſſé par une force reſiſtante, ſon mouvement ſe retarde, ou ceſſe, ou prend une direction oppoſée, ſelon que la force reſiſtante eſt moindre, égale, ou plus grande que la force du Corps.*

PRINCIPES

FONDE'S SUR L'EXPERIENCE.

53. *La peſanteur d'un Corps eſt toujours la même à quelque diſtance que ce Corps ſe trouve de la ſurface de la terre, pourvû que cette diſtance ne ſoit pas extremement grande.*

Comme ce principe n'eſt fondé que ſur l'Experience, & qu'il n'eſt pas poſſible de faire des experiences trop éloignées de la ſurface de la Terre, c'eſt avec raiſon qu'on ſe borne à dire que la

la diſtance du corps à la ſurface de terre, ne doit pas être trop grande.

54. *Les Corps graves tendent vers le centre de la Terre avec un mouvement acceleré.*

PROPOSITION XIV.

55. *Dans le mouvement uniformement acceleré, les eſpaces parcourus par un Corps A, ſont entr'eux comme les quarrez des tems qu'il a employés à les parcourir, en comptant ces eſpaces depuis l'origine du mouvement.*

DEMONSTRATION

Par la Methode des Indiviſibles.

Suppoſons que la droite AF (*Fig.* 7.) repréſente le tems pendant lequel un Corps ſe meut d'un mouvement acceleré; que cette droite ſoit coupée en une infinité de petites parties égales entr'elles & infiniment petites AB, BC, CD, &c. leſquelles repreſenteront les inſtans égaux dans leſquels on conçoit que le tems peut être diviſé; que ſur les points de diviſion ſoient elevées des perpendiculaires BG, CH, qui ſoient entr'elles comme les viteſſes acquiſes dans les tems AB, AC, AD, &c. Cela poſé, les viteſſes dans le mouvement accéleré étant entr'elles comme les tems (*N.* 49.) on aura AB, AC :: BG, CH, de même AC, AD :: CH, DI, & ainſi de ſuite. Donc ſi l'on fait paſſer une ligne par les points A, G, H, I, M, cette ligne ſera droite, & les figures ABG, ACH, ADI, &c. ſeront des triangles rectangles ſemblables, & la figure AFM ſera un triangle rectangle dont les droites BG, CH, DI, &c. ſeront les Elemens. Maintenant les petites lignes AB, BC, CD, &c. repreſentant des inſtans de tems qu'on peut conſidérer comme indiviſibles, les viteſſes pendant chacun de ces inſtans peuvent être conſiderées comme des viteſſes uniformes chacune dans la durée de ſon inſtant. Or dans le mouvement uniforme les eſpaces parcourus dans des tems égaux ſont comme les viteſſes; donc ſi l'on ſuppoſe que l'eſpace parcouru dans le premier inſtant AB, avec la viteſſe repreſentée par BG ſoit égal à BG, l'eſpace parcouru dans le ſecond tems BC avec la viteſſe CH ſera égal à CH, & ainſi des autres; donc les eſpaces parcourus pendant les inſtans AB, BC, CD, &c. qui compoſent le tems total AF ſeront égaux aux droites BG, CH, DI, &c. c'eſt-à-dire, à la ſomme des Elemens du triangle

C

AFM, & par conſéquent au triangle AFM. Par la même raiſon, les eſpaces parcourus pendant les inſtans qui compoſent le tems AD, feront égaux aux Elemens du triangle ADI, & par conſéquent au triangle ADI. Mais la ſomme des eſpaces parcourus pendant les inſtans du tems AF, eſt égale à l'eſpace parcouru pendant le tems AF, & la ſomme des eſpaces parcourus pendant les inſtans du tems AD, eſt égale à l'eſpace parcouru pendant le tems AD; donc l'eſpace parcouru pendant le tems AF eſt à l'eſpace parcouru pendant le tems AD, comme le triangle AFM eſt au triangle ADI. Mais les triangles AFM, ADI étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrez de leurs hauteurs AF, AD, qui repreſentent les tems; donc les eſpaces parcourus pendant les tems AF, AD, ſont entr'eux comme les quarrez des tems AF, AD.

AUTRE DEMONSTRATION
Par la Methode du Calcul Differentiel & Integral.

Que la droite AB (*Fig.* 8.) repreſente le tems pendant lequel un Corps ſe meut d'un mouvement uniformement acceleré, & la droite AP une partie de ce tems, ſi la perpendiculaire PM repreſente la viteſſe acquiſe à la fin du tems AP, menant de A par AM la droite AC, & élevant au point B la perpendiculaire BC, cette droite BC repreſentera la viteſſe acquiſe à la fin du tems AB, comme on a vû dans la Démonſtration précédente, & menant une autre perpendiculaire *pm* infiniment proche de PM, la droite P*p* repreſentera une partie infiniment petite de tems ou un inſtant, & la droite *pm* repreſentera la viteſſe acquiſe à la fin de cet inſtant. Mais les viteſſes PM, *pm*, ne différant entr'elles que d'une grandeur infiniment petite R*m*, peuvent paſſer pour égales; donc la viteſſe du tems P*p* peut paſſer pour uniforme. Mais dans le mouvement uniforme les eſpaces parcourus ſont comme les tems multipliés par les viteſſes (*N.* 17.) Multipliant donc P*p* par *pm* ou *p*R, le rectangle P*p*RM, ou le trapezoïde P*pm*M repreſentera l'eſpace parcouru dans l'inſtant P*p*. Or ſi l'on diviſe le tems AP en une infinité d'inſtans égaux à P*p*, & que des points de diviſion on mene des paralleles à PM, on aura une infinité de petits rectangles ou trapezoïdes qui repreſenteront les eſpaces parcourus dans chacun de ces inſtans. Donc les eſpaces parcourus pendant les inſtans qui compoſent AP, ou ce qui eſt la même choſe, l'eſpace parcouru pendant le tems AP,

ſera repreſenté par le triangle APM, & par la même raiſon l'eſpace parcouru pendant le tems AB ſera repreſenté par le triangle ABC ; ainſi les eſpaces ſeront comme les triangles, & par conſéquent en raiſon doublée des tems AP, AB.

REMARQUE.

56. On voit par ces deux Démonſtrations que la Méthode des Indiviſibles, & celle du Calcul Différentiel & Intégral, ne different qu'en ce que dans la premiere on prend des lignes infiniment proches pour les Elemens d'une ſurface, & que dans l'autre les Elemens de cette ſurface ſont des rectangles ou des trapezoïdes dont la hauteur eſt infiniment petite, mais cette différence eſt plutôt dans les mots que dans la choſe même. Car comme il n'eſt pas néceſſaire pour la Méthode des Indiviſibles que les lignes n'ayent abſolument aucune largeur, mais qu'il ſuffit de pouvoir les conſiderer comme n'en ayant point, rien n'empêche de leur attribuer une largeur infiniment petite, & de les conſiderer par conſéquent comme des rectangles ou des trapezoïdes d'égale hauteur. On a donc tort de ſe récrier contre cette Méthode.

COROLLAIRE I.

57. *Dans le mouvement uniformement acceleré, les eſpaces parcourus par le Corps ſont entr'eux comme les quarrez des viteſſes acquiſes à la fin des tems.* Car les viteſſes ſont comme les tems. (*N.* 49.)

COROLLAIRE II.

58. *Dans le mouvement uniformement acceleré, les tems ſont comme les racines des eſpaces, & il faut dire la même choſe des viteſſes.*

COROLLAIRE III.

59. *Dans le mouvement uniformement acceleré, les eſpaces parcourus par un Corps dans des tems égaux & ſucceſſifs, croiſſent dans la raiſon des nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, &c. Suppoſons que le Corps ſoit en mouvement pendant ſix minutes, l'eſpace parcouru dans la premiere minute ſera à l'eſpace parcouru dans deux minutes comme 1 à 4, il ſera à l'eſpace parcouru dans trois minutes, comme 1 à 9, & ainſi de ſuite ; c'eſt-à-dire, que les tems étant comme 1, 2, 3, 4, &c. les eſpaces parcourus ſeront comme les quarrez 1, 4, 9, 16, &c. (*N.* 55.) Or ſi de l'eſpace 4 parcouru dans les deux premieres minutes, on ôte l'eſpace 1 parcouru dans

la premiere minute, le reste 3 sera l'espace parcouru dans la seconde minute; de même, si de l'espace 9 parcouru dans les trois premieres minutes on retranche l'espace 4 parcouru dans les deux premieres, le reste 5 sera l'espace parcouru dans la troisiéme minute, & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus dans chaque minute ou dans des tems égaux, augmentent dans la raison des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c.

PROPOSITION. XV.

60. *Les Corps pesans qui ne sont pas à une distance trop grande de la surface de la terre, descendent vers le centre de la terre avec un mouvement uniformement acceleré.*

DEMONSTRATION.

Par l'experience, les Corps pesans tendent vers le centre de la terre avec un mouvement acceleré (*N.* 54.) & cette acceleration ne peut provenir que de ce que leur pesanteur les pousse à chaque moment; car si leur pesanteur ne leur donnoit qu'une premiere impression, il n'y auroit pas de raison pour pouvoir dire que leur mouvement fut acceleré. Or la pesanteur des Corps graves est la même par-tout, pourvû que leur distance de la surface de la terre ne soit pas trop grande, donc l'impression qu'elle fait à chaque instant est toûjours la même, & par conséquent si au premier instant le Corps reçoit un dégré de vitesse, dans le second moment il en reçoit encore un, dans le troisiéme, il en reçoit une autre, & ainsi de suite. Mais quand les accroissemens de vitesse sont égaux dans des tems égaux, le mouvement est uniformement acceleré; donc le mouvement d'un Corps qui descend vers le centre de la terre, est uniformement acceleré.

COROLLAIRE.

61. Donc les espaces parcourus par un Corps grave qui descend vers le centre de la terre à compter ces espaces toujours depuis le commencement du mouvement, sont entr'eux comme les quarrez des tems employés à les parcourir, ou comme les quarrez des vitesses acquises à la fin des tems, & les tems où les vitesses sont comme les racines quarrées des espaces.

REMARQUE.

62. Il faut observer que dans tout ce que nous venons de dire

nous supposons qu'il n'y ait aucune resistance qui empêche la descente libre des corps graves, de quelque cause que puisse provenir cette resistance.

PROPOSITION XVI.

63 *Si un corps grave se meut vers le centre de la Terre pendant un tems déterminé l'espace parcouru à la fin de ce tems est soudouble de l'espace qu'il auroit parcouru à la fin du même tems s'il s'étoit mû d'un mouvement uniforme, & avec une vitesse égale à celle qu'il a acquise à la fin du tems.*

DEMONSTRATION.

Supposons que la droite AB (*Fig.* 9.) représente le tems pendant lequel un corps se meut d'un mouvement uniformément acceleré, & que la droite BC représente la vitesse acquise à la fin de ce tems, le triangle ABC représentera l'espace parcouru (*N.* 55); or si le mouvement étoit uniforme, & que la vitesse fût égale à BC, l'espace parcouru pendant le tems AB seroit représenté par le rectangle ABCD, c'est-à-dire par le produit du tems AB multiplié par la vitesse BC (*N.* 17), & le triangle ABC est soudouble du rectangle ABCD; dont l'espace parcouru dans le mouvement uniformement acceleré est à l'espace qui seroit parcouru dans le mouvement uniforme comme 1 à 2, & par conséquent soudouble.

COROLLAIRE.

64. Donc l'espace parcouru dans le mouvement uniforme avec la vitesse BC pendant la moitié du tems AB est égal à l'espace parcouru dans le mouvement uniformement acceleré pendant le tems AB.

PROPOSITION XVII.

65. *Connoissant l'espace qu'un corps grave parcourt d'un mouvement uniformement acceleré pendant un tems déterminé, trouver l'espace que ce même corps parcourroit dans un autre tems déterminé, en supposant que le mouvement dût commencer au commencement de l'un & de l'autre tems.*

SOLUTION.

Dans le mouvement uniformement acceleré, les quarrés des

tems ſont entr'eux comme les eſpaces parcourus pendant ce tems, à compter ces eſpaces depuis le commencement du mouvement. Si l'on prend donc un quatriéme proportionnel aux quarrés des deux tems donnés, & à l'eſpace donné, ce quatriéme proportionnel ſera l'eſpace cherché.

Suppoſons par exemple, qu'un corps A pendant une minute parcoure un eſpace de trois pieds, & qu'on demande quel eſpace il devroit parcourir dans trois minutes; je fais les quarrés des deux tems, c'eſt-à-dire, d'une minute & de trois, & ces quarrés ſont 1 & 9, enſuite je dis 1 eſt à 9, comme l'eſpace 3 pieds eſt à un quatriéme terme, lequel ſe trouve 27, & par conſéquent 27 pieds eſt l'eſpace que ce corps parcourroit dans trois minutes ſi ſon mouvement commençoit à la premiere minute.

PROPOSITION XVIII.

66. *Connoiſſant l'eſpace qu'un corps parcourt pendant un tems déterminé; connoître l'eſpace qu'il doit parcourir pendant un autre tems déterminé, en ſuppoſant que ce ſecond tems ſuit immédiatement le premier, & que le mouvement du corps dans ce ſecond tems eſt une continuation du mouvement du premier tems.*

SOLUTION.

Ajoutez le premier tems au ſecond, & dès-lors il eſt viſible que le quarré du premier tems eſt au quarré de la ſomme du premier, & du ſecond, comme l'eſpace parcouru dans le premier tems eſt à l'eſpace parcouru dans le premier, & le ſecond joints enſemble. Prenant donc un quatriéme proportionnel au quarré du premier tems, au quarré de la ſomme du premier & du ſecond, & au premier eſpace, ce quatriéme proportionnel ſera l'eſpace parcouru pendant le premier & le ſecond tems; ainſi retranchant de ce quatriéme proportionnel l'eſpace parcouru dans le premier tems, le reſte ſera l'eſpace parcouru dans le ſecond.

Suppoſons que dans la premiere minute un corps grave A parcoure 3 pieds, & qu'on veuille ſavoir quel eſt l'eſpace qu'il parcourra dans les trois minutes ſuivantes, j'ajoute le premier tems 1 au ſecond tems 3, & la ſomme eſt 4; je fais le quarré du premier tems 1, & de la ſomme 4, ce qui fait 1 & 16; & je dis 1 eſt à 16, comme l'eſpace 3 eſt à un quatriéme terme

qui se trouve être 48 ; ainsi 48 est l'espace parcouru pendant le premier & le second tems. Je retranche de cet espace l'espace 3 parcouru dans le premier tems, & le reste 45 est l'espace que le corps devroit parcourir pendant les trois minutes qui suivroient la premiere.

PROPOSITION XIX.

67. *Connoissant un premier tems pendant lequel un corps grave parcourt d'un mouvement uniformement acceleré un espace déterminé, connoître le tems pendant lequel il parcourroit un autre espace déterminé, en supposant que ce second tems & ce second espace doivent se compter depuis le commencement du mouvement.*

SOLUTION.

Puisque dans le mouvement uniformement acceleré les espaces sont entr'eux comme les quarrés des tems, il n'y a qu'à prendre un quatriéme proportionnel aux deux espaces donnés, & au quarré du premier tems, & ce quatriéme proportionnel sera le quarré du tems demandé; donc sa racine quarrée resoudra le Probleme.

Supposons qu'un corps A dans deux minutes parcoure un espace de 4 pieds, & qu'on demande dans combien de tems il auroit parcouru 25 pieds. Je fais le quarré du tems donné 2, lequel est 4, & je dis, comme l'espace quatre pieds est à l'espace 25, ainsi le quarré 4 est à un quatriéme terme lequel est 25, donc 25 est le quarré du tems qu'on demande; tirant donc la racine quarrée 5, le corps A auroit employé cinq minutes à parcourir 25 pieds dupuis le commencement du mouvement.

PROPOSITION XX.

68. *Connoissant un premier tems pendant lequel un corps grave parcourt d'un mouvement uniformement acceleré un espace déterminé, connoître dans quel tems le même corps parcourroit un autre espace déterminé, en supposant que ce second tems dût commencer immediatement après le premier, & que le mouvement du corps fût une suite du premier mouvement.*

SOLUTION.

Ajoutez le premier espace au second, & dès-lors il est visible que le premier espace est à la somme du premier & du second,

comme le quarré du premier tems eſt au quarré de la ſomme du premier & du ſecond tems ; donc la quatriéme proportionnelle qu'on prendra au premier eſpace, a la ſomme des deux eſpaces, & au quarré du premier tems ſera le quarré de la ſomme du premier & du ſecond tems. Tirant donc la racine quarrée, on aura la ſomme des deux tems, & retranchant de cette ſomme le premier tems, le reſte ſera le tems demandé.

Suppoſons que dans deux minutes le corps A parcoure 4 pieds, & qu'on demande dans combien de tems il devroit parcourir encore 21 pieds ſi ſon mouvement continuoit. Je fais le quarré 4 du tems donné 2, j'ajoute enſemble les eſpaces 4 & 21, ce qui fait 25, & je dis l'eſpace 4 eſt à la ſomme 25 des deux eſpaces comme le quarré 4 du premier tems eſt à un quatriéme terme 25, lequel eſt le quarré de la ſomme des deux tems ; donc la racine quarrée 5 eſt la ſomme des deux tems, & par conſéquent retranchant de 5 le premier tems 2, le reſte 3 me fait voir que le corps auroit employé trois minutes pour parcourir encore 21 pieds.

PROPOSITION XXI.

69. *Connoiſſant le tems pendant lequel un corps grave a parcouru d'un mouvement acceleré un eſpace déterminé, connoître les eſpaces parcourus dans chacune des parties du tems en ſuppoſant que le tems eſt diviſé en parties égales.*

PREMIERE SOLUTION.

Lorſque le tems eſt diviſé en parties égales, les eſpaces parcourus dans chacune de ſes parties ſont entr'eux comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9, &c. (*N.* 59) ; ſuppoſant donc que le corps A ait parcouru 48 pieds dans 4 minutes, il eſt viſible qu'il faut partager 48 en 4 parties, qui ſoient entr'elles comme les nombres 1, 3, 5, 7 ; or pour cela je fais la ſomme 16 des nombres 1, 3, 5, 7, & je dis comme la ſomme 16 eſt à la premiere partie 1 qui la compoſe, ainſi la ſomme 48 eſt à un quatriéme terme 3, qui eſt l'eſpace parcouru dans la premiere minute ; je dis de même comme la ſomme 16 eſt à ſa ſeconde partie 3, ainſi la ſomme 48 eſt à un quatriéme terme 9, qui eſt l'eſpace parcouru dans la ſeconde minute ; & continuant le même raiſonnement, je trouve que l'eſpace parcouru dans la troiſiéme minute eſt 15, & l'eſpace parcouru dans le quatriéme eſt 21 ; donc l'eſpace parcouru

parcouru dans la premiere minute est 3, l'espace parcouru dans les deux premieres est 12, l'espace parcouru dans les trois premieres est 27, & l'espace parcouru dans les quatre minutes est 48.

AUTRE SOLUTION.

Je nomme l'espace inconnu parcouru dans la premiere minute $= x$, la premiere minute $= 1$, le tems total $= t$, & l'espace parcouru pendant ce tems $= a$; puisque les quarrés des tems sont comme les espaces parcourus, en comptant ces espaces depuis le commencement du mouvement, j'ai $t^2, 1 :: a, x$, donc $a = t^2 x$, & par conséquent $x = \frac{a}{t^2}$, ainsi l'espace parcouru dans la premiere minute est connu; or les espaces parcourus dans des tems égaux & successifs sont entr'eux comme 1, 3, 5, 7, &c. donc ces espaces sont $x, 3x, 5x, 7x$, &c. & mettant au lieu de x sa valeur $\frac{a}{t^2}$ ces espaces sont $\frac{a}{t^2}, \frac{3a}{t^2}, \frac{5a}{t^2}, \frac{7a}{t^2}$, &c.

Soit $t = 4$ minutes, & $a = 48$ pieds, on aura $x = \frac{a}{t^2} = \frac{48}{16} = 3$ pour l'espace parcouru dans la premiere minute; $\frac{3a}{t^2} = \frac{3 \times 48}{16} = 9$ pour l'espace parcouru pendant la seconde minute; $\frac{5a}{t^2} = \frac{5 \times 48}{16} = 15$ pour l'espace parcouru pendant la troisiéme minute, & ainsi de suite.

PROPOSITION XXII.

70. *Connoissant le tems du mouvement d'un corps grave & l'espace parcouru pendant une partie de ce tems, laquelle n'est pas au commencement du tems, trouver les espaces parcourus dans toutes les parties de ce tems.*

PREMIERE SOLUTION.

Supposons que le tems total soit 4 minutes, & que le corps A pendant la troisiéme & quatriéme minute ait parcouru 36 pieds; Je dis si le corps A avoit parcouru 1 pied dans la premiere minute, dans la seconde il en auroit parcouru 3, dans la troisiéme il en auroit parcouru 5, & dans la quatriéme il en auroit parcouru 7, ainsi dans la troisiéme & la quatriéme il en auroit par-

couru 12; mais il en a parcouru 36 au lieu de 12, donc la supposition est fausse. Or quel que soit l'espace parcouru dans la premiere minute, il est sûr que la somme 36 des espaces parcourus dans la troisiéme & la quatriéme doit être à l'espace parcouru dans la premiere, comme la somme 12 des espaces parcourus dans la troisiéme & quatriéme minute, selon ma supposition, est à l'espace parcouru dans la premiere; je dis donc comme 12 est à 1, ainsi 36 est à un quatriéme terme 3 qui est l'espace parcouru pendant la premiere minute.

Cet espace étant trouvé, je dis en supposant que l'espace parcouru dans la premiere minute soit 1 pied, l'espace parcouru dans la seconde doit être 3, donc en supposant que l'espace parcouru dans la premiere minute soit 3, cet espace doit être à celui qui est parcouru dans la seconde minute comme 1 à 3, & par conséquent le 2e. espace doit être 9, & continuant le même raisonnement, je trouve que l'espace parcouru dans la troisiéme minute doit être 15, & l'espace parcouru dans la quatriéme doit être 21.

SECONDE SOLUTION.

Je nomme l'espace parcouru dans la premiere minute $=x$; & l'espace donné $=a=36$, & je suppose que cet espace soit parcouru pendant la troisiéme & quatriéme minute, l'espace parcouru dans la seconde minute sera donc $=3x$, celui qui est parcouru dans la troisiéme sera $5x$, & celui qui est parcouru dans la quatriéme sera $7x$, donc l'espace parcouru dans la troisiéme & quatriéme sera $5x+7x=12x$, or cet espace est $=a$, donc $12x=a$, donc $x=\frac{a}{12}=\frac{36}{12}=3$, & par conséquent l'espace parcouru dans la premiere minute est 3, & mettant cette valeur de x dans $3x$, $5x$ & $7x$, nous aurons 9, 15 & 21 pour les espaces parcourus dans les minutes suivantes.

On peut resoudre de la même façon bien des questions de cette nature, ausquelles je ne m'arrête pas, pour laisser aux Commençans le plaisir d'en trouver la solution.

PROPOSITION XXIII.

71. *Supposons que la droite* AF (Fig. 10.) *représente la hauteur dont un corps grave descend vers le centre de la terre, que les droites* AC, AD, AB, AF, *représentent les espaces parcourus à la fin des*

tems, à compter ces espaces toujours depuis le commencement du mouvement, je dis que si aux points C, D, B, F, *on éleve des perpendiculaires* CE, DH, BG, FI, *qui soient entr'elles comme les vitesses acquises à la fin des tems, la courbe qui passera par les points* A, E, H, G, I, *sera une parabole.*

DEMONSTRATION.

Dans le mouvement uniformement acceleré, les vitesses acquises à la fin des tems sont entr'elles comme les tems, donc les droites CE, DH, BG, &c. qui représentent les vitesses, peuvent aussi représenter les tems, mais les espaces AC, AD, AB, sont entr'eux comme les quarrés des tems. Donc AC, AD :: $\overline{CE}^2$, $\overline{DH}^2$, & par conséquent la courbe AEHGI est une parabole, car on sçait que dans la parabole les abscisses sont comme les quarrés des ordonnées.

72. La courbe AEHGI s'appelle la *Courbe* des tems ou la *Courbe* des vitesses.

PROPOSITION XXIV.

73. *Si un corps est mû d'un mouvement uniformement retardé; les espaces parcourus dans des tems égaux sont entr'eux comme les nombres impairs* 1, 3, 5, 7, *&c. pris en retrogradant.*

Premiere démonstration par la méthode des indivisibles.

Supposons que la droite AB (*Fig.* 11.) représente le tems du mouvement, & que ce tems soit partagé en une infinité d'instans AD, DE, EF, &c. soient à tous les points de division élevées des perpendiculaires qui représentent les vitesses de chaque instant, il est sûr que si la droite AC représente la vitesse au premier instant, & que les autres vitesses fussent égales à celle-ci, toutes ces vitesses seroient les élemens du rectangle ACBG; or le mouvement étant supposé uniformement retardé, la vitesse AC perd à la fin de l'instant AD un degré, à la fin de l'instant DE elle en perd un autre, & ainsi de suite, & par conséquent les vitesses perdues à la fin des tems AD, AE, AF, AB, sont entr'elles comme les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. c'est-à-dire, comme les élemens du triangle CBG, moitié du rectangle ACGB, donc les vitesses restantes sont entr'elles comme les élemens de l'autre triangle ACB.

Maintenant les inſtans AD, DE, EF, &c. pouvant être regardés comme indiviſibles, les viteſſes peuvent auſſi être regardées comme uniformes chacune dans la durée de ſon inſtant; or dans le mouvement uniforme les eſpaces parcourus ſont comme les viteſſes; donc ſi la droite AC qui repréſente la viteſſe du premier inſtant vient à repréſenter l'eſpace parcouru dans ce premier inſtant, les droites DL, EI, &c. qui repréſentent les viteſſes des inſtans ſuivans, repréſentent auſſi les eſpaces parcourus dans ces inſtans; donc les eſpaces parcourus dans la ſomme des inſtans du tems AB ſeront repréſentés par les élemens du triangle ABC, c'eſt-à-dire par le triangle ABC, les eſpaces parcourus par la ſomme des inſtans du tems AE ſeront repréſentés par la ſomme des élemens du trapezoïde AEIC, & ainſi des autres.

Suppoſant donc que le tems AB ſoit $=4$ minutes, & partageant ce tems en quatre parties égales, chaque partie repréſentera une minute, & l'eſpace ADLC repréſentera l'eſpace parcouru dans la premiere minute, le trapezoïde DEIL repreſentera l'eſpace parcouru dans la ſeconde, & ainſi de ſuite: or ſuppoſant $AC=4$ pieds, il eſt évident que $DL=3$, $EI=2$, & $FH=1$; nommant donc x la hauteur de chaque trapezoïde & du triangle FHB, nous aurons $ADLC=\overline{4+3}\times\frac{1}{2}x$; $DEIL=\overline{3+2}\times\frac{1}{2}x$; $EFHI=\overline{2+1}\times\frac{1}{2}x$; enfin $FBH=1\times\frac{1}{2}x$: or ces trapezoïdes & le triangle FBH ayant tous la hauteur commune, ils ſont entr'eux comme leur autre dimenſion, donc ils ſont comme $\overline{4+3}$, $\overline{3+2}$, $\overline{2+1}$ & 1, c'eſt-à-dire, comme 7, 5, 3, 1, & par conſéquent les eſpaces parcourus dans des tems égaux & ſucceſſifs, ſont entr'eux comme les nombres impairs pris en retrogradant.

Autre démonſtration, par la méthode des nouveaux calculs.

Que AB (*Fig.* 12.) repréſente le tems du mouvement, AP une partie de ce tems, & AC la viteſſe au commencement du tems, tirant la droite BC, & PM parallele à AC, on démontrera comme ci-devant que PM ſera la viteſſe a la fin du tems AP. Menons *pm* infiniment proche de PM, la droite P*p* repréſentera un inſtant de tems, & la droite *pm* repréſentera la viteſſe à la fin de cet inſtant; or la viteſſe PM & la viteſſe *pm* ne différant que d'un infiniment petit MR, peuvent être regardées comme égales; donc

la viteſſe de l'inſtant Pp peut être regardée comme uniforme, mais dans le mouvement uniforme les eſpaces parcourus ſont comme les tems multipliés par les viteſſes (*N.* 17), donc l'eſpace parcouru dans le tems Pp eſt comme $Pp \times pm$, ou comme le rectangle PRmp, ou comme le trapezoïde, PMmp qui ne differe du rectangle que d'un infiniment petit.

Concevant donc que le tems AB ſoit diviſé en une infinité d'inſtans égaux à Pp, & par les points de diviſion menant des paralleles à AC, le triangle ABC ſera rempli d'une infinité de trapezoïdes qui repréſenteront les eſpaces parcourus dans ces inſtans ; ainſi les eſpaces parcourus dans le tems AB ſeront repréſentés par le triangle ABC, les eſpaces parcourus pendant les inſtans qui compoſent le tems AP ſeront repréſentés par le trapezoïde APMC, & ainſi des autres.

Le reſte de la demonſtration s'achevera de même que dans la démonſtration précedente.

COROLLAIRE.

74. *L'eſpace qu'un corps parcourt avec un mouvement uniformement retardé dans un tems déterminé, eſt la moitié de l'eſpace qu'il parcourroit dans le même tems avec un mouvement uniforme, & avec une viteſſe égale à celle du premier inſtant.* Soit AB le tems (*Fig.* 11), & AC la viteſſe du premier inſtant, le triangle ABC repréſente l'eſpace parcouru avec un mouvement uniformement retardé, & le rectangle ACGB repréſente l'eſpace que le corps parcourroit avec un mouvement uniforme, & avec la viteſſe AC, mais le triangle ABC eſt la moitié du rectangle ; donc, &c.

REMARQUE.

75. Galilée eſt le premier qui ait trouvé que les corps graves deſcendent vers le centre de la terre avec un mouvement uniformement acceleré ; mais comme ſes principes ſont fondés ſur des expériences qu'on ne peut faire qu'à une diſtance de la ſurface de la terre qui ne ſoit pas trop grande, il eſt ſûr que ſa loi d'acceleration ne ſauroit être certaine qu'à l'égard des ſimples Méchaniques où nous ne conſiderons que les mouvemens qui ſe paſſent autour de nous ; & que lorſqu'il s'agit d'une diſtance trop grande, comme dans l'Aſtronomie, il faut établir d'autres loix fondées ſur d'autres principes qui s'accordent avec les Phe-

nomenes qu'on veut expliquer. C'eſt ce qui a été pratiqué par M. Newton & par la plûpart des Aſtronomes modernes, on peut lire là-deſſus leurs Ouvrages, & ſurtout l'excellent Traité de M. de Gamaches intitulé *Aſtronomie Phyſique*, &c. Cet illuſtre Académicien y traite les matieres les plus abſtraites avec tant de clarté, d'ordre & de ſimplicité, qu'on ne doit point être ſurpris ſi tous les Savans lui ont donné un ſuffrage unanime. Je ne m'arrêterai point à rapporter les loix d'acceleration établies par les Aſtronomes, de peur de m'écarter de mon ſujet, & je me contenterai de faire voir comment on peut reſoudre certains Problemes généraux en établiſſant telle loi d'acceleration qu'on jugera à propos.

PROPOSITION XXV.

76. *Connoiſſant les tems pendant leſquels un corps ſe meut d'un mouvement acceleré, & le rapport que les viteſſes acquiſes à la fin de ces tems ont avec ces mêmes tems, connoître les eſpaces parcourus.*

SOLUTION.

Suppoſons que la droite AB (*Fig.* 13.) repréſente le tems total du mouvement d'un corps, que AP repréſente une partie de ce tems, que BC repréſente la viteſſe acquiſe à la fin du tems AB, & PM la viteſſe acquiſe à la fin du tems AP, en ſorte que la courbe AMC ſoit la courbe des viteſſes. Il eſt ſûr que ſi l'on diviſe le tems AB en une infinité de petites parties égales ou d'inſtans, & que des points de diviſion on mene des paralleles à BC, ces paralleles repréſenteront les viteſſes acquiſes à la fin de chacun de ces inſtans; or chacun de ces inſtans, par exemple, l'inſtant Pp pouvant être regardé comme indiviſible, la viteſſe PM & la viteſſe pm ne différeront que d'un infiniment petit mR & pourront être cenſées égales, donc la viteſſe de l'inſtant Pp peut être regardée comme uniforme pendant la durée de l'inſtant Pp; mais dans le mouvement uniforme les eſpaces ſont comme le produit des viteſſes par les tems, donc l'eſpace parcouru pendant le tems Pp eſt comme Pp×PM, ou comme le rectangle PMRp, ou comme le trapezoïde PMmp; or l'eſpace ABC étant rempli de pareils trapezoïdes qui repréſentent les eſpaces parcourus pendant les inſtans qui compoſent le tems AB, il eſt évident que cet eſpace ABC repréſente l'eſpace parcouru pendant le tems AB, que l'eſpace APM repréſente l'eſpace parcouru pendant le

tems AP, & ainsi des autres ; d'où il suit que l'espace parcouru pendant le tems AP est à l'espace parcouru pendant le tems AB, comme APM est à ABC, &c. Cela posé,

Je nomme u la vitesse acquise à la fin du tems AP, V la vitesse acquise à la fin du tems AB, t le tems AP, & T le tems AB, donc $Pp = dt$, & PpRM, ou PpmM $= udt$; ainsi udt représente PpmM qui est la différence de l'espace APM.

Pour trouver l'integrale de cette différence, il n'y a qu'à exprimer la vitesse u par le rapport qu'elle a avec le tems selon la loi d'acceleration qu'on veut établir, & substituant la valeur de u dans udt, on trouvera une expression dont on pourra trouver l'integrale.

Soit par exemple $u = t$, comme dans l'hypothèse de Galilée où les vitesses acquises sont comme les tems. Donc $udt = tdt$, & tirant l'integrale, j'ai $\int udt = \frac{1}{2} tt$, c'est-à-dire l'espace APM est comme $\frac{1}{2} tt$ ou comme le quarré du tems AP; donc l'espace APM est à l'espace ABC, comme tt est à TT, ou bien à cause de $u = t$, & de V = T, on aura APM, ABC : : ut, VT, c'est-à-dire,

Dans l'hypothèse de Galilée l'espace parcouru pendant le tems AP *est à l'espace parcouru pendant le tems* AB, *comme le quarré* tt *du tems* AP *est au quarré* TT *du tems* AB, *ou en raison composée des vitesses* u, V, *& des tems* t, T.

De même soit $u = t^n$, c'est-à-dire que les vitesses soient entr'elles comme telle puissance ou telle racine des tems que l'on voudra, en supposant que l'exposant n représente un nombre quelconque entier ou rompu. Je mets cette valeur de u dans udt & j'ai $udt = t^n dt$ & tirant l'integrale, j'ai $\int udt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ pour l'espace APM ; donc l'espace ABC $= \frac{1}{n+1} T^{n+1}$, & l'espace APM est à l'espace ABC comme $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ est à $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, ou comme t^{n+1} est à T^{n+1}, & remettant au lieu de t^n & de T^n leurs valeurs u & V, nous aurons APM, ABC : : ut, VT, c'est-à-dire.

Si les vitesses sont entr'elles comme telle puissance ou telle racine qu'on voudra des tems, les espaces parcourus à la fin des tems sont en raison composée des vitesses & des tems.

L'on voit donc que quelque loi d'acceleration qu'on veuille

établir, les espaces sont en raison composée des vitesses & des tems.

COROLLAIRE I.

77. *Si les vitesses sont entr'elles comme telle puissance ou telle racine des tems que l'on voudra exprimée par* t^n, T^n, *il n'y aura qu'à augmenter l'exposant n d'une unité, & les espaces parcourus seront comme* t^{n+1} *a* T^{n+1}. Supposons par exemple, que les vitesses soient comme les quarrés des tems : si ces tems, à compter toujours depuis le commencement du mouvement, sont comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. les vitesses seront par conséquent comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. or les espaces étant en raison composée des tems & des vitesses, seront comme 1×1, 2×4, 3×9, 4×16, 5×25, &c. ou comme 1, 8, 27, 64, 125, &c. c'est-à-dire comme les cubes des tems, ou comme les quarrés des tems multipliés par leur premiere puissance; or les quarrés ont pour exposant le nombre 2 représenté par n, & les premieres puissances ont pour exposant 1, donc le produit des unes par les autres ont pour exposant $2+1$ ou $n+1$, & par conséquent les espaces sont comme t^{n+1}, T^{n+1}, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

78. Quelque loi d'acceleration qu'on veuille établir si l'on connoît l'espace parcouru dans un tems, on pourra toujours connoître l'espace parcouru dans un autre tems. Car supposant que les vitesses soient comme les quarrez des tems, & qu'un Corps ayant parcouru deux pieds dans la premiere minute, on veuille sçavoir quel espace il doit parcourir dans les trois premieres minutes. Je nomme t le premier tems qui est une minute, & par conséquent le second tems qui est trois minutes sera $3t$; donc les cubes des tems seront t^3, $27t^3$, ou comme 1 à 27, donc 1, 27 :: 2, 54; & par conséquent le corps parcourroit dans trois minutes cinquante-quatre pieds.

De même, si le corps ayant parcouru deux pieds dans la premiere minute, on demandoit l'espace parcouru dans la 3e. & quatriéme minute, j'ajouterois ces deux minutes aux deux qui les precedent, ce qui feroit quatre minutes. Je prendrois les cubes 1 & 64 des tems 1 minute, 4 minutes, puis je dirois 1, 64 :: 2, 128; & 128 marqueroit le nombre des pieds parcourus dans les

les quatre premieres minutes. Maintenant, comme il faut retrancher de ce nombre l'espace parcouru dans les deux premieres minutes, je fais les cubes 1 & 8 des deux tems, 1 minute, 2 minutes, & je dis 1, 8 :: 2, 16; ainsi 16 marque l'espace parcouru dans deux minutes; retranchant donc cet espace de l'espace parcouru dans les quatre premieres minutes, le reste 112 marqueroit l'espace parcouru dans la troisiéme & quatriéme minute. De même, si le Corps ayant parcouru depuis la fin de la seconde minute jusqu'à la fin de la troisiéme 38 pieds, on demandoit l'espace parcouru dans la premiere minute, je nommerois x l'espace parcouru dans les deux premieres minutes; & par conséquent $38 + x$ seroit l'espace parcouru dans les trois minutes. Or l'espace parcouru dans trois minutes étant à l'espace parcouru dans deux comme le cube 27 de trois minutes est au cube 8 de deux minutes, j'ai $27.\ 8 :: 38 + x,\ x$. Donc en divisant, j'ai $27 - 8,\ 8 :: 38 + x - x,\ x$, ou $19, 8 :: 38, x$; & par conséquent $x = 16$ est l'espace parcouru dans deux minutes. Ajoutant donc cet espace à l'espace 38 parcouru dans la troisiéme minute, j'ai 54 pour l'espace parcouru dans les trois premieres minutes. Or le cube 27 des trois premieres minutes est au cube 1 de la premiere minute comme l'espace 54 parcouru dans les trois premieres est à l'espace parcouru dans la premiere; donc 27, 1 :: 54, 2, & par conséquent deux pieds est l'espace parcouru dans la premiere minute, & ainsi des autres.

PROPOSITION XXVI.

79. *Un Corps étant mû d'un mouvement acceleré, & le rapport des vitesses aux espaces étant connu, connoître les tems.*

SOLUTION.

Supposons que les droites AP, AB (*Fig.* 13.) representent les tems inconnus t, T, que les droites PM, BC, representent les vitesses u, V, acquises à la fin de ces tems, & les espaces APM, ABC, les espaces parcourus s, S; je mene l'ordonnée pm infiniment proche de PM, & par conséquent $Pp = dt$, & $PMmp = ds$, à cause que ce trapezoïde est la différence de l'espace $APM = s$; or les vitesses PM, pm ne différant que d'un infiniment petit; la vitesse u de l'instant Pp peut être regardée comme uniforme, & par conséquent le petit espace ds est comme la vitesse u multipli-

pliée par dt, donc $udt=ds$, & $dt=\frac{ds}{u}$; donc $\int dt=\int\frac{ds}{u}$, c'eſt-à-dire l'integrale de la différence P*p* eſt comme l'integrale de la différence PM*mp* de l'eſpace s diviſée par la viteſſe PM.

Pour trouver cette integrale, je cherche le rapport que les viteſſes ont avec les eſpaces, ſelon la loi d'acceleration propoſée, & je trouve par là une valeur de u exprimée en s, & ſubſtituant cette valeur dans $\int\frac{ds}{u}$, je trouve une expreſſion où il n'y a plus que s, & dont on peut par conſéquent tirer l'integrale, ainſi qu'on va voir.

Soit $u=\sqrt{s}$, c'eſt-à-dire que les viteſſes ſoient comme les racines des eſpaces, ainſi que dans l'hypotèſe de Galilée; je mets cette valeur de u dans $\int dt=\int\frac{ds}{u}$, ce qui donne $\int dt=\int\frac{ds}{\sqrt{s}}=\int ds \times s^{-\frac{1}{2}}$; ainſi j'ai $t=2s^{\frac{1}{2}}$, donc $t, T :: 2s^{\frac{1}{2}}, 2S^{\frac{1}{2}}$, ou $t, T :: s^{\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{2}} :: \sqrt{s}, \sqrt{S}$, c'eſt-à-dire le tems AP eſt au tems AB comme la racine de l'eſpace s eſt à la racine de l'eſpace S. Donc.

Dans l'hypotèſe de Galilée les tems ſont entr'eux comme les racines quarrées des eſpaces. Ce qui eſt effectivement vrai, puiſque nous avons trouvé ci-deſſus que les eſpaces étoient comme les quarrés des tems.

Soit $u=s$, c'eſt-à-dire que les viteſſes ſoient entr'elles comme les eſpaces; je mets cette valeur dans $\int dt=\int\frac{ds}{u}$, ce qui donne $\int dt=\int\frac{ds}{s}$, ou $t=\int\frac{ds}{s}$. Or pour trouver l'integrale $\int\frac{ds}{s}$, je décris une hyperbole équilatere QRT (*Fig.* 14.) entre ſes aſymptotes AH, AB, & dont la puiſſance RI$=1$; je prens ſur l'aſymptote AB les abſciſſes AP, AB, qui ſoient entr'elles comme les eſpaces s, S, & je mene les ordonnées PM, BT, par la proprieté de cette courbe, j'ai $\overline{RI}^2=AP\times PM$; donc PM $=\frac{\overline{RI}^2}{PA}$ ou PM$=\frac{1}{s}$, je mene l'ordonnée *pm* infiniment proche de PM, ce qui donne P$p=ds$, dom PM$\times$Pp=PM*mp*$=\frac{ds}{s}$, or l'eſpace hyperbolique HAPMQ, eſt l'integrale de PM*mp*, donc $t=\int\frac{ds}{s}$= HAPMQ, on prouvera de la même façon que T=HABTQ, & par conſéquent t, T :: HAPMQ, HABTQ; c'eſt-à-dire, que *ſi les viteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces par-*

courus, les tems ſont comme des eſpaces hyperboliques, dont les coupées AP, AB *ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus.*

Les eſpaces hyperboliques HAPMQ, HABTQ, ſont les logarithmes des coupées AP, AB, ainſi que nous l'avons démontré dans *la Calcul Différentiel & Integral* ſur la fin du troiſiéme Livre, donc. *Si les viteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus, les tems ſont entr'eux comme les logarithmes des eſpaces ou des viteſſes.*

Nous verrons plus bas que l'hypotèſe qui ſuppoſe les viteſſes proportionnelles aux eſpaces eſt impoſſible.

Soit $u = S^n$, c'eſt-à-dire que les viteſſes ſoient entr'elles comme telle puiſſance ou telle racine que l'on voudra des eſpaces, en ſuppoſant que n repréſente un nombre quelconque entier ou rompu; je mets cette valeur de u dans $\int dt = \int \frac{ds}{u}$, & j'ai $\int dt = \int \frac{ds}{s^n} = \int ds \times s^{-n}$, & par conſéquent $t = \frac{1}{1-n} s^{-n+1}$; donc t, T :: $\frac{1}{1-n} s^{-n+1}$, $\frac{1}{1-n} S^{-n+1}$ :: s^{-n+1}, S^{-n+1} :: $\frac{s}{s^n}$, $\frac{S}{S^n}$, & mettant au lieu de s^n, S^n, la raiſon u, V, qui eſt la même, j'ai t, T :: $\frac{s}{u}$, $\frac{S}{V}$ :: sV, Su, c'eſt-à-dire, *ſi les viteſſes ſont entr'elles comme telle puiſſance ou telle racine que l'on voudra des eſpaces les tems ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces & de la raiſon reciproque des viteſſes.*

Si l'expoſant $n = 1$ l'hypotèſe devient la même que la précédente, & nous en ferons voir l'impoſſibilité plus bas; ſi l'expoſant n eſt au-deſſus de l'unité, l'hypotèſe eſt encore impoſſible, & voici comme je le prouve.

Suppoſons $n = 2$, nous aurons u, V :: s^2, S^2; mettant donc au lieu de V, u la raiſon S^2, s^2, dans l'analogie t, T :: sV, Su, nous aurons t, T :: sS^2, Ss^2. Or comme s eſt le petit eſpace, & S le grand eſpace, il eſt viſible que sS^2 eſt plus grand que Ss^2, car $sS^2 = sSS$ & $Ss^2 = Sss$, mais sSS eſt plus grand que Sss, donc sS^2 eſt plus grand que Ss^2, & par conſéquent t eſt plus grand que T, c'eſt-à-dire le tems t, pendant lequel le corps a parcouru le petit eſpace, eſt plus grand que le tems T, pendant lequel il a parcouru le grand, ce qui eſt impoſſible. Donc, &c.

Si $n = \frac{1}{2}$ l'hypotèſe eſt la même que celle de Galilée, comme nous venons de voir, & ſi n eſt égal à un nombre rompu moindre que l'unité, l'hypotèſe ſera toujours poſſible, car ſuppoſant

$n=\frac{1}{3}$, donc u, V :: $s^{\frac{1}{3}}$, $S^{\frac{1}{3}}$, ainsi si les espaces s, S, sont par exemple 8 & 27, les vitesses u, V seront 2 & 3, & leur raison reciproque sera 3 & 2; faisant donc la raison composée de la raison directe des espaces, & de la reciproque des vitesses, nous aurons 3×8, 2×27, ou 24, 54, ainsi t, T :: 24, 54, c'est-à-dire le tems t est moindre que le tems T, de même que l'espace 24 parcouru pendant le tems t est moindre que l'espace 54 parcouru pendant le tems T, & de même des autres. Que si l'on veut une demonstration plus rigide de ceci, supposons $n=\frac{1}{3}$, donc u, V :: $s^{\frac{1}{3}}$, $S^{\frac{1}{3}}$; mettant donc la raison $s^{\frac{1}{3}}$, $S^{\frac{1}{3}}$ au lieu de u, V dans l'analogie t, T :: sV, Su, nous aurons t, T :: $sS^{\frac{1}{3}}$, $Ss^{\frac{1}{3}}$. Or $sS^{\frac{1}{3}} = s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$, & $Ss^{\frac{1}{3}} = S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}$, donc t, T :: $s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$, $S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}$; & divisant la seconde raison par $s^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$, nous aurons t, T :: $s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}$, $S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$. Or il est évident que $s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}$ est moindre que $S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$, & par conséquent t est moindre que T, donc l'hypotèse est possible. On trouveroit la même chose, si au lieu de $n=\frac{1}{3}$ on supposoit $n=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{5}$, &c.

DEFINITION.

80. Soient AP, AB (*Fig.* 15.) deux différens tems, pendant lesquels un corps se meut d'un mouvement acceleré, selon telle loi d'acceleration qu'on voudra; que PM représente la vitesse acquise à la fin du tems AP, & BC la vitesse acquise à la fin du tems AB, je mene pm infiniment proche de PM, & nommant AP $=t$, j'ai P$p=dt$. Or la vitesse à la fin de Pp étant $pm=u$, son augmentation est R$m=du$, car $pm=$ PM $+$ Rm. Cela posé, il est visible que l'augmentation s'acquiert successivement pendant l'instant Pp; car si l'on conçoit que l'instant Pp soit divisé en une infinité d'autres instans infiniment petits par rapport à lui, & que des points n, q, &c. on mene les ordonnées no, qx, &c. qui representeront les vitesses à la fin de ces petits instans l'augmentation de vitesse à la fin du petit instant Pn, sera zo, l'augmentation à la fin de l'instant nq sera hx, & ainsi de suite. Or la quantité du mouvement étant le produit de la masse du corps par la vitesse, il s'ensuit que la quantité du mouvement à la fin du tems AP, est le produit de la masse par PM, & la quantité du mouvement à la fin du tems Ap est le produit de la masse

par pm ou par $PM + Rm$. Donc l'augmentation de quantité pendant l'instant P*p*, est le produit de la masse par R*m*, & cette augmentation s'acquiert successivement pendant l'instant P*p*, car à la fin du petit instant P*n*, cette augmentation est le produit de la masse par *zo*, à la fin du petit instant *nq*, elle est le produit de la masse par *hx*, & ainsi de suite; donc l'augmentation à la fin de l'instant P*p* est composée d'une infinité de petites augmentations successives; or ce sont ces petites augmentations de quantité acquises successivement pendant la durée d'un instant P*p*, que nous nommerons *Sollicitation au Mouvement*, ou *Pesanteur*, lorsqu'il s'agira des corps graves.

COROLLAIRE.

81. Les petites augmentations de vitesse *zo*, *hx*, &c. qui composent l'augmentation totale R*m* acquise pendant l'instant P*p*, étant infiniment petites par rapport à R*m*, ne différent entr'elles que d'un infiniment petit du troisiéme genre, & peuvent par conséquent être regardées comme égales. Donc les augmentations de quantité de mouvement, qui composent l'augmentation totale acquise pendant la durée de l'instant P*p* étant les produits de la masse par chacune de ces vitesses, peuvent être regardées comme égales. Nommant l'une de ces petites augmentations de quantité $= g$, la somme totale de ces augmentations pendant l'instant P*p* sera gdt, car il est visible qu'il y aura autant de g qu'il se trouve de petits instans dans l'instant P*p*.

PROPOSITION XXVII.

82. *Connoissant la Loi d'acceleration, connoître la sollicitation au mouvement.*

SOLUTION.

Supposons que AP (*Fig.* 15.) represente le tems t, AB le tems T, PM la vitesse u, BC la vitesse V, P*p* un instant dt, & B*b* un instant dT, je nomme g la sollicitation au mouvement à la fin de AP, G la sollicitation à la fin de AB, & m la masse du corps qui est en mouvement.

L'augmentation de la quantité du mouvement à la fin de l'instant P*p* sera gdt (*N.* 81.) & l'augmentation à la fin de l'instant B*b* sera GdT. Or l'augmentation de la quantité du mouvement à la fin de l'instant P*p* est mdu, c'est-à-dire, la masse multipliée par

l'augmentation de vitesse $mR = du$; donc $gdt = mdu$, & par la même raison $GdT = mdV$, ou $gdt, mdu :: GdT, mdV$; & par conséquent $g, \frac{mdu}{dt} :: G, \frac{mdV}{dT}$.

Si donc par la Loi connue d'acceleration, je trouve la valeur de du & dV, en dt & dT, je trouverai les valeurs ou le rapport de g & G.

Soit $u, V :: t, T$, comme dans l'hypotèse de Galilée, donc $du, dV :: dt, dT$; mettant donc dans l'analogie trouvée la raison dt, dT, au lieu de son égale du, dV, j'ai $g, \frac{mdt}{dt} :: G, \frac{mdT}{dT}$, ce qui se réduit à $g, G :: m, m$; donc $g = G$.

Dans l'Hypotèse de Galilée, la sollicitation g est égale à la sollicitation G, c'est-à-dire, la sollicitation au mouvement est la même par-tout.

Soit $u, V :: t^n, T^n$, donc $du, dV :: nt^{n-1}dt, nT^{n-1}dT$, & mettant cette derniere raison au lieu de son égale du, dV dans l'analogie trouvée $g, G :: \frac{mdu}{dt}, \frac{mdV}{dT}$, j'ai $g, G :: \frac{nmt^{n-1}dt}{dt}, \frac{nmT^{n-1}dT}{dT} :: t^{n-1}, T^{n-1} :: \frac{t^n}{t}, \frac{T^n}{T} :: t^nT, T^nt$, & mettant au lieu de t^n, T^n la raison u, V, qui lui est égale, j'ai $g, G :: uT, Vt$; donc, &c.

Si les vitesses sont entr'elles comme des puissances ou des racines quelconques des tems, les sollicitations au mouvement sont en raison composée de la raison directe des vitesses & de la raison réciproque des tems.

Puisque nous avons trouvé $g, G :: t^nT, T^nt$; donc en divisant la seconde raison par tT, nous aurons $g, G :: t^{n-1}, T^{n-1}$, c'est-à-dire,

Si les vitesses sont entr'elles comme des puissances ou des racines quelconques des tems, les sollicitations au mouvement sont comme les tems élevés à l'exposant n diminué de l'unité.

Donc si $n = 2$, les sollicitations sont comme t^{2-1}, T^{2-1}, c'est-à-dire, comme t, T, ou comme les tems. Si $n = 3$, les sollicitations sont comme t^{3-1}, T^{3-1}, c'est-à-dire, comme t^2, T^2, ou comme les quarrez des tems. Si $n = 4$, les sollicitations sont t^{4-1}, T^{4-1}, ou comme t^3, T^3, ou comme les cubes des tems, & ainsi de suite.

Or les mêmes sollicitations sont en raison composée de la raison directe des vitesses & de la réciproque des tems. Donc cette raison composée est égale à la raison des tems élevez à l'exposant n diminué de l'unité.

REMARQUE.

83. On peut remarquer en passant que ce que nous venons de dire nous fournit un Theorême, touchant les nombres ou les grandeurs en général qui merite quelque attention. Voici le Theorême.

Si deux nombres t, T, sont élevez à une puissance quelconque t^n, T^n, ou si on extrait une racine quelconque t^n, T^n, & qu'ensuite on vienne à multiplier ces puissances ou ces racines réciproquement par t, T, les produits t^nT, T^nt sont entr'eux, comme les nombres t, T, élevés au même exposant n diminue de l'unité.

Ce Theorême se prouve de même que ci-dessus; car si l'on divise t^nT, T^nt par tT, les quotients t^{n-1}, T^{n-1}, seront encore comme les dividendes t^nT, T^nt; donc $t^nT, T^nt :: t^{n-1}, T^{n-1}$.

Si $n=2$, on aura $t^2T, T^2t :: t, T$, c'est-à-dire, les quarrez des deux nombres multipliez réciproquement par les nombres sont entr'eux comme ces nombres.

Si $n=3$, on aura $t^3T, T^3t :: t^2, T^2$, ou les cubes des deux nombres multipliez réciproquement par ces nombres sont comme les quarrez des mêmes nombres, & ainsi des autres.

Le Theorême est également vrai lorsque n est un nombre rompu, & que par conséquent t^n, T^n sont des racines des nombres t, T. Mais si on veut un Theorême particulier pour ce cas, le voici.

Si on prend les racines secondes, troisiémes, quatriémes, &c. de deux nombres, & qu'on multiplie ces racines réciproquement par les nombres, les produits seront entr'eux comme des fractions dont les numerateurs seront toujours l'unité, & les dénominateurs seront des racines des nombres, lesquelles auront pour exposant $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c.

Soit $n=\frac{1}{2}$, donc on aura par le Theorême général $t^{\frac{1}{2}}T, T^{\frac{1}{2}}t :: t^{\frac{1}{2}-1}, T^{\frac{1}{2}-1} :: t^{-\frac{1}{2}}, T^{-\frac{1}{2}} :: \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}$.

Soit $n=\frac{1}{3}$, donc on aura $t^{\frac{1}{3}}T, T^{\frac{1}{3}}t :: t^{\frac{1}{3}-1}, T^{\frac{1}{3}-1} :: t^{-\frac{2}{3}}, T^{-\frac{2}{3}} :: \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}, \frac{1}{T^{\frac{2}{3}}}$.

Soit $n=\frac{1}{4}$, on aura $t^{\frac{1}{4}}T, T^{\frac{1}{4}}t :: t^{\frac{1}{4}-1}, T^{\frac{1}{4}-1} :: t^{-\frac{3}{4}}, T^{-\frac{3}{4}} :: \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}, \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}}$, & ainsi des autres.

Quoique ceci ne regarde pas le ſujet que je traite, on ne ſera pas fâché de cette petite digreſſion.

PROPOSITION XXVIII.

84. *Connoiſſant les eſpaces parcourus, & les ſollicitations au mouvement, connoître les viteſſes acquiſes à la fin de ces eſpaces, & les tems pendant leſquels ils ont été parcourus.*

PREMIERE SOLUTION.

On peut reſoudre ce Problême par le moyen du précédent; car ſi les ſollicitations ſont égales, on connoîtra aiſément que les viteſſes ſont entr'elles comme les tems. Si les ſollicitations ſont comme les tems, on connoîtra que les viteſſes ſont comme les quarrez des tems, &c. & ainſi des autres. Mais ſi l'on veut une ſolution générale, je vais la donner en cette ſorte.

SECONDE SOLUTION.

Que les droites AP, AB, (*Fig.* 16.) repreſentent les eſpaces s, S, parcourus par un Corps, les droites PM, BC, les viteſſes inconnues u, V, acquiſes à la fin de ces eſpaces, les droites PN, BQ, les ſollicitations au mouvement g, G, aux points P, B, je mene l'ordonnée pm infiniment proche de PM, & bc infiniment proche de BC, donc $Pp = ds$, & $Bb = dS$. Je nomme m la maſſe du Corps qui ſe meut, & dt, dT, les inſtans de tems pendant leſquels le corps parcourt les eſpaces infiniment petits Pp, Bb.

Les viteſſes PM, pm, ne differant entr'elles que d'un infiniment petit, peuvent être regardées comme égales, & par conſéquent la viteſſe de l'inſtant Pp peut être regardée comme uniforme; or dans le mouvement uniforme les viteſſes ſont comme les eſpaces diviſez par les tems (*N.* 23); donc j'ai $u, \frac{ds}{dt} :: V, \frac{dS}{dT}$, d'où je tire $udt, ds :: VdT, dS$; & par conſéquent $dt, \frac{ds}{u} :: dT, \frac{dS}{V}$, ou $dt, dT :: \frac{ds}{u}, \frac{dS}{V}$.

D'autre part, j'ai $g, \frac{mdu}{dt} :: G, \frac{mdV}{dT}$ (*N.* 82.); donc $gdt, mdu :: GdT, mdV$, & $dt, \frac{mdu}{g} :: dT, \frac{mdV}{G}$, ou $dt, dT :: \frac{mdu}{g}, \frac{mdV}{G}$; or nous venons de

de trouver dt, $dT :: \frac{ds}{u}$, $\frac{dS}{V}$, donc $\frac{mdu}{g}$, $\frac{mdV}{G}$, $\frac{ds}{u}$, $\frac{dS}{V}$, ou $\frac{mdu}{g}$, $\frac{ds}{u}$ $\frac{mdV}{G}$, $\frac{dS}{V}$; d'où je tire $mudu$, $gds :: mVdV$, GdS, ou gds, GdS $:: udu$, VdV; tirant donc l'integrale j'ai $\int gds$, $\int GdS :: \frac{1}{2}u^2$, $\frac{1}{2}V^2$ $:: u^2$, V^2; or gds est le petit espace $PNnp$, qui est la différence de l'espace ADNP, ou de la somme des sollicitations au mouvement de A en P, & GdS est le petit espace $BQqb$, qui est la différence de l'espace ADQB, ou de la somme des sollicitations de A en B; donc

Les quarrez des vitesses u, V, *sont entr'eux comme la somme des sollicitations à la fin du premier espace est à la somme des sollicitations à la fin du second espace, & par conséquent les vitesses sont entr'elles comme les racines des sommes des sollicitations.*

Soit par exemple g comme m, c'est-à-dire, que la sollicitation soit toujours la même partout comme dans l'hypotèse de Galilée, la somme des sollicitations en P sera AP multipliée par la sollicitation m, & la somme des sollicitations en B sera AB multiplié par la même sollicitation m; donc ces deux sommes seront entr'elles comme les espaces; & par conséquent les vitesses u, V, seront comme les racines de ces espaces, ce qui s'accorde avec ce que nous avons déja dit plus haut.

Supposons de même que les sollicitations soient comme les quarrés des espaces, si je divise AB en une infinité de parties égales, & que des points de division je mene des paralleles qui soient entr'elles comme les quarrez des espaces 1, 2, 3, 4, 5, &c. c'est-à-dire, comme 1, 4, 9, 16, &c. ces paralleles seront les Elemens de l'espace ADQB, & representeront en même tems les sollicitations à la fin de chaque espace. Or les Elemens de l'espace ADPN étant comme les quarrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. à l'infini, cet espace est le tiers du rectangle AP × PN, par les regles de l'Arithmétique des Infinis que nous avons expliquées dans la *Mesure des Surfaces & des Solides*, &c. & par la même raison l'espace ADQB est le tiers du rectangle AB × BQ; donc les quarrez des vitesses PM, BC, sont comme les rectangles AP × PM, AB × BQ; & par conséquent les vitesses sont entr'elles comme les racines de ces rectangles, & ainsi des autres.

On peut m'objecter 1°. que selon les regles de l'Arithmetique des Infinis, les suites 1, 2, 3, 4, &c. 1, 4, 9, 16, &c. doivent commencer par zero & non pas par l'unité, mais cela n'y fait rien; car l'unité étant infiniment petite par rapport au dernier

terme peut être regardée comme n'étant rien.

En second lieu, on peut dire que si les Elemens de l'espace ADNP sont comme les quarrez des nombres 1, 2, 3, 4, &c. cet espace doit donc être un complement de demi-Parabole, & que par conséquent le point D devroit être le même que le point A ; mais à cela je réponds que le point D doit être séparé du point A, parce qu'au commencement du premier espace ou au commencement du mouvement, le corps qui doit se mouvoir a une sollicitation au mouvement ou une pesanteur exprimée par AD, & qu'ainsi l'on peut regarder l'espace ADNP comme un complement de Parabole qui auroit été tronqué au sommet à une distance infiniment proche de ce sommet, ce qui ne sçauroit empêcher que le complement ne soit le tiers du rectangle AP × PN.

Or pour être convaincu que le corps qui doit se mouvoir vers le centre de la terre a une sollicitation ou pesanteur, il n'y a qu'à faire attention que si on veut l'élever il résiste, ce qui ne sçauroit provenir que parce qu'il y a une force qui le sollicite à une direction opposée, laquelle force est la cause de sa pesanteur.

Maintenant pour trouver les tems correspondans à chaque espace s, S, j'ai d'une part u, V :: $\frac{ds}{dt}$, $\frac{dS}{dT}$; ainsi qu'on a vû en cherchant les vitesses, & de l'autre $\int gds$, $\int GdS$ :: u^2, V^2 ; donc $\sqrt{\int gds}$, $\sqrt{\int GdS}$ :: u, V ; & par conséquent $\frac{ds}{dt}$, $\frac{dS}{dT}$ :: $\sqrt{\int gds}$, $\sqrt{\int GdS}$, ou $\frac{ds}{dt}$, $\sqrt{\int gds}$ :: $\frac{dS}{dT}$, $\sqrt{\int GdS}$, d'où je tire ds, $dt\sqrt{\int gds}$, :: dS, $dT\sqrt{\int GdS}$, ou enfin dt, $\frac{ds}{\sqrt{\int gds}}$ :: dT, $\frac{dS}{\sqrt{\int GdS}}$; donc tirant l'intégrale, j'ai t, T :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{\int gds}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{\int GdS}}$.

Or $\int gds$, $\int GdS$ representent les sommes des sollicitations en P, & en B, c'est-à-dire les espaces ADNP, ADQB, lesquels sont connus, puisque les sollicitations sont connues, ainsi divisant l'unité par chacun de ces espaces, & faisant PH, BR qui soient entr'eux comme les quotients, j'ai PH, BR :: $\frac{1}{\sqrt{\int gds}}$, $\frac{1}{\sqrt{\int GdS}}$; & multipliant PH par P$p = ds$, & BR par B$b = dS$, j'ai PH×Pp, BR × Bb :: $ds \frac{1}{\sqrt{\int gds}}$, $dS \frac{1}{\sqrt{\int GdS}}$; & divisant l'espace AB en parties infiniment petites, & faisant la même chose à tous les points de division, j'ai la courbe RHX. Or PH × Pp, est la différence de

l'espace APHXY, & BR × Bb, est la différence de l'espace ABRXY; donc APHXY, ABRXY :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{\int g ds}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{\int G dS}}$ :: t, T, c'est-à-dire, que les tems t, T, sont comme les espaces APHXY, ABRXY.

Pour trouver les valeurs de ces espaces, je mets au lieu de g, G, leur rapport 1, 1, dans l'hypotèse de Galilée, ou leur rapport à s, S, dans les autres hypotèses, & je tire ensuite l'intégrale, ainsi qu'on va voir.

Si g, G :: m, m, j'ai t, T :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{\int ds}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{\int dS}}$ :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{s}}$, $\int dS \times \frac{1}{\sqrt{S}}$ :: $\int ds \times s^{-\frac{1}{2}}$, $\int dS \times S^{-\frac{1}{2}}$ :: $2s^{\frac{1}{2}}$, $2S^{\frac{1}{2}}$ :: $s^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, les tems t, T, sont comme les racines des espaces PA, AB.

Si g, G :: s^2, S^2, j'ai t, T :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{\int s^2 ds}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{\int S^2 dS}}$ :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}s^3}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}S^3}}$ :: $\int \frac{ds \times s^{-3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$, $\int \frac{dS \times S^{-3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$ :: $\int ds \times s^{-3}$, $\int dS \times S^{-3}$ :: $-\frac{1}{2}s^{-2}$, $-\frac{1}{2}S^{-2}$ :: s^{-2}, S^{-2} :: $\frac{1}{s^2}$, $\frac{1}{S^2}$, c'est-à-dire les tems t, T, sont entr'eux comme des fractions dont les numerateurs sont l'unité & les dénominateurs sont les quarrez des espaces, & en général si g, G :: s^n, S^n, on trouvera t, T :: $\frac{1}{s^n}$, $\frac{1}{S^n}$.

Or delà, il est aisé de voir que les sollicitations g, G, ne sçauroient être en raison d'une puissance, ou d'une racine quelconque des espaces; car il est visible que $\frac{1}{s^2}$, est plus grand que $\frac{1}{S^2}$, & par conséquent si cette supposition avoit lieu, il s'ensuivroit que t, seroit plus grand que T, ce qui est impossible.

COROLLAIRE I.

85. *La courbe des tems* RHX *est une hyperbole du second genre dans l'hypotèse de Galilée, & les droites* AB, AY, *sont ses asymptotes.*

Nous avons fait ci-dessus PH, BR :: $\frac{1}{\sqrt{\int g ds}}$, $\frac{1}{\sqrt{\int G dS}}$ :: $\sqrt{\int G dS}$, $\sqrt{\int g ds}$; or nous avons trouvé u, V :: $\sqrt{\int g ds}$, $\sqrt{\int G dS}$. Donc PH, BR sont en raison réciproque des vitesses PM, BC, c'est-à-dire, les ordonnées de la courbe RHX, sont réciproques aux ordonnées de la courbe AMC. Or la courbe AMC est une parabole quarrée, parce que les vitesses PM, BC sont entr'elles comme

les racines des espaces AP, AB, donc les ordonnées de la courbe RHX sont réciproques aux ordonnées d'une parabole ; & par conséquent elles sont aussi réciproques aux racines quarrées des espaces AP, AB, c'est-à-dire PH, BR :: $\overline{AB}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$; ainsi élevant tout au quarré, nous aurons $\overline{PH}^2$, $\overline{BR}^2$ :: AB, AP ; donc $\overline{PH}^2 \times AP = \overline{BR}^2 \times AB$. Faisant donc un cube $a^3 = \overline{PH}^2 \times AP$, ce cube sera égal au quarré de chaque ordonnée de la courbe RHX multiplié par son abscisse, c'est pourquoi nommant l'ordonnée $PH = y$, l'abscisse $AP = x$, nous aurons $y^2x = a^3$, ou bien $y^2x = 1$, en faisant $a = 1$, & cette équation sera l'équation de la courbe RHX ; or l'équation $y^2x = 1$ est à une hyperbole du second genre entre les asymptotes dont la puissance $= 1$, donc la courbe RHX est une hyperbole du second genre.

COROLLAIRE II.

86. Nous avons trouvé ci-dessus que les tems t, T, dans l'hypotèse de Galilée sont comme $s^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{2}}$, ou comme $\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{AB}^{\frac{1}{2}}$. Donc *les espaces hyperboliques* APHXY, ABRXY *de l'hyperbole du second genre* RHX, *sont entr'eux comme les racines quarrées de leurs abscisses* AP, AB, & cette proprieté de cette hyperbole peut se démontrer directement en cette sorte.

Je nomme toujours $AP = s$, $AB = S$, & à cause que nous avons trouvé PH, BR :: V, u, je nomme $PH = V$, $BR = u$, & la puissance de l'hyperbole $= 1$. Donc $PHhp = Vds$, & c'est la différence de l'espace APHXY ; or l'équation de cette hyperbole est $V^2s = 1$, donc $V^2 = \frac{1}{s} = s^{-1}$, & $V = s^{-\frac{1}{2}}$; mettant donc cette valeur de V dans la différence Vds, nous aurons $s^{-\frac{1}{2}}ds$, & tirant l'integrale, nous aurons $APHXY = 2s^{-\frac{1}{2}+1}$, & mettant V au lieu de $s^{-\frac{1}{2}}$ qui lui est égal, nous aurons $APHXY = 2Vs$, on trouvera de la même façon que $ABRXY = 2uS$, donc APHXY, ABRXY :: $2Vs$, $2uS$; mais V, u :: $S^{\frac{1}{2}}$, $s^{\frac{1}{2}}$, mettant donc cette derniere raison au lieu de V, u, dans la derniere analogie, nous aurons APHXY, ABRXY :: $2S^{\frac{1}{2}}s$, $2s^{\frac{1}{2}}S$ :: $S^{\frac{1}{2}}s$, $s^{\frac{1}{2}}S$ :: $S^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$, $s^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}$, & divisant la derniere raison par $S^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$, nous aurons enfin APHXY, ABRXY :: $s^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{2}}$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE III.

87. *Si la loi d'acceleration est telle que les vitesses acquises à la fin des espaces soient entr'elles comme les espaces, c'est-à-dire que* u, $V :: s$, S, *l'hypotèse est impossible.* Par le Probleme présent nous avons gds, $Gds :: udu$, VdV, mettant donc au lieu de udu, VdV, la raison sds, SdS qui lui est égale, par la supposition, nous aurons gds, $GdS :: sds$, SdS, ou gds, $sds :: GdS$, SdS; donc g, $s :: G$, S, c'est-à-dire la sollicitation au mouvement est comme l'espace. Or au commencement du mouvement l'espace est nul ou $= 0$, donc alors g est comme zero, c'est-à-dire au commencement du mouvement le corps n'a point de pesanteur, ce qui est absurde, & par conséquent l'hypotèse est impossible.

COROLLAIRE IV.

88. *Dans les autres hypotèses la pesanteur au commencement du mouvement est comme* 1, *ou comme la masse.*

Par le Probleme présent nous avons gds, $udu :: GdS$, VdV, donc gds est comme udu; ainsi si nous prenons l'hypotèse de Galilée nous aurons u comme t, donc du comme dt, & par conséquent gds est comme udt, ou $\frac{gds}{dt}$ est comme u; mais nous avons trouvé dans ce même présent Probleme u comme $\frac{ds}{dt}$, donc gu est comme u, & par conséquent divisant par u, nous aurons g, est comme 1, ou comme m.

Si nous prenons l'hypotèse qui fait u comme t^n, nous aurons du comme $nt^{n-1}dt$, donc gds étant comme udu, sera comme $nut^{n-1}dt$, & $\frac{gds}{dt}$ comme nut^{n-1}, ou $\frac{nut^n}{t}$; mais $\frac{ds}{dt}$ est comme u, donc gu comme $\frac{nut^n}{t}$ ou g comme $\frac{nt^n}{t}$; or au commencement du mouvement $t = 0$ donc $\frac{nt^n}{t} = \frac{0}{0} = 1$, ainsi g est comme 1, ou comme la masse.

REMARQUE.

89. J'avois resolu de ne point parler de la loi d'acceleration que M. de Newton & la plûpart des Astronomes ont établie à

parce que cela regarde plutôt l'Astronomie que la Mechanique ordinaire ; mais afin qu'on ne soit point obligé de l'aller chercher ailleurs, j'en vais faire un précis en peu de mots.

Soit O (*Fig.* 17.) le centre où le corps A tend le long de la droite AO, les droites AP, AB, deux espaces s, S, les droites PM, BC, les vitesses acquises u, V, les droites PN, BQ, les sollicitations au mouvement g, G, & les espaces APHXY, ABRXY, les tems t, T.

Selon M. de Newton & les Astronomes, les vitesses u, V, sont comme les racines quarrées des espaces AP, AB, divisées par les racines quarrées des espaces restans PO, BO.

Nommant donc AO $= a$ nous aurons PO $=$ AO $-$ AP $= a - s$ & BO $=$ AO $-$ AB $= a - S$, donc $u, V :: \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{u - s}}, \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{A - S}} :: \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\overline{a - s}^{\frac{1}{2}}}, \frac{S^{\frac{1}{2}}}{\overline{a - S}^{\frac{1}{2}}} :: s^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - s}^{-\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - S}^{-\frac{1}{2}}$.

Pour avoir le rapport des tems selon cette loi, nous avons trouvé ci-dessus (*N.* 79.) $\int dt, \int dT :: \int \frac{ds}{u}, \int \frac{dS}{V}$ ou $t, T :: \int \frac{ds}{u}, \int \frac{dS}{V}$; mettant donc au lieu de u, V la raison $s^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - s}^{-\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - S}^{-\frac{1}{2}}$, nous aurons $t, T :: \int \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - s}^{-\frac{1}{2}}}, \int \frac{dS}{s^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - S}^{-\frac{1}{2}}} :: \int s^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - s}^{\frac{1}{2}}, \int S^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - S}^{\frac{1}{2}}$, ainsi on n'aura qu'à tirer les integrales indiquées dans les termes du second membre selon les regles du Calcul Integral, & l'on aura le rapport des tems ; mais comme ces integrales ne peuvent s'exprimer que par des suites infinies, qui ne donnent que des approximations, on n'aura aussi le rapport des tems que par approximation.

Pour connoître la sollicitation au mouvement, nous avons trouvé (*N.* 82.) $g, G :: \frac{mdu}{dt}, \frac{mdV}{dT} :: \frac{du}{dt}, \frac{dV}{dT}$; mettant donc au lieu de du, dV, les différences des vitesses qui sont $\frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - s}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - s}^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{2} S^{-\frac{1}{2}} dS \times \overline{a - S}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} S^{\frac{1}{2}} dS \times \overline{a - s}^{-\frac{3}{2}}$ & les différences des tems qui sont $s^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - s}^{\frac{1}{2}}, S^{-\frac{1}{2}} dS \times \overline{a - S}^{\frac{1}{2}}$, nous aurons $g, G :: \frac{s^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - s}^{-\frac{1}{2}} + s^{\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - s}^{-\frac{3}{2}}}{2 s^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a - s}^{\frac{1}{2}}}$,

$$\frac{S^{-\frac{1}{2}}dS\times\overline{a-S}^{-\frac{1}{2}}+S^{\frac{1}{2}}dS\times\overline{a-S}^{-\frac{3}{2}}}{2S^{-\frac{1}{2}}dS\times\overline{a-S}^{-\frac{3}{2}}} :: \overline{a-s}^{-1}+s\times\overline{a-s}^{-2},$$

$$\overline{a-S}^{-1}+S\times\overline{a-S}^{-2} :: \frac{1}{a-s}+\frac{s}{\overline{a-s}^2}, \frac{1}{a-S}+\frac{S}{\overline{a-S}^2} ::$$

$$\frac{a-s+s}{\overline{a-s}^2}, \frac{a-S+S}{\overline{a-S}^2} :: \frac{a}{\overline{a-s}^2}, \frac{a}{\overline{a-S}^2}.$$

Au commencement du mouvement on a $s=0$, donc effaçant s, dans $\frac{a}{\overline{a-s}^2}$ qui eſt le rapport de g, nous aurons g comme $\frac{a}{a^2}$ ou g comme a, c'eſt-à-dire la peſanteur du corps au point A eſt comme a, ou plutôt comme m; car en général nous avons gds comme $mudu$ (*N.* 84.) dont g comme $\frac{mudu}{ds}$, mais au point A on a $udu=0$, & $ds=0$, donc $\frac{udu}{ds}=\frac{0}{0}=1$, & par conſéquent g eſt comme m.

Quand le corps arrive en O, on a $s=a$, donc $a-s=0$, & par conſéquent g eſt alors comme $\frac{a}{0}$, c'eſt-à-dire la ſollicitation au mouvement au point O, eſt infiniment grande; ainſi ſi par le point O on mene une ordonnée OI, cette ordonnée ſera l'aſymptote de la courbe DNQZ des ſollicitations.

Puiſque u eſt comme $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a-s}}$, & qu'au point O nous avons $a-s=0$, donc en ce point la viteſſe eſt comme $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{0}}$, c'eſt-à-dire qu'elle eſt infinie, & par conſéquent l'ordonnée OI eſt auſſi l'aſymptote de la courbe AMCL des viteſſes.

Nous avons trouvé dans le preſent Probleme (*N.* 84.) PH, BR :: $\frac{1}{\sqrt{\int gds}}$, $\frac{1}{\sqrt{\int GdS}}$ :: $\int GdS$, $\int gds$ :: & u, V :: $\int gds$, $\int GdS$; donc PN eſt à BR, reciproquement comme V à u, ou comme BC, PM, mais PM eſt moindre que BC, donc BR eſt auſſi moindre que PH, & par conſéquent les ordonnées de la courbe ORHX vont en augmentant du côté de A. Or chacune de ces ordonnées étant comme $\frac{1}{\sqrt{\int gds}}$, & au commencement du mouvement ayant $s=0$, on a auſſi $ds=0$, donc l'ordonnée AY eſt comme $\frac{a}{\sqrt{0}}$, c'eſt-à-dire infinie, & par conſéquent elle eſt l'aſymptote de la courbe des tems ORHX.

Pour trouver la nature de la courbe des sollicitations DNQZ; je conçois que l'espace AO soit divisé en une infinité de petites parties égales, & que des points de division soient menées des ordonnées qui représenteront les sollicitations à la fin de chaque espace, ainsi PN étant comme $\frac{a}{\overline{a-s}^2}$, les ordonnées de la courbe seront entr'elles comme les $\frac{a}{\overline{a-s}^2}$ qui leur correspondent.

Or si nous faisons $\overline{a-s}^2$, $\sqrt{a}::\sqrt{a}, x$, nous aurons $\frac{a}{\overline{a-s}^2} = x = g$, c'est-à-dire que les sollicitations sont troisiémes proportionnelles aux $\overline{a-s}^2$ & aux $\sqrt{a}$. Cela posé.

Je décris un complement de parabole A O a, (*Fig.* 18.) dont la tangente au sommet O soit l'espace total AO, & dont la hauteur A a soit égale à AO, & la tangente AO étant conçûe, divisée en parties infiniment petites AB, BC, CD, &c. les ordonnées étant menées, il est sûr par la proprieté de cette parabole, que les ordonnées aA, bB, cC, &c. seront comme les quarrés des abscices AO, BO, CO, &c. or puisque les AB, AC, AD, &c. sont les s, les OA, OB, OC, &c. seront les $a-s$, donc les ordonnées aA, bB, cC, &c. seront comme les $\overline{a-s}^2$.

Je conçois un quarré A15O élevé sur AO, & perpendiculaire au plan du complement de parabole AOa, les ordonnées B2, C3, &c. de ce quarré étant égales seront comme les a, donc leurs racines seront comme les $\sqrt{a}$, & par conséquent elles seront aussi égales entr'elles; ainsi les $\sqrt{a}$ étant entr'elles comme les a, les ordonnées A1, B2, C3, &c. peuvent représenter les $\sqrt{a}$.

Je prens des troisiémes proportionnelles aux élemens du complement de parabole & à ceux du quarré, c'est-à-dire je fais $\overline{a-s}^2$, $\sqrt{a}::\sqrt{a}, x$, & j'ai $x = g = \frac{a}{\overline{a-s}^2}$, ainsi les troisiémes proportionnelles AE, BF, CG, &c. sont entr'elles comme les g.

Or par la construction j'ai $bB \times BF = \overline{B2}^2$ & $cC \times CG = \overline{C3}^2$; & il est visible que $\overline{B2}^2 = \overline{C3}^2$, donc $bB \times BF = cC \times CG$, & par conséquent BF, CG :: cC, bB, c'est-à-dire les ordonnées de la courbe EFGY sont reciproques aux ordonnées du demi complement; mais par la proprieté du complement nous avons cC,

bB

$bB :: \overline{CO}^2, \overline{BO}^2$, donc BF, CG $:: \overline{CO}^2, \overline{BO}^2$, & par conféquent $BF \times \overline{BO}^2 = CG \times \overline{CO}^2 = EA \times \overline{AO}^2$; mais il eft évident que $EA \times \overline{AO}^2 = \overline{A1}^3 = \overline{AO}^3$, donc $BF \times \overline{BO}^2 = CG \times \overline{CO}^2 = \overline{A1}^3$; ainfi nommant les $g = y$, & les abfciffes $a - s = x$, nous aurons $yx^2 = a^3$ qui eft l'équation d'une hyperbole du fecond genre. Donc la courbe EFGY des follicitations eft une hyperbole du fecond genre.

Et pour mieux faire voir que l'équation $yx^2 = a^3$ repréfente la courbe des follicitations, fuppofons $a = 1$, & mettons au lieu de x^2 fa valeur $\overline{a-s}^2$, nous aurons $y \times \overline{a-s}^2 = 1$; donc $y = g = \frac{1}{\overline{1-s}^2}$, & c'eft précifement la valeur de g que nous avons trouvée, c'eft-à-dire $\frac{a}{\overline{a-s}^2} = \frac{1}{\overline{1-s}^2}$.

Pour décrire la courbe des viteffes, c'eft-à-dire la courbe dont les ordonnées font $y = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a-s}}$, je décris une demi-parabole AOa (*Fig.* 19.), dont le fommet eft au point O de l'efpace AO, & dont la bafe Aa = AO, les abfciffes OD, OC, OB, &c. feront par conféquent les $a - s$, & les ordonnées Dd, Cc, &c. feront les $\sqrt{a-s}$ par la proprieté de la parabole. Je conçois une parabole du troifiéme genre AOH, qui a fon fommet en A & qui eft élevée perpendiculairement fur le plan de la parabole AOa. Les quatriémes puiffances des ordonnées B1, C2, &c. feront comme les abfciffes AB, AC, &c. & par conféquent comme les s; donc ces mêmes ordonnées feront les $\sqrt[4]{s}$, ou comme les $s^{\frac{1}{4}}$; je prens des troifiémes proportionnelles aux ordonnées $\sqrt{a-s}$ de la parabole AOa & aux ordonnées $s^{\frac{1}{4}}$ de AOH, c'eft-à-dire, je fais $\overline{a-s}^{\frac{1}{2}}, s^{\frac{1}{4}} :: s^{\frac{1}{4}}, y$, & j'ai $y = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\overline{a-s}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a-s}} = u$, donc la courbe AY eft la courbe demandée.

La courbe ORHX des tems (*Fig.* 17.) fe trouve en prenant les ordonnées PH, BR reciproques aux ordonnées BC, PM de la courbe AMCL des viteffes.

De tout ce que nous venons de dire touchant la loi d'acceleration de Mr de Newton, il s'enfuit 1°. Que la viteffe & la follicitation au mouvement étant infinies, l'efpace AO, doit auffi

être infini. 2°. Que si deux corps d'inégale masse tombent en même tems du point A, ils parcourront dans le même tems des espaces égaux ; car supposant que le premier que je nomme A, soit au second que je nomme B, comme 1 à 2 ; je coupe le premier en deux parties égales que je nommerai F, G, ainsi la partie F aura la même pesanteur que le corps A, car les masses F, A, étant égales, il n'y a pas de raison de pouvoir dire que l'une ait plus de pesanteur que l'autre. Donc puisque l'une & l'autre ne se meuvent que par l'effet de leurs pesanteurs, la partie F parcourra l'espace AP dans le même tems que le Corps A parcourra le même espace. Par la même raison la partie G parcourra aussi le même espace dans le même tems ; & par conséquent les deux parties F, G, prises ensemble, c'est-à-dire le corps B, parcoureront le même espace AP. Nommant donc t le tems que le corps A employe à parcourir l'espace AP, T celui qu'il employe à parcourir l'espace AB ; z le tems employé par le corps B à parcourir AP, & Z celui qui est employé par le même corps à parcourir AB, nous aurons d'une part $t, T :: \int s^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a-s}^{\frac{1}{2}}, \int S^{-\frac{1}{2}} dS \times \overline{a-S}^{\frac{1}{2}}$, & de l'autre $z, Z :: \int s^{-\frac{1}{2}} ds \times \overline{a-s}^{\frac{1}{2}}, \int S^{-\frac{1}{2}} dS \times \overline{a-S}^{\frac{1}{2}}$; donc $t, T :: z, Z$, mais nous venons de voir que $t = z$, donc $T = Z$, c'est-à-dire, les tems employez par le corps A à parcourir les espaces AP, AB, sont égaux aux tems employez par le corps B à parcourir les mêmes espaces. 3°. Que les vitesses acquises par le corps A à la fin des espaces AP, AB, sont égales aux vitesses acquises par le corps B à la fin de ces mêmes espaces ; car les espaces étant les mêmes de part & d'autre, & les tems employez à les parcourir étant aussi égaux, les vitesses sont aussi nécessairement égales. 4°. Que les sollicitations au mouvement, c'est-à-dire, les pesanteurs des deux corps sont entr'elles comme leurs masses m, M ; car la sollicitation au mouvement du premier corps est comme $\frac{mdu}{dt}$ (*N.* 82.) & celle du second est comme $\frac{Mdu}{dt}$, à cause que la loi d'acceleration est la même ; or le rapport $\frac{du}{dt}$ est le même de part & d'autre, à cause qu'à la fin des mêmes espaces, les vitesses & les tems du corps A sont égaux aux vitesses & aux tems du corps B, donc $\frac{mdu}{dt}, \frac{Mdu}{dt} :: m, M$.

Il eſt aiſé de voir que les trois dernieres conſéquences ſont communes à toutes les loix d'accéleration.

II. REMARQUE.

90. Pour mieux faire entendre aux Commençans ce que nous venons de dire dans les Problêmes précédens, je vais rapporter une autre loi d'accéleration.

Suppoſons donc qu'un corps A (*Fig.* 20.) tombe librement du point A vers le centre O, & qu'à la fin de chaque eſpace AP, AB, les ſollicitations ſoient comme les diſtances PO, BO, nommant AO $=a$, AP $=s$, AB $=$ S, nous aurons g, G $:: a-s$, A$-$S.

Maintenant pour trouver les viteſſes u, V, nous avons $\int g ds$, $\int G dS :: \frac{1}{2}u^2, \frac{1}{2}V^2 :: u^2, V^2$ (*N.* 84.) ; mettant donc au lieu de g, G, le rapport $a-s$, $a-$S, nous aurons $\int ds \times \overline{a-s}$, $\int dS \times \overline{a-S}$ $:: \frac{1}{2}u^2, \frac{1}{2}V^2$, & par conſéquent $\int ads - \int sds$, $\int adS - \int SdS :: \frac{1}{2}u^2$, $\frac{1}{2}V^2$; donc $as - \frac{1}{2}s^2$, $aS - \frac{1}{2}S^2 :: \frac{1}{2}u^2, \frac{1}{2}V^2$, ou $2as - s^2$, $2aS - S^2 :: u^2, V^2$; donc $\sqrt{2as - s^2}$, $\sqrt{2aS - S^2} :: u, V$.

Je décris du centre O & de l'intervalle OA un quart de cercle AMCL, & des points P, B, menant les ordonnées PM, BC, je dis que les viteſſes u, V, ſont entr'elles comme ces ordonnées; car le diametre du cercle étant double de AO ſera $=2a$, & le diametre moins l'abſciſſe AP $=s$ ſera $2a-s$, or par la proprieté du cercle, j'ai $\overline{PM}^2 = 2a - s \times s = 2as - s^2$; donc PM $=\sqrt{2as - s^2}$, par la même raiſon BC $=\sqrt{2aS - S^2}$, donc PM, BC $:: \sqrt{2as - s^2}, \sqrt{2aS - S^2} :: u, V$, donc

Si les ſollicitations à la fin des eſpaces ſont entr'elles comme les diſtances au centre, & qu'on décrive un quart de cercle qui ait pour rayon la diſtance totale, les viteſſes acquiſes à la fin des eſpaces ſeront comme les ſinus tirés des extremités des eſpaces.

Pour trouver les tems t, T, nous avons trouvé t, T $:: \int \frac{ds}{u}$, $\int \frac{dS}{V}$ (*N.* 79.) mettant donc au lieu de u, V, la raiſon $\sqrt{2as - s^2}$, $\sqrt{2aS - S^2}$, nous aurons t, T $:: \int \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}, \int \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}}$.

Du point M je tire le rayon MO, & la tangente MY, je mene l'ordonnée pm infiniment proche de PM, & MR parallele à AO ; j'ai donc Pp $=$ MR $= ds$, les triangles rectangles MRm,

MPO font semblables ; car les angles POM, PMO pris ensemble valent un angle droit, & font par conséquent égaux à l'angle OMm ; donc si d'une part j'ôte l'angle POM, & de l'autre l'angle OMR égal à son alterne POM, il reste RMm = PMO ; donc PM, MO :: MR, Mm, ou $\sqrt{2as - s^2}$, a :: ds, $\frac{ads}{\sqrt{2as - s^2}}$ = Mm ; mais le petit arc de cercle compris entre PM & pm étant infiniment petit peut être regardé comme égal à Mm, qui est infiniment petit ; donc Mm est la différence de l'arc AM, & par conséquent son integrale $\int \frac{ads}{\sqrt{2as - s^2}}$, ou $a\int \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}$ est la valeur de l'arc AM ; par la même raison l'arc AC est $a\int \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}}$; donc AM, AC :: $a\int \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}$, $a\int \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}}$ :: $\int \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}$, $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}}$ :: t, T ; donc *les tems* t, T, *sont entr'eux comme les arcs de cercle* AM, AC.

Puisque les sollicitations sont comme les distances OB, OP, OA, il est visible que si l'on décrit un triangle rectangle OAG, les ordonnées BQ, PN, AG, representeront les sollicitations au mouvement.

La sollicitation au mouvement au centre O sera donc comme zero, & au commencement du mouvement, elle sera comme a ; car alors $s = 0$, & par conséquent $g = a - s$, est $g = a - 0 = a$, ou pour mieux dire g est comme m ; car en general nous avons gds comme $mudu$ (*N.* 84.) donc g comme $\frac{mudu}{ds}$; mais la vitesse & l'espace étant nuls au point A, nous avons $udu = 0$, & $ds = 0$; donc $\frac{udu}{ds} = \frac{0}{0} = 1$, & par conséquent g est comme m.

Si m est comme a, la courbe des vitesses sera le quart de circonférence AML, mais si m est comme une grandeur b moindre ou plus grande que a, cette courbe se changera en Ellipse ainsi que nous allons voir.

Soit AG = $m = b$, nous avons AO, PO :: AG, PN ; donc a, $a - s$ :: b, $\frac{ab - bs}{a}$ = PN = g. Or nous avons en général $\frac{1}{2}u^2$, comme $\int gds$ (*N.* 84.) mettant donc $\frac{ab - bs}{a}$ au lieu de g, nous aurons $\frac{1}{2}u^2$, comme $\int \frac{abds - bsds}{a}$, ou comme $\frac{abs - \frac{1}{2}bs^2}{a}$, ou comme $bs - \frac{bs^2}{2a}$, & multipliant par 2, puis par $2a$, nous aurons $2au^2$, comme $4abs - 2bs^2$.

Je prens un diametre double de AO, & avec un parametre double de AG, je décris un quart d'Ellipse AHI, & je dis que les ordonnées PH, BK, seront comme les vitesses u; car l'axe ou le double de AO sera $= 2a$, le double de AO moins l'abscisse AP sera $2a - s$; or par la proprieté de la courbe, on a $\overline{HP}^2$, $2as - s \times s :: 2b, 2a$; donc $2a \times \overline{HP}^2 = 4abs - 2bs^2$, par la même raison on aura $2a\overline{BK}^2 = 4abS - 2bS^2$; ainsi nous aurons $2a\overline{HP}^2$, $2a\overline{BK}^2 :: 4abs - 2bs^2, 4abS - 2bS^2$; mais nous venons de trouver $2au^2, 2aV^2 :: 4abs - 2bs^2, 4abS - 2bS^2$; donc $2a\overline{HP}^2, 2a\overline{BK}^2 :: 2au^2, 2aV^2$; d'où l'on tire HP, BK :: u, V.

COROLLAIRE IV.

91. Par la presente Proposition nous avons gds comme udu (*N.* 84.) ou $gds = udu$; or tirant la droite MB perpendiculaire en M à la courbe des vitesses (*Fig.* 16.) & menant Mr parallele à Pp, & mMT tangente en M, les triangles rectangles Mrm, PMB sont semblables; car l'angle BMm étant droit, vaut les deux angles PBM, PMB pris ensemble, ôtant donc d'une part PBM & de l'autre BMr égal à son alterne PBM, il reste l'angle aigu PMB égal à l'angle aigu rMm; donc Mr, rm, PM, PB, ou ds, $du :: u$, $\frac{udu}{ds} =$ PB; or nous avons $gds = udu$; donc $g = \frac{udu}{ds}$, & par conséquent $g =$ PB, c'est-à-dire,

Quelque loi d'accélération qu'on veuille établir, la sollicitation au mouvement est toujours égale à la sous-perpendiculaire de la courbe des vitesses.

CHAPITRE IV.

Du Centre de Gravité des Figures & des Corps.

DEFINITIONS.

92. DEux corps sont dits *être en équilibre*, lorsqu'ils s'empêchent mutuellement de se mouvoir, ou lorsqu'ils s'entretiennent l'un & l'autre dans le repos.

Soient, par exemple, les deux corps A, B, (*Fig.* 21.) attachés aux extrémités d'un Levier horisontal AB suspendu par le point C,

ſi le corps A empêche le corps B de deſcendre par ſa propre peſanteur, & que le corps B empêche auſſi le corps A de deſcendre, il eſt viſible qu'il n'y aura point de mouvement, & que les deux corps ſeront en équilibre.

Si au lieu de l'un des corps A on met une puiſſance qui tire vers O, & que cette puiſſance empêchant le corps B de deſcendre, le corps B l'empêche auſſi d'aller vers O, la puiſſance & le corps B ſeront en équilibre.

Si deux Corps A, B, (*Fig.* 22.) pouſſés l'un de C vers A, l'autre de D vers B, venant à ſe rencontrer ne peuvent ſe faire changer de direction ni l'un ni l'autre, il reſteront en repos, ſuppoſé qu'il n'y ait point d'élaſticité, & par conſéquent ils ſeront en équilibre.

Ce que nous venons de dire de deux corps doit auſſi s'entendre des parties d'un même corps. Par exemple, ſi le corps AD (*Fig.* 23.) eſt coupé en deux parties en EF, en ſorte que la partie AF empêche la partie ED de ſe mouvoir, & la partie ED empêche le mouvement de AF, les deux parties AF, ED, du corps AD ſeront en équilibre.

93. Le *Centre de gravité* eſt le point autour duquel toutes les parties d'une grandeur ſont en équilibre.

Le centre de gravité étant empêché de deſcendre vers le centre de la terre, les corps ou les parties d'un corps qui ſont en équilibre ne ſe meuvent donc point; par conſéquent on peut conſidérer les peſanteurs de pluſieurs corps ou des parties d'un corps comme réünies au centre de gravité.

94. L'*axe* ou le *diametre* de gravité eſt une ligne droite dans laquelle ſe trouve le centre de gravité.

Donc ſi une grandeur a pluſieurs diametres de gravité, le centre de gravité doit ſe trouver dans l'interſection de ces diametres.

95. Le *plan de gravité* eſt un plan dans lequel ſe trouve *le centre de gravité* ou le diametre de gravité.

Donc l'interſection de deux plans de gravité eſt un diametre de gravité.

96. On dit qu'un corps eſt *homogene* lorſque toutes ſes parties de volume égal ont une peſanteur égale, & qu'il eſt *hétérogene* lorſque ſes parties d'égal volume n'ont pas une égale peſanteur.

97. Le *centre de grandeur* eſt l'endroit qui diviſe une grandeur dans deux parties égales.

Dans les corps homogenes le centre de grandeur est le même que le centre de gravité, puisqu'il se trouve alors autant de pesanteur d'un côté que de l'autre.

AXIOME.

98. *Les effets sont proportionnels à leurs causes*, car si une telle cause est capable de produire un tel effet, il est évident qu'il faut une cause double ou triple pour produire un effet double ou triple.

PROPOSITION XXIX.

99. *Si deux ou plusieurs corps de différentes masses qui sont en repos viennent à tomber librement d'un point* A (Fig. 16.) *ils parcourront des espaces égaux dans des tems égaux.*

DEMONSTRATION.

J'ai démontré ceci (*N.* 89.) en parlant de la loi d'accélération de M. Newton, & j'ai dit qu'il étoit facile de le démontrer à l'égard de toutes les autres loix. En effet, prenons la loi de Galilée, & supposons que le premier corps que je nomme A soit au second que je nomme B, comme 1 à 2; je partage B en deux parties égales que je nommerai F, G; ainsi F aura la même pesanteur que A, car les masses A, F, étant égales, il n'y a pas de raison de pouvoir dire que l'une aye plus de pesanteur que l'autre; donc F décrira l'espace AP dans le même tems que A décrira cet espace; par la même raison G décrira aussi l'espace AP dans le même tems; donc les deux parties ensemble F, G; c'est-à-dire, le corps B décrira dans le même tems l'espace AP. Ainsi nommant t le tems que le corps A employe à parcourir l'espace AP, T celui qu'il employe à parcourir l'espace AB, z le tems employé par le corps B à parcourir AP, & Z le tems employé par le même corps à parcourir AB, nous aurons d'une part t, T :: $\sqrt{s}$, $\sqrt{S}$, & de l'autre z, Z :: $\sqrt{s}$, $\sqrt{S}$. Donc t, T :: z, Z, mais nous venons de trouver $t=z$; donc T=Z, c'est-à-dire, les tems employez par le corps A à parcourir les espaces AP, AB, sont égaux aux tems employez par le corps B à parcourir les mêmes espaces, & on prouvera la même chose en supposant toute autre loy d'acceleration.

Nota. 1°. Que nous supposons que le milieu à travers duquel les corps descendent n'ait point de résistance, c'est pour-

quoi si les expériences ne s'accordent pas tout-à-fait avec ce que nous venons de dire, cela vient de la résistance de l'air.

Nota. 2°. Qu'un Auteur celebre par le profond Sçavoir qui regne dans ses Ecrits a démontré cette Proposition d'une maniere insuffisante à laquelle il est bon de faire attention pour éviter certains parallogismes dans lesquels les Sçavans mêmes peuvent tomber quelquefois. Voici sa demonstration.

» Quand le Corps A, dit-il, aura parcouru l'espace AP, le tems » qu'il aura employé sera comme $\sqrt{s}$, & quand le corps B aura » parcouru le même espace AP, le tems qu'il aura employé sera » aussi comme $\sqrt{s}$. Donc le tems employé par A sera au tems » employé par B, comme $\sqrt{s}$ à $\sqrt{s}$; & par conséquent ces tems » seront égaux.

Or je dis que cette Démonstration n'est qu'un parallogisme; car par la Démonstration que je viens de donner, nous avons trouvé t, T :: z, Z, & comme nous avons t, T :: $\sqrt{s}$, $\sqrt{S}$; si nous supposons $\sqrt{s} = 1$, & $\sqrt{S} = 2$, nous aurons t, T :: 1, 2, & z, Z :: 1, 2; mais il ne s'ensuit pas delà que si $t = 1$ minute, & T $= 2$ minutes, z doive être $= 1$ minute, & Z $= 2$ minutes. Car pourvû que z, Z, soient deux nombres dont le rapport soit égal au rapport 1, 2, j'aurai toujours z, Z :: 1, 2 :: t, T; par exemple, supposant $z = 3$, & Z $= 6$, j'aurai z, Z :: 3, 6 :: 1, 2 :: t, T; donc tout ce qu'on peut tirer de ceci, c'est que les tems t, T, étant proportionnels à $\sqrt{s}$, $\sqrt{S}$, & les tems z, Z, étant aussi proportionnels à $\sqrt{s}$, $\sqrt{S}$, les tems t, T, sont proportionnels à z, Z, mais je n'en sçaurois conclure que les tems t, T, sont égaux aux tems z, Z; & pour pouvoir raisonner ainsi, il faut que je recoure à un autre principe, qui est celui que j'ai employé dans ma Démonstration, à sçavoir que les pesanteurs des corps A, B, sont toujours proportionnelles à leurs masses; car ce principe posé, il est visible que si une pesanteur comme 1 fait parcourir à une masse comme 1, un espace comme 1 dans un certain tems; une pesanteur comme 2 fera parcourir à une masse comme 2 le même espace comme 1 dans le même tems, attendu que la pesanteur 1 ne donne pas plus de vitesse à la masse 1, que la pesanteur 2 à la masse 2 dans le même tems.

D'où l'on voit que si l'on avoit deux forces différentes des pesanteurs des corps A, B, & qui ne fussent point proportionnelles aux masses, & que ces deux forces vinssent à pousser les corps A, B, en sorte que leur mouvement s'accelerât selon la loi de Galilée,

Galilée, l'espace parcouru par le corps A au premier instant pourroit n'être pas égal à l'espace parcouru par le corps B dans le même instant, quoique les espaces parcourus par le corps A à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. fussent entr'eux comme les quarrés 1, 4, 9, 16, &c. & que les espaces parcourus par le corps B à la fin des mêmes tems fussent aussi comme 1, 4, 9, 16, &c. Quand nous disons donc que dans toute loi d'accélération deux corps inégaux qui passent du repos au mouvement, parcourent dans des tems égaux des espaces égaux, c'est que nous supposons que les forces motrices de ces corps ne sont autre chose que leurs pesanteurs, lesquelles sont toujours proportionnelles aux masses, &c.

COROLLAIRE.

100. Les vitesses acquises à la fin des espaces égaux par divers corps qui étant en repos, viennent à tomber librement sont égales; car quelque loi d'accélération qu'on veuille établir, les tems employés par le corps A à parcourir les espaces AP, AB étant égaux aux tems employez par le corps B à parcourir les mêmes espaces, il est visible que les vitesses du corps A à la fin de ces espaces seront égales aux vitesses du corps B.

PROPOSITION XXX.

101. *Les forces des corps sont en raison composée de la raison des masses & de celle des vitesses.*

DEMONSTRATION.

Supposons que le corps A (*Fig.* 24.) parcoure l'espace AB dans le même tems que le corps D d'inégale masse parcourt l'espace DE, la quantité de mouvement du corps A sera *mu*, c'est-à-dire, le produit de la masse par la vitesse (*N.* 10.) & la quantité de mouvement du corps D sera par la même raison MV; or les forces étant les causes des quantités de mouvement sont proportionnelles à ces quantités (*N.* 98.); donc la force du corps A est à celle du corps D comme *mu* est à MV, & par conséquent ces forces sont entr'elles en raison composée des masses & des vitesses.

COROLLAIRE I.

102. Si les masses sont égales & les vitesses inégales, les forces

sont comme les vitesses, car les forces étant comme mu, MV; & par la supposition m étant égale à M, on a mu, $MV :: u$, V, & par conséquent les forces sont comme u, V.

COROLLAIRE II.

103. Quand les masses sont inégales & les vitesses égales, on a mu, $MV :: m$, M, & par conséquent les forces sont comme les masses; ainsi les forces ne sont alors autre chose que les pesanteurs, & le mouvement est accéleré, ou retardé.

COROLLAIRE III.

104. Quand les masses sont égales & les vitesses aussi, on a $mu = MV$; donc les forces sont aussi égales.

COROLLAIRE IV.

105. Qand les masses étant inégales, & les vitesses inégales, les quantités de mouvement se trouvent égales, les forces sont aussi égales, car on a $mu = MV$, & en ce cas les masses sont réciproques aux vitesses; car puisque $mu = MV$, donc m, $M :: V$, u.

REMARQUE.

En forme de Dissertation touchant les Forces vives.

106. Il y a des Auteurs modernes qui prétendent que la Proposition que nous venons de démontrer, n'est vraie qu'à l'égard des Forces mortes, telles que seroit la Force d'un corps suspendu, & non pas à l'égard des Forces vives, telle qu'est la Force d'un corps qui est actuellement dans un mouvement acceleré, qui dure depuis un tems déterminé; car dans ce second cas, disent-ils, les forces sont entr'elles en raison composée de la raison des masses, & de la raison des quarrés des vitesses. Or voici comment ils prétendent le démontrer.

Supposons, disent ces Geométres, que les corps A, B, (*Fig.* 25.) étant suspendus auparavant, viennent à être lâchés, & tombent librement, ensorte que le premier parcoure l'espace AC, & le second l'espace BD; ces corps étant arrivés en C & D auront acquis des forces capables de les faire remonter aux mêmes hauteurs CA, DB (ce qui sera démontré plus bas *N.* 211.) les Forces en A & B seront donc des Forces mortes; & si nous supposons que les corps A & B étant parvenus en C & D, remon-

rent en A & B, leurs Forces feront des Forces vives; mais ces forces en C & D feront en raifon compofée des maffes, A=M, B=m, & des hauteurs CA, DB, parce que chacune de ces hauteurs confume totalement la Force du corps qui la parcourt, donc les Forces vives feront M×CA, m×DB, mais dans l'hypotèfe de Galilée les efpaces AC, DB font comme les quarrés des viteffes acquifes V, u en C & D. Mettant donc V^2, u^2 au lieu de CA, DB, les Forces vives feront entr'elles comme MV^2, mu^2, c'eft-à-dire en raifon compofée de la raifon des maffes, & de la raifon des quarrés des viteffes, & fi l'on fuppofe les maffes égales, les Forces vives feront comme les quarrés des viteffes.

Telle eft la prétendue démonftration de ces Auteurs, mais il eft aifé de voir que leur hypotèfe roule fur une fuppofition différente de la notre. Selon nous les tems employés par les corps à parcourir leurs efpaces, *font égaux entr'eux*, au lieu que felon les Défenfeurs des Forces vives, les tems font toujours inégaux, & c'eft à quoi ils auroient dû faire un peu plus d'attention; pour en être convaincu, il n'y a qu'à obferver que les corps A, B, étant fuppofés defcendre librement doivent parcourir des efpaces égaux dans des tems égaux; car felon l'hypotèfe de Galilée, que tout le monde adopte, deux corps qui commencent à defcendre parcourent dans les mêmes tems des efpaces égaux quoique leurs maffes foient inégales, (comme il a été démontré ci-deffus Propofition 29. *N.* 99); or les efpaces AC, BD font inégaux, donc les tems employés à les parcourir font auffi inégaux. Ainfi pour rentrer dans notre hypotèfe, il faut néceffairement divifer les produits MV^2, mu^2 par les tems T, t, ou ce qui revient au même par les viteffes V, u, qui font dans la même raifon que les tems felon les loix du mouvement uniformement acceleré ou retardé, & dès-lors nous aurons pour l'expreffion des Forces agiffantes non plus MV^2, mu^2, mais MV, mu, ce qui fait voir que les Forces agiffantes font entr'elles dans la raifon compofée des maffes & des viteffes, de même que les Forces mortes, & non pas dans la raifon des maffes & des quarrés des viteffes.

Il eft vrai que la Force du corps A ne pouvant être éteinte par la pefanteur qu'à la fin d'un tems plus grand que celui à la fin duquel la force du corps B eft entierement confumée, il femble d'abord que cette différence des tems doit entrer dans la confidération des forces des deux corps; mais pour peu qu'on y faffe

attention, on découvrira aiſément que cette différence ne vient point de ce que ces Forces ſont dans un rapport différent de celui de leurs viteſſes, mais ſeulement de ce que les viteſſes que la peſanteur ôte à chacune d'elles dans un même tems, étant égales entr'elles, ne ſont point proportionnelles aux Forces primitives, d'où il ſuit que la force du corps A, qui a perdu moins à proportion que la force du corps B dans un tems égal, doit néceſſairement durer d'avantage.

Pour mettre ceci dans tout ſon jour, ſuppoſons que le premier corps ſoit deſcendu pendant deux tems égaux BF, FE, (*Fig.* 11.) & ait parcouru l'eſpace BIE, & que le ſecond corps pendant le premier tems BF ait parcouru l'eſpace BFH; ſelon l'hypotèſe de Galilée, les viteſſes de ces deux corps ſeront comme les tems BE, FB, ou comme 2 à 1. Or ſi ces corps en remontant ne trouvoient point la peſanteur ſur leurs pas, le premier parcourroit dans deux tems EF, FB égaux aux deux tems de ſa deſcente, l'eſpace BEIM double de BIE qu'il a parcouru en deſcendant (*N.* 211.), & le ſecond corps pendant un tems FB égal au tems de ſa deſcente parcourroit l'eſpace FHOB double de l'eſpace FHB parcouru dans ſa chute; ainſi le premier corps dans le tems EF ne parcourroit que l'eſpace EINF, qui n'eſt que la moitié de l'eſpace EIMB qu'il parcourroit dans un tems double, & par conſéquent les deux corps parcourroient dans un tems égal des eſpaces EINF, FHBO qui ſeroient comme leurs viteſſes, c'eſt-à-dire comme 2, 1; mais les maſſes multipliées par les eſpaces parcourus dans des tems égaux, ſont la meſure des Forces; donc les Forces agiſſantes des deux corps, conſiderées dans des tems égaux, ſeroient comme 2 à 1, ou comme les maſſes multipliées par les viteſſes dans le cas ou les maſſes ſont inégales, ſi la peſanteur n'agiſſoit pas ſur eux.

Voyons donc ce que fait cette peſanteur; elle ôte au premier tems un degré de viteſſe au premier corps, & dans le même tems elle en ôte auſſi un degré au ſecond, & de-là il arrive que le ſecond, à qui la peſanteur ôte tout ce qu'il avoit de viteſſe, perd toute ſa force; & que le premier, à qui la peſanteur n'ôte que la moitié de ſa viteſſe, ne perd que la moitié de ſa force, laquelle par conſéquent dure d'avantage, non pas parce qu'elle eſt avec la force du ſecond dans un rapport différent du rapport 2, 1 des viteſſes, mais uniquement parce qu'on lui ôte moins à proportion, dans un tems qu'on n'ôte

égard à tout ce qui entre dans la composition du mouvement; je veux dire au tems, à la masse, & à l'espace; mais si l'on nous disoit que les Forces mortes, ou d'autres Forces qui seroient dans le rapport des Forces mortes, sont en raison composée des masses & des espaces qu'elles tendent à faire parcourir ou qu'elles font parcourir, la proposition pourroit être vraie ou fausse, & son énoncé seroit vitieux. Elle seroit vraie si les espaces étoient parcourus dans des tems égaux, parce qu'alors les vitesses seroient comme les espaces, mais elle seroit fausse si les tems étoient inégaux, parce qu'en ce cas les espaces ne seroient pas dans la raison des vitesses; & le défaut du raisonnement ne pourroit être imputé qu'à la négligence qu'on auroit euë de ne point faire attention au tems, lequel doit toujours être consideré lorsqu'il s'agit du mouvement.

Les Défenseurs des Forces vives disent, que ce n'est qu'après que le mouvement des corps a duré pendant un tems, à la vérité petit, mais fini & déterminé, que les Forces des corps sont en raison composée des masses & des quarrés des vitesses; ainsi supposons qu'un corps qui commence à se mouvoir parcoure dans un instant un petit espace, & qu'un autre corps égal en masse au premier parcoure un espace égal à celui que le premier à parcouru, mais dans deux instans, les Forces de ces corps n'étant point encore des Forces vives, seroient comme les forces mortes. Or on voit bien que si on disoit que ces deux forces sont en raison composée des masses & des espaces, on auroit tort, puisque la vitesse du premier seroit double de la vitesse du second, à cause qu'il auroit parcouru son espace dans un seul instant, au lieu que l'autre ne l'auroit parcouru que dans deux. Donc, &c.

Nous avons démontré, ajoute-t-on, *que les Forces vives sont entr'elles en raison composée des masses & des quarrés des vitesses.* On l'auroit démontré si l'on avoit prouvé qu'on doit prendre pour leur mesures les produits des masses par les hauteurs, lesquelles sont comme les quarrés des vitesses dans les mouvemens accelerés ou retardés; mais comme nous avons fait voir que cette façon de mesurer les forces n'étoit pas legitime, non-seulement à cause que l'on néglige la différence des tems, mais encore parce que cette différence ne provient que de ce que les vitesses que le moment retardé ôte aux Forces dans un même tems, ne sont pas proportionnelles à ces forces, ce qui ne change rien à la

nature des Forces en elle-même ; il s'ensuit qu'on croit vainement avoir démontré que les Forces agissantes sont en raison composée, &c.

Donc, conclut-on, *nous avons démontré que les Forces vives ne sont pas comme les Forces mortes.* Cette conséquence est absolument fausse, puisque le principe sur lequel elle s'appuye n'a nulle apparence de vérité.

M. de Leibnits fut le premier qui imagina la distinction des Forces mortes & des Forces vives, & malgré le mauvais accueil que les Savans de France & d'Angleterre firent à ce sentiment, M. Jean Bernouilli dans la suite ne craignit pas de l'embrasser. Cet illustre Geométre convint que la preuve que M. de Leibnits tiroit du mouvement retardé ne lui paroissoit pas assez convaincante ; mais il en apporta d'autres qu'il regarda comme autant de démonstrations que personne à l'avenir ne pourroit plus contester. On les trouve dans son Discours sur les Loix du Mouvement, imprimé à Paris en 1727, chez Jombert Libraire rue S. Jacques. Depuis ce tems-là Messieurs Volf, Poleni, Bulfinger, Gravesande, Muschembroc & quelques autres se sont attachés à appuyer le même sentiment, non-seulement sur des raisons geométriques, mais encore sur des experiences très-capables d'obscurcir la vérité si l'on n'y faisoit attention. Quoi qu'en fait de Mathematiques les seules démonstrations ayent force de loix ; il y a cependant bien des personnes sur qui le nom de quelques Auteurs célébres fait de grandes impressions, surtout lorsqu'on néglige de repondre aux raisonnemens dont ces Auteurs appuyent leurs idées. Pour prevenir ce mauvais effet, je vais rapporter dans toute leur étendue les deux preuves dont M. Bernouilli se sert comme de deux boucliers impénétrables à la plus severe critique, & j'espere d'en faire voir le foible d'une maniere si évidente, qu'on n'aura plus lieu de suspendre son jugement entre les deux partis. Le premier de ces argumens demande quelques principes préliminaires que je vais établir, afin que le Lecteur ne trouve rien qui puisse l'arrêter.

Si un corps ABC (*Fig.* 26.) se trouvant comprimé par une ou plusieurs puissances, ou par une cause quelconque, a dans soi-même une force de se remettre dans l'état où il étoit avant la compression, après qu'il aura consumé ou repoussé par sa resistance les Forces qui le comprimoient, ce corps se nomme corps *elastique*, corps à *ressort*, ou simplement *ressort*.

Un ressort ABC *qui est tenu dans un état de compression par une ou plusieurs puissances, est en équilibre avec ces puissances.* Si les puissances A, C, étoient plus foibles que le ressort, elles seroient forcées de ceder à la force du ressort, & si elles étoient plus fortes le ressort cederoit, & se trouveroit dans un état de compression plus grand.

Si un ressort ABC *est tenu dans un état de compression par deux puissances, ces puissances sont égales entr'elles.* Si la puissance A pressoit plus fortement que la puissance C, la force du ressort se porteroit sur la puissance plus foible C, & l'obligeroit de ceder jusqu'à ce que les deux puissances pussent se trouver en équilibre.

Si un ressort ABC *étant tenu dans un état de compression par deux puissances* A, C, *on substitue à la place de l'une des puissances* C *un plan immobile* EF, *la puissance* A *ne fera pas plus d'effort qu'elle en faisoit auparavant.* La resistance du plan EF ne presse pas d'avantage la jambe CB que la puissance C ne la pressoit; car ce plan ne fait autre chose que d'empêcher la jambe CB de s'écarter de la jambe AB; or la force A étoit en équilibre avec la force C, donc elle doit être en équilibre avec la resistance du plan EF.

Si deux puissances A, B, (Fig. 27.) *tiennent plusieurs ressorts égaux dans un état de compression, elles ne font pas plus d'effort que si elles ne comprimoient qu'un seul de ces ressorts* ACD. Supposons que les deux Forces A, B, étant appliquées aux extrémités A, D, du ressort ACD, le compriment en lui faisant faire un angle de 30 degrés, je mets à la place de la puissance B un plan immobile MN, & le ressort n'étant pas plus comprimé qu'auparavant, la puissance A ne fera pas aussi plus d'effort qu'elle n'en faisoit. Je prens un autre ressort DEF égal au ressort ACD, & faisant appuyer sa jambe DE sur le plan immobile MN, j'applique à l'autre extrémité F la puissance B. Il est visible que ce ressort sera aussi comprimé que le ressort ACD, puisque tout est égal de part & d'autre. Or l'effort de la jambe CD sur le plan immobile MN, est égal à l'effort de la jambe DE sur le même plan, donc si nous ôtons le plan MN, les deux jambes CD, DE seront en équilibre, & les puissances A, B, ne feront pas plus d'effort qu'elles n'en faisoient avant qu'on ôtât le plan, c'est-à-dire qu'elles n'agiront pas plus que si elles ne comprimoient que le seul ressort ACD; par la même raison, si au lieu de la puissance

ſance B miſe en F, on ſubſtitue un plan OP, la puiſſance A ne fera pas plus d'effort qu'elle n'en faiſoit auparavant, & ſi l'on met un autre reſſort FGH égal à ACD, & qui s'appuyant d'une part ſur le plan OP, ſoit comprimé de l'autre par la puiſſance B miſe en H, cette puiſſance fera le même effort qu'elle feroit en D, & comme en ôtant le plan OD les deux jambes EF, FG feront en équilibre, il s'enſuit que les deux puiſſances A, B, miſes en A & en H, comprimeront les trois reſſorts ACD, DEF, FGH, chacun ſous un angle de 30 degrés en ne faiſant pas plus d'effort qu'en comprimant le ſeul reſſort ACB ſous le même angle, & on prouveroit la même choſe s'il y avoit un plus grand nombre de reſſorts.

Que ſi au lieu de l'une des puiſſances A on met un plan immobile VX, il eſt évident que la puiſſance B ne fera pas plus d'effort pour comprimer les reſſorts ACD, DEF, FGH, &c. chacun ſous un angle de 30 degrés, que ſi elle n'en comprimoit qu'un. Tout ceci ſuppoſé, venons à la premiere démonſtration de M. Bernoulli.

Concevons, dit cet Auteur, *deux rangs de reſſorts égaux & également bandés, compoſés l'un de douze reſſorts & l'autre de trois, dont une des extrémités ſoit appuyée contre les points fixes* A, B (Fig. 28), *& l'autre arrêtée par les boules* L, P, *que des puiſſances* R *&* S *empêchent de ſe mouvoir ; il eſt viſible que les deux boules* L, P *ſont également preſſées, & que par conſéquent les Forces mortes qui preſſent ces boules ſont égales. Voyons ce que ces impreſſions ou Forces mortes miſes en œuvre peuvent produire de Forces vives. Pour cet effet, imaginons-nous que les puiſſances* R, S *ſe retirent, il eſt conſtant que les boules* L *&* P *ſeront obligées de ceder, & que dans le mouvement acceleré que leur imprimeront les reſſorts, la boule* L *acquerra plus de viteſſe par les efforts continués de douze reſſorts, que la boule* P *égale à la boule* L *n'en peut acquerir par les efforts continués de trois reſſorts.*

Je ſuppoſe deux lignes droites quelconques données AC, BD, (Fig. 29.) *que je prens pour deux rangs de petits reſſorts égaux & également bandés ;* (nous concevrons que ces deux droites ſont comme 12 à 3, afin de ne pas abandonner la ſuppoſition que M. Bernoulli a commencé de faire, ainſi qu'on vient de voir). *Je ſuppoſe de plus que deux boules égales commencent à ſe mouvoir des points* C, D *vers* F *&* L, *lorſque les reſſorts commencent à ſe dilater. Soient* CML, DNK *deux lignes courbes, dont les ordonnées*

GM, HN *expriment les vitesses acquises aux points* G, H; *je nomme* BD $=a$, *l'abscisse* DH $=x$, *sa différence* HP $=dx$, *l'ordonnée* HN $=u$, *& sa différence* TO $=du$; *je prens ensuite les abscisses* CG, CE *de la courbe* CML *telles qu'elles soient aux abscisses de la courbe* DNK, *comme* AC *est à* BD, *ou ce qui est la même chose, je fais* BD, AC :: DH, CG :: DP, CE, *& supposant* AC $=na$, *on aura* CG $=nx$, GE $=ndx$; *soit enfin l'ordonnée* GM $=z$, *tout ceci supposé je raisonne ainsi.*

Les boules étant parvenues aux points H *&* G, *chaque ressort, tant de ceux qui étoient resserrés dans l'intervalle* AC, *que de ceux qui l'étoient dans l'intervalle* BD, *sera dilaté également, parce que* AC, CG :: BD, DH; *chacun de ces ressorts aura donc perdu une partie égale de son élasticité, & il leur en restera à chacun également, donc les pressions ou les Forces mortes que les boules en reçoivent en* H *& en* G *sont aussi égales entr'elles; je nomme cette pression p. Or l'accroissement élementaire de la vitesse en* H, *je veux dire la différence* TO *ou du, est par la loi connue de l'acceleration en raison composée de la Force motrice ou de la pression p, & du petit tems que le mobile met à parcourir la différence* HP *ou dx, lequel tems s'exprime par* $\frac{HP}{HN}=\frac{dx}{u}$ (voyez ci-dessus N. 84.) *on aura donc* $du=\frac{pdx}{u}$, *& partant* $udu=pdx$, *dont l'integrale est* $\frac{1}{2}uu=\int pdx$; *par la même raison on a* $dz=\frac{p\times GE}{GM}=\frac{pndx}{z}$, *par conséquent* $zdz=pndz$, *& en integrant* $\frac{1}{2}zz=\int pndx$, *d'où il suit que* $uu, zz :: \int pdx, \int pndx :: 1, n :: a, na ::$ BD, AC; *or* BD *est à* AC *comme la Force vive acquise en* H *est à la Force vive acquise en* G, *donc ces deux Forces sont entr'elles comme uu est à zz; ainsi les Forces vives des corps égaux en masses sont comme les quarrés de leurs vitesses, & ces vitesses elles-mêmes sont comme les racines quarrées des Forces vives, ce qu'il falloit démontrer.*

Avant de réfuter cette preuve de M. Bernoulli, nous chercherons le rapport des tems pendant lesquels les deux boules se meuvent, & nous nommerons t le tems de la boule P (*Fig.* 28.) & T le tems de la boule L, il est sûr par les regles de la proposition que nous venons de citer (*N.* 84.) que nous aurons $t, T :: \int dx \times \frac{1}{\sqrt{\int pdx}}, n\int dx \times \frac{1}{\sqrt{n\int pdx}} :: \int dx \times \sqrt{n\int pdx}, n\int dx \times \sqrt{\int pdx}$. Or $\int dx$ est l'intégrale de DH (*Fig.* 29.) & $n\int dx$ est l'intégrale de CG, donc $\int dx=$ DH, & $n\int dx=$ CG; de même ayant trouvé ci-dessus $uu, zz :: \int pdx, n\int pdx$, nous aurons $u, z :: \sqrt{\int pdx}, \sqrt{n\int pdx}$; mettant

donc dans la proportion t, T $:: \int dx \times \sqrt{n\int pdx}$, $n\int pdx \times \sqrt{\int pdx}$ les valeurs DH, CG de $\int dx$, & $n\int dx$, & la raiſon u, z, au lieu de ſon égale $\sqrt{\int pdx}$, $\sqrt{n\int pdx}$, nous aurons t, T :: DH$\times z$, CG$\times u$; mais par la conſtruction nous avons DH, CG :: BD, AC, & nous avons trouvé BD, AC :: uu, zz; donc t, T :: uuz, zzu :: u, z, c'eſt-à-dire, le tems employé à la fin de l'eſpace DH eſt au tems employé à la fin de l'eſpace CG, comme la viteſſe acquiſe à la fin de DH eſt à la viteſſe acquiſe à la fin de CG.

De tout ce que nous venons de voir, il ſuit que le mouvement des deux boules eſt un mouvement uniformement acceleré, car la force morte ou preſſion des boules égales L, P, (*Fig.* 28.) eſt égale de même que leur peſanteur eſt égale, les eſpaces parcourus ſont entr'eux comme les quarrés des viteſſes, & les tems ſont comme les viteſſes; tout ſuit donc ici la loi de Galilée; or dans cette loi lorſque les eſpaces parcourus ſont égaux, les tems employés à les parcourir vont en diminuant, & les impreſſions de la peſanteur correſpondantes à ces tems inégaux diminuent auſſi, puiſque ces impreſſions ne ſont égales que lorſque les tems étant égaux, les eſpaces vont en augmentant; donc les forces des reſſorts qui tiennent ici lieu des impreſſions de la peſanteur, & dont les débandemens font parcourir des eſpaces égaux aux corps, font des impreſſions inégales ſur ces corps. Par exemple, le premier reſſort M fait plus d'impreſſion ſur L que le ſecond, & le ſecond en fait plus que le troiſiéme, & ainſi de ſuite, à cauſe que les tems correſpondans aux débandemens égaux vont en diminuant; ainſi quoique les douze reſſorts qui agiſſent ſur la boule L ſoient égaux entr'eux, cependant les impreſſions qu'ils font ſur cette boule vont en diminuant à meſure qu'ils en ſont plus éloignés, & il faut dire la même choſe des trois reſſorts qui agiſſent ſur la boule P. D'où il ſuit que les impreſſions des douze reſſorts ſur la boule L priſes enſemble, valent moins que les forces de ces douze reſſorts priſes enſemble, puiſque les forces des douze reſſorts ſont égales, au lieu que les impreſſions vont en diminuant, & par la même raiſon les impreſſions des trois reſſorts qui agiſſent ſur la boule P priſes enſemble valent moins que les forces de ces trois reſſorts. Or les forces agiſſantes des boules L, P, ſont proportionnelles aux impreſſions des reſſorts qui les pouſſent, puiſqu'elles en ſont les effets, donc ces forces ſont moindres que les forces des reſſorts, & par conſéquent elles ne ſont pas dans la raiſon des eſpaces ou des quarrés des viteſſes.

Il femble que M. Bernoulli auroit dû s'appercevoir du défaut de fon raifonnement.

Et pour faire voir que les forces des corps en mouvement font ici comme les viteffes de même que par-tout ailleurs, il n'y a qu'à confidérer que les viteffes étant comme $\sqrt{12}$ eft à $\sqrt{3}$, ou comme $2\sqrt{3}$ à $\sqrt{3}$, ou enfin comme 2 à 1, le tems de la boule L eft au tems de la boule P, comme 2 à 1; c'eft pourquoi fuppofant que les deux boules faffent effort pour refermer les refforts avec les viteffes acquifes à la fin des débandemens, la boule L ne confumera fa force qu'à la fin de deux tems à chacun defquels elle perdra un dégré de viteffe, à caufe de l'égalité des tems, & la boule P perdra fa force à la fin du premier tems, parce que la viteffe qu'elle perdra étant égale à la viteffe qu'elle avoit, il ne lui reftera rien; or comme la boule L ne continuera de fe mouvoir après le premier tems que parce que la viteffe qu'elle aura perdu en formant des refforts fur fon paffage, fera moins grande par rapport à fa viteffe totale, que la viteffe que la boule P aura perdu dans le même tems, n'eft grande par rapport à fa viteffe totale, & qu'au contraire en fuppofant que les viteffes ôtées à chaque boule dans un même tems fuffent proportionnelles à leurs viteffes totales, les deux boules perdroient toute leur force à la fin de ce premier tems; il s'enfuit que les forces de ces boules doivent être comme les viteffes qu'elles perdroient en même tems fi les viteffes perdues dans des tems égaux étoient proportionnelles aux viteffes acquifes, ou comme les efpaces qu'elles parcourroient dans le même-tems fi elles ne perdoient rien de leurs viteffes. Mais les portions proportionnelles des viteffes que les boules perdroient dans un même-tems, font comme les viteffes acquifes, & non pas comme leurs quarrés; donc les forces de ces boules ne font pas comme les quarrez des viteffes acquifes, mais fimplement comme ces viteffes.

L'argument que l'on tire contre les forces vives de la différence des tems, à paru fi fort à M. Bernoulli, qu'il n'a pris d'autre parti que celui de nier qu'on dût faire attention à cette différence; mais comme ce Sçavant Géometre n'ignoroit pas qu'on ne nie point une Propofition, fans donner les raifons qui engagent à prendre la négative, il s'eft appuyé fur une proprieté de la Cycloïde renverfée que nous démontrerons plus bas (*N.* 204.) Soient les deux corps A, B, (*Fig.* 30.) attachés à deux différens points A, B, de la demi-cycloïde renverfée ABC, fi l'on vient à cou-

per les fils qui les retiennent, & que ces corps ne puissent se mouvoir que le long de la demi-cycloïde, ils se mouvront d'un mouvement acceleré, puisque la demi-cycloïde est un polygone d'une infinité de côtés ou de plans inclinés, & que le mouvement sur des plans inclinés est un mouvement qui s'accelere (N. 186); cependant ces deux corps arriveront à la fin d'un même-tems au point C, quoique les espaces qu'ils ont à parcourir soient différens; donc si ces deux corps après être parvenus en C viennent à remonter avec leurs vitesses acquises, ils parviendront aussi dans un même-tems aux points A, B, d'où ils étoient partis, & par conséquent, dit M. Bernoulli, il est aisé de faire monter des corps pesants à différentes hauteurs dans des tems égaux.

Je ne sçai pas quel avantage M. Bernoulli prétend tirer d'une expérience qui se trouve directement opposée à ce qu'il veut établir. Deux corps égaux peuvent dans des tems égaux parcourir des espaces inégaux par un mouvement acceleré; cela est indubitable, & ne sçauroit même manquer d'arriver, quand les vitesses acquises avec lesquelles les corps remontent sont inégales; mais les espaces inégaux parcourus dans des tems égaux, seront-ils comme les quarrez des vitesses acquises, c'est ce que nous nierons toujours comme étant opposé aux loix du mouvement retardé, & ce que M. Bernoulli ne nous fera jamais trouver dans la cycloïde renversée; au contraire nous démontrerons plus bas dans l'endroit cité (*N.* 204.) que les espaces CA, CB, parcourus dans des tems égaux par les corps A, B, sont précisément comme les vitesses acquises à la fin de leur descente, & ceci seroit pour nous un nouveau motif d'attaquer les forces vives, si nous cherchions à entasser expérience sur expérience, plutôt qu'à établir un raisonnement décisif contre lequel on ne puisse plus revenir.

Après la prétendue Démonstration touchant les ressorts que nous venons de réfuter, M. Bernoulli en apporte une autre qu'il nomme géométrique & générale, & qui, à son avis, est si fort au-dessus de toute exception, qu'elle est seule capable de convaincre les partisans les plus obstinés de l'opinion vulgaire. Voyons si en effet elle a dequoi nous convaincre pleinement, ou si à notre tour, nous n'aurons pas quelque raison plus forte qui emportât le dessus. Ceux qui n'entendent pas les regles du mouvement composé, auront soin avant de lire ceci, de voir ce que nous enseignons touchant ce mouvement dans le Chapitre suivant.

Figurons-nous, dit M. Bernoulli, *que le corps* C (Fig. 31.) *frappe obliquement un ressort placé en* L, *avec la vitesse* CL; *soit l'angle d'obliquité* CLP *de* 30 *dégrés, afin que la perpendiculaire* CP *devienne égale à* $\frac{1}{2}$CL; *soit la vitesse* CL = 2, *& soit enfin la résistance du ressort* L, *telle que pour le plier il faille précisement un degré de vitesse dans le corps* C, *lorsque ce corps le heurte perpendiculairement; on suppose que le corps* C *se meut sur un plan horisontal. Ceci connu, je dis qu'après que le corps* C *aura choqué obliquement le corps* L *avec une vitesse* CL *de deux dégrez, vitesse qui, en vertu de la composition du mouvement, est composée de* CP = 1, *& de* PL = $\sqrt{3}$, *ce corps perdra entierement le mouvement perpendiculaire par* CP, *& ne retiendra que le mouvement par* PL = $\sqrt{3}$; *ainsi le corps* C *après avoir consumé son mouvement par* CP *à plier le premier ressort* L, *continuera à se mouvoir selon la direction* PLM *avec la vitesse* LM = PL = $\sqrt{3}$. *Concevons au point* M *un second ressort semblable au premier, & l'angle de l'obliquité* LMQ *tel que la perpendiculaire* LQ *soit* 1, *il est clair que le mouvement par* LM *étant composé des deux collateraux par* LQ *&* QM, *continuera selon la direction* QMN *avec une vitesse* MN *égale à* QM = $\sqrt{2}$; *imaginons au point* N *un ressort égal à chacun des précedens que le corps rencontre sous un angle demi-droit* MNR, *afin que* MR *perpendiculaire à la ligne de situation du ressort devienne égal à* 1. *Il est manifeste que le mouvement par* MN *composé des mouvemens par* MR *& par* RN *consumera le premier de ces mouvemens par* MR *à plier le ressort* N, *& par conséquent son autre mouvement par* RN *continuera avec une vitesse* NO = RN = 1; *le corps* C *conserve donc encore un dégré de vitesse suivant la direction* RNO, *après avoir plié les trois ressorts* L, M, N, *& c'est avec ce degré de vitesse qu'il pliera le quatriéme ressort* O *contre lequel je suppose qu'il heurte perpendiculairement.*

Il paroît de tout ceci que le corps C *a la force de plier avec deux degrez de vitesse quatre ressorts dont chacun demande pour être plié un degré de vitesse dans le corps* C. *Mais ces quatre ressorts pliés sont l'effet total de la force du corps* C *mû avec deux degrez de vitesse, puisque toute cette vitesse du corps* C *se consume à plier ces quatre ressorts l'un après l'autre, & un seul ressort plié est l'effet total de la force du même corps* C *mû avec un degré de vitesse, puisque la resistance de chaque ressort est telle qu'elle detruit precisement un degré de vitesse dans ce corps* C; *puis donc que les effets totaux sont entr'eux comme les forces qui ont produit les effets, il faut que la force vive du corps* C *mû avec deux degrez de vitesse soit quatre fois plus*

grande que la force vive du même corps mû avec un degré de vitesse.

Quand on soûtient une mauvaise cause, l'esprit & le sçavoir sont d'un très foible secours ; le raisonnement de M. Bernoulli montre assez que ce Geometre s'est servi habilement & de l'un & de l'autre, mais malgré la subtilité de ses raisons, il n'est pas difficile d'en découvrir le défaut.

Je ne sçaurois disconvenir qu'il n'y ait ici quatre dégrez de force, puisque les quatre ressorts n'agissant point l'un sur l'autre, demandent chacun un dégré pour être comprimé ; mais je nie que ces quatre dégrez de force soient produits uniquement par les deux dégrez de vitesse du corps C, & que les quatre ressorts n'ayent consumé que deux dégrez de vitesse, comme M. Bernoulli l'avance ici. Le corps C ayant perdu un dégré de vitesse par le choc du ressort L, n'en auroit plus qu'un dégré s'il continuoit à se mouvoir selon la même direction CL, c'est-à-dire si le ressort L eût été perpendiculaire sur la direction CL, & lui eût ôté un degré de vitesse ; mais comme il prend la direction LM, sa vitesse devient $\sqrt{3}$; or $\sqrt{3}$ étant plus grand que 1, il est constant que l'excès de vitesse que le corps C gagne dans la direction LM sur la vitesse 1 qui lui resteroit s'il suivoit sa premiere direction est $\sqrt{3}-1$; de même la vitesse $LM=\sqrt{3}$ étant diminuée de 1 après le choc du ressort M, il ne devroit rester au corps C que $\sqrt{3}-1$ de vitesse, mais il lui reste $\sqrt{2}$ plus grand que $\sqrt{3}-1$; donc ce que le corps gagne de vitesse est $\sqrt{2}-\sqrt{3}+1$; enfin la vitesse $MN=\sqrt{2}$ étant diminuée de 1 par le choc du ressort N, la vitesse restante après ce choc devroit être $\sqrt{2}-1$, mais cette vitesse restante est 1, donc le corps C a gagné $1-\sqrt{2}+1$; ajoûtant donc toutes ces vitesses gagnées par les différens changemens de direction, nous aurons $\sqrt{3}-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1+1-\sqrt{2}+1=2$, ainsi les changemens de direction ont augmenté la vitesse primitive 2 du corps C de deux dégrés de vitesse ; & par conséquent il y a eu à la fin du mouvement quatre dégrez de vitesses éteintes, de même qu'il y a eu quatre forces consumées ; or les quatre ressorts ayant été comprimés par des dégrez égaux de vitesse CP, LQ, MR, NO, & leur résistance ayant fait périr quatre forces égales, il s'ensuit que chacune de ces forces a été proportionnelle à la vitesse, & que par conséquent la somme des quatre forces, c'est-à-dire, la force totale du corps A, est comme la somme des quatre vitesses, & non pas comme le quarré de cette somme.

Il eſt vrai que la force éteinte par les quatre reſſorts eſt comme le quarré 4 de la viteſſe primitive du corps 2, mais comme cette viteſſe ne renferme pas toute la viteſſe qui a composé cette force, puiſqu'elle n'en eſt que la moitié, il faudroit donc dire que la force agiſſante eſt comme le quarré de la moitié de ſa viteſſe totale, encore ne ſeroit-ce que dans l'exemple preſent, car ſi au lieu de la viteſſe primitive 2, nous prenions 4, c'eſt-à-dire, ſi nous faiſions CL=4, & CP=1, ce qui demanderoit que l'angle de l'obliquité CLP fut plus aigu, alors en faiſant à peu près la même conſtruction que M. Bernoulli, nous trouverons que le corps C avec 4 de viteſſe pourroit former 16 reſſorts, dont chacun demanderoit un dégré de force pour être comprimé; ainſi la force totale ſeroit 16, & par conſéquent elle ſeroit comme le quarré 16 de la viteſſe primitive 4; mais comme 4 ne renfermeroit pas toute la viteſſe de cette force, puiſqu'il y auroit 16 viteſſes correſpondantes aux 16 reſſorts bandés, il faudroit dire que la force agiſſante ſeroit ici comme le quarré du quart de ſa viteſſe totale, tandis que dans le cas précédent il auroit fallu dire que la force agiſſante étoit comme le quarré de la moitié de toute ſa viteſſe; d'où l'on voit que la force agiſſante dans ces ſortes d'exemples n'a point de rapport fixe avec le quarré de ſa viteſſe totale, au lieu qu'elle eſt conſtamment comme cette viteſſe.

Ce n'eſt donc qu'à la décompoſition du mouvement, & non pas à aucune qualité des forces agiſſantes qu'il faut attribuer la différence des effets que produit un corps en mouvement lorſqu'il ſuit ſucceſſivement les directions des forces qui compoſent ſon mouvement; les forces compoſantes priſes enſemble ſont toujours plus grandes que la compoſée, par exemple, les viteſſes CP, PL priſes enſembles ſont plus grandes que la viteſſe CL qu'elles compoſent, c'eſt pourquoi ſi le corps C après avoir ſuivi la direction CL rencontre un obſtacle qui lui faiſant perdre le mouvement ſelon CP, l'oblige de ſe mouvoir ſelon LM qui eſt dans la direction PL, la viteſſe qu'il aura ſelon cette direction ſera plus grande que celle qu'il auroit euë après le choc, s'il avoit ſuivi la direction CL, ce qu'il auroit pû faire ſi le reſſort L avoit été perpendiculaire ſur CL, & ne lui avoit ôté ſur ſa direction qu'une viteſſe égale à CP. Donc en ſuivant la direction LM, il aura plus de force que s'il ſuivoit toujours la direction CL, & il eſt viſible qu'en décompoſant pluſieurs fois ſon mouvement, on augmentera ſa force & on le rendra capable de plus grands

grands effets; mais tout cela ne dit rien en faveur des Forces vives, & quoiqu'on veuille établir là-dessus, jamais on ne prouvera que ces forces soient comme les quarrés de leurs vitesses.

Pour mieux faire voir la fausseté de la prétention de M. Bernoulli, je n'ai qu'à montrer que s'il y a ici quatre dégrez de force agissante, il y a aussi quatre forces mortes qui tendent chacune selon sa direction à donner 1 de vitesse, & que par conséquent les forces agissantes sont ici dans la même raison que les forces mortes; or voici comme je le prouve: la vitesse CL est composée de CP, PL; la vitesse PL ou LM est composée de LQ, QM, & la vitesse QM ou MN est composée de MR, RN ou NO; donc la vitesse CL est composée des quatre CP, LQ, MR, RN qui sont égales entr'elles. Menant donc par le point C la droite CZ égale & parallele à LQ, la droite CX égale & parallele MR, & la droite CT égale & parallele à NO, la force CL sera composée des quatre forces mortes CP, CZ, CX, CT, qui toutes tendront à donner au corps C selon leurs directions un dégré de vitesse; c'est pourquoi si le corps C choque successivement selon ces quatre directions, il y aura quatre dégrez de force agissante correspondans aux quatre forces mortes, & si le corps C suit toujours la direction CL, il n'y aura que deux dégrez de force agissante correspondans à une force morte qui tendroit à donner sur CL les deux dégrez de vitesse que les quatre forces mortes tendent à donner au corps selon cette direction CL. Donc les forces agissantes sont comme les forces mortes, mais celles-ci sont comme les vitesses qu'elles tendent à donner; donc les forces agissantes sont aussi comme leurs vitesses, & non pas comme leurs quarrez; & si elles sont comme le quarré de la vitesse qui suivroit toujours la direction CL, c'est que les forces mortes qui composent cette vitesse, sont aussi comme le quarré de la vitesse de cette direction.

Je pourrois rapporter ici quelques autres prétendues Démonstrations que les Partisans de M. Leibnits apportent pour soutenir son sentiment, mais comme les réfutations que j'en ferois rouleroient à peu près sur les mêmes principes, je me contenterai de dire que les Auteurs qui prennent ce parti se trompent, ou en négligeant la différence des tems, ou en prétendant mesurer les forces par les produits des masses par les espaces, ou enfin dans le mouvement composé en prenant une partie des vitesses pour les vitesses totales.

J'achevois de répondre à la derniere preuve de M. Bernoulli, lorſque j'appris que M. de Mairan avoit traité des Forces vives dans ſa ſçavante Diſſertation imprimée en 1728. dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Le mérite & la réputation de cet illuſtre Académicien, joint au deſir que j'avois de profiter de ſes lumieres, me porterent à m'addreſſer directement à lui. Il me reçut avec ſa politeſſe ordinaire, & loin d'être piqué que j'euſſe écrit ſur un ſujet qu'il avoit ſi bien diſcuté, comme il arrive à quelques Sçavans hériſſés & jaloux qui s'imaginent qu'on leur fait tort quand on écrit après eux, il m'exhorta lui-même à continuer mon travail ; mais ſa modeſtie ne lui permettoit pas de voir que ſa Diſſertation dont il me faiſoit part alloit bientôt me faire tomber la plume des mains. En effet, à la premiere lecture que j'en fis, j'y trouvai des preuves ſi ſolides & ſi convaincantes contre le ſentiment des Forces vives, que je crus qu'il étoit inutile de revenir ſur une queſtion qui avoit été ſi clairement réſolue. Ce ne fut même qu'en faveur des perſonnes qui n'ont point les Memoires de l'Academie que je laiſſai ſubſiſter dans ma Mechanique Générale ce que javois déja écrit. Je ſerois toujours reſté dans le même ſentiment, ſi les *Inſtitutions de Phyſique* n'avoient été miſes au jour : l'érudition & le ſçavoir qui paroît dans cet Ouvrage méritent bien qu'on marque le cas qu'on en fait, en répondant à ce qui s'y trouve d'oppoſé à notre façon de penſer ; ce n'eſt pas que j'aye deſſein d'examiner tout ce qui y eſt rapporté en faveur des Forces vives, la plûpart des preuves étant les mêmes que celles de MM. Leibnits & Bernoulli que j'ai réfutées ci-deſſus ; je ne pourrois les diſcuter de nouveau ſans tomber dans des redites dont je m'aſſure que tout Lecteur raiſonnable voudra bien me diſpenſer. Mais il n'en eſt pas de même à l'égard d'un article des Inſtitutions de Phyſique, où la Diſſertation de M. de Mairan eſt attaquée, & ſi je ne dois pas avoir la témérité de croire que je puiſſe donner quelque dégré de clarté aux Ecrits de ce célebre Geometre ; du moins je dois aimer aſſez la verité pour faire voir à mes Lecteurs qu'on tâchera toujours vainement de l'obſcurcir dans un Ouvrage où elle a été miſe dans tout ſon jour.

M. de Leibnits inventeur des Forces vives, ſemble n'avoir appuyé ſon ſentiment que ſur la premiere preuve que nous avons réfutée ci-deſſus. Que deux corps A, B, (*Fig.* 242.) commençant à tomber des points A & B parcourent l'un l'eſpace AC, dans

deux ſecondes, & l'autre l'eſpace BD dans une ſeconde ; les eſpaces AC, BD, ſeront entr'eux comme les quarrez 4, 1, des tems 2, 1, & les viteſſes acquiſes à la fin de ces tems ne ſeront que comme les tems mêmes, ou comme 2, 1 ; cependant ſi l'on conçoit que ces corps étant parvenus en C & D, ſoient repouſſés en haut avec leur viteſſe acquiſe, le corps A remontera en A dans un tems égal à celui qu'il a employé à deſcendre de A en C, & le corps B remontera en B dans un tems égal à celui qu'il a employé à parvenir de B en D, tout le monde convient de ceci. Or, diſoit M. de Leibnits, les eſpaces que deux Forces font parcourir à deux corps, ſont la meſure la plus naturelle qu'on puiſſe aſſigner à leurs quantités, & ces eſpaces ſont ici comme les quarrés des viteſſes acquiſes à la fin des tems, donc les Forces qui font remonter les corps A, B, ſont comme les quarrés de leurs viteſſes ; mais ces Forces ſont des Forces vives, car elles ſont acquiſes par un mouvement actuel & dans des tems finis & déterminés, donc les Forces vives ſont entr'elles comme les quarrés des viteſſes, en ſuppoſant les maſſes égales comme nous faiſons ici, ou comme les produits des maſſes par les quarrés des viteſſes ſi les maſſes ſont inégales.

Si cette preuve de M. de Leibnits pouvoit reſter ſans replique, elle ſuffiroit pour donner gain de cauſe aux Partiſans des Forces vives ; mais au contraire, ſi on parvient à démontrer ſa fauſſeté, toutes les autres qu'on nous objecte doivent néceſſairement tomber d'elles-mêmes, non-ſeulement par le rapport qui ſe trouve entre les expériences ſur leſquelles on les fonde, & celle que nous venons de rapporter, mais encore parce qu'on ne pourroit nous dire pourquoi ces Forces ſe trouveroient ici en défaut, tandis qu'on voudroit les faire ſubſiſter dans tous les autres cas. C'eſt donc à ce point principal d'où dépend la déciſion du différent que M. de Mairan s'eſt attaché avec le plus de ſoin ; d'abord il nous fait voir que les eſpaces que deux différentes Forces font parcourir à des corps égaux ne ſauroient être la meſure des quantités de ces Forces que dans la ſuppoſition de l'égalité des tems ; or il eſt viſible que les tems ſont ici différens puiſqu'ils ſont comme 2, 1, donc les eſpaces AC, BD ne ſont pas la meſure des Forces qui font remonter les corps en A & B. Cette réponſe a toute la ſolidité qu'on peut demander ; en fait de mouvement ſi l'on n'a égard à tout ce qui eſt renfermé dans ſon idée, je veux dire à la maſſe, à l'eſpace & au tems ; on ſe met-

ra toujours en danger de tomber dans l'erreur, & dans les cas particuliers où l'on ne se sera point trompé, il arrivera par hazard que les choses qu'on aura négligées seront égales, ce qui verifiera la conclusion qu'on aura tirée sans justifier le raisonnement. Et qu'on ne dise point qu'il y a une distinction à faire entre les Forces uniformes & les Forces retardées; je sais que celles-ci rencontrent à chaque pas des obstacles, qui les affoiblissant peu à peu, les font enfin périr; & qu'au contraire celle-là ne rencontrant point d'obstacles, conservent toujours une entiere vigueur, mais ces obstacles ne changent point la valeur intrinseque des Forces. Il sera toujours vrai de dire qu'une Force comme deux sera toujours comme deux, soit qu'elle soit détruite par une cause étrangere, ou qu'elle ne le soit pas, ce qui aura été détruit ne sera jamais que 2, de même qu'en ôtant la cause qui détruit on ne retrouvera que deux.

Il paroît donc que M. de Mairan auroit pû s'en tenir à la réponse que nous venons de rapporter; mais comme on se seroit peut-être imaginé qu'en négligeant la différence des tems, il devoit du moins admettre que les Forces agissantes sont dans la raison des quarrés de leurs vitesses; il pousse la chose plus loin, & recherchant la véritable cause des effets qui ont occasionné la question, il nous fait voir, que malgré la diversité des tems, les Forces agissantes ne sont que comme leurs vitesses & non pas comme leurs quarrés. *Ce ne sont point*, dit-il, *les espaces parcourus par le mobile dans le mouvement retardé qui donnent l'estimation & la mesure de la Force motrice, mais les espaces non parcourus, & qui l'auroient dû être par un mouvement uniforme dans chaque instant; ces espaces non parcourus sont en raison des simples vitesses, & partant les espaces qui répondent à une Force motrice retardée ou decroissante en tant qu'elle se consume dans son action, sont toujours proportionnels à cette Force & à la vitesse du mobile, tant dans les mouvemens retardés que dans le mouvement uniforme.* Cette assertion qui paroît une espece de paradoxe, comme M. de Mairan l'avoue lui-même, se trouve démontrée dans toute la rigueur geométtique dans sa Dissertation, & l'on peut dire que c'est ici le plus rude coup que les Forces vives ayent jamais essuyé. L'Auteur des Institutions de Physique a l'esprit trop pénétrant pour ne l'avoir pas senti; quoique l'Ouvrage de M. Mairan contienne grand nombre d'autres preuves, qui toutes tendent à la destruction des Forces vives; il ne s'est attaché qu'à celle-ci, convain-

cu, peut-être, que si l'on pouvoit une fois la reduire au neant, toutes les autres seroient faciles à dissiper ; à son avis M. de Mairan n'a rien oublié de tout ce qu'on peut dire en faveur d'une mauvaise cause ; mais son raisonnement est toujours vicieux dans le fonds, & plus il est séduisant, plus il se croit obligé de faire sentir aux Lecteurs que la doctrine des Forces vives n'en peut souffrir aucune atteinte. Je rapporterai bientôt, & la démonstration de M. de Mairan, & les raisons que lui oppose l'Auteur des Institutions de Physique ; mais auparavant je suis bien aise de rappeller en peu de mots ce qui regarde la nature & les proprietés des mouvemens accelerés & retardés, & d'en tirer quelques conséquences qui mettront le Lecteur en état de juger plus facilement du parti que l'on doit prendre dans cette question.

Soit le corps A (*Fig.* 243.) qui commence à tomber du point A, & qui se meut pendant un tems représenté par la ligne AF, que je suppose divisé en quatre petits tems égaux finis & déterminés AC, CD, DE, EF, supposons aussi que l'espace parcouru pendant le premier tems AC soit représenté par le triangle ACH. Il est sûr que si à la fin du tems AC la pesanteur cessoit d'agir sur le corps A, & que ce corps ne se meut que par la vitesse acquise à la fin de ce tems, l'espace CHMD qu'il parcourroit pendant le second tems CD, seroit double de l'espace ACH parcouru pendant le premier tems, personne ne disconvient de ceci, & en effet, il est clair qu'une vitesse acquise & uniforme doit faire parcourir un espace double de celui qui a été parcouru avec une vitesse qui s'est augmentée par des accroissemens insensibles & égaux, en supposant l'égalité des tems de part & d'autre. Or tandis que la vitesse acquise à la fin du tems AC feroit parcourir au corps A l'espace CHDM pendant le tems CD, la pesanteur de son côté, si elle agissoit toute seule, lui feroit parcourir dans le même tems CD l'espace HMN égal à l'espace ACH qu'elle auroit fait parcourir dans le premier instant ; car la pesanteur agissant toujours de la même maniere sur le corps, les accroissemens de vitesse qu'elle donne dans des tems égaux sont égaux ; laissant donc agir la vitesse acquise à la fin du tems AC & la pesanteur, l'espace parcouru pendant le tems CD sera CHND, & cet espace sera composé de deux parties dont l'une CHMD seroit parcourue avec une vitesse uniforme, si elle agissoit seule, & l'autre HNM sera parcourue avec une vitesse accelerée. Il est aisé de voir que si la vitesse acquise pendant le tems

CD agiſſoit ſeule ſur le corps pendant le tems DE, l'eſpace parcouru MNZX ſeroit double de HNM, & que laiſſant agir cette viteſſe conjointement avec la peſanteur & avec la viteſſe acquiſe à la fin du tems AC, l eſpace parcouru DNOE ſera composé de trois parties, dont les deux DMXE, MNZX ſeroient parcourues avec des viteſſes uniformes & égales, ſi elles agiſſoient ſeules, & la troiſiéme NOZ ſera parcourue avec une viteſſe accelerée, & continuant le même raiſonnement, on trouvera que les eſpaces parcourus, à l'exception du premier, ſont tous parcourus par un mouvement dont une partie ſeroit uniforme & l'autre accelerée, c'eſt-à-dire le mouvement du premier eſpace ſeroit acceleré, celui du ſecond auroit une partie uniforme & l'autre accelerée, celui du troiſiéme en auroit deux uniformes & l'autre accelerée & ainſi de ſuite.

Et il faut obſerver que quoique je diſe que chacun des eſpaces eſt parcouru avec des viteſſes, dont les unes ſeroient uniformes ſi elles agiſſoient ſeules, & dont la derniere eſt accelerée; je ne veux pas dire pour cela qu'une partie de ces eſpaces ſoit parcourue uniformement, & l'autre d'une maniere accelerée, car les viteſſes uniformes & l'accelerée agiſſant enſemble ne forment qu'une ſeule viteſſe accelerée dans chaque eſpace.

Puiſque la viteſſe acquiſe à la fin du tems AC feroit parcourir l'eſpace CHMD dans le tems CD, que celle-ci jointe à la viteſſe que la peſanteur auroit ajoûté à la fin du tems CD, c'eſt-à-dire toute la viteſſe acquiſe à la fin des deux tems AC, CD, feroit parcourir pendant le tems DE l'eſpace DNZE, & ainſi de ſuite, il s'enſuit que les viteſſes acquiſes à la fin des tems AC, AD, AE, AF, ſont comme les eſpaces CHDM, DNZE, EOKF, FPIL; mais ces eſpaces ayant les hauteurs égales, ſont comme leurs dimenſions inégales, CH, DN, EO, FP, & à cauſe des triangles ſemblables ACH, ADN, &c. ces dimenſions CH, DN, &c. ſont comme les tems AC, AD, &c. donc les viteſſes acquiſes à la fin des tems AC, AD, &c. ſont comme les tems; mais à cauſe des mêmes triangles ſemblables, les eſpaces ACH, ADN parcourus à la fin des tems AC, AD, &c. ſont comme les quarrés de ces tems, donc les eſpaces parcourus à la fin des tems AC, AD, ſont comme les quarrés des tems, tandis que les viteſſes ne ſont que comme les tems.

Les Forces acquiſes à la fin des tems AC, AD, *&c. ſont comme les viteſſes acquiſes à la fin de ces mêmes tems;* car les viteſſes ac-

quises sont comme les espaces CHDM, DNZE, EOKF, &c. qu'elles feroient parcourir dans des tems égaux CD, DE, EF, &c. & les espaces parcourus dans des tems égaux, sont la mesure la plus naturelle des quantités des Forces qui font parcourir ces espaces, ce que les Partisans des Forces vives ne peuvent nier, puisqu'ils l'admettent même lorsque les tems ne sont pas égaux; donc les Forces acquises à la fin des tems AC, AD, &c. sont comme les vitesses acquises à la fin de ces mêmes tems.

De ce que nous venons de prouver, il suit nécessairement qu'il n'y a point de différence entre les vitesses acquises & les Forces acquises à la fin des mêmes tems; or les Partisans des Forces vives conviennent que les vitesses acquises sont comme les tems AC, AD, donc ils doivent convenir aussi que les Forces acquises sont comme les tems, mais les Forces acquises à la fin des tems AC, AD, &c. sont des Forces agissantes, puisqu'elles sont acquises par un mouvement actuel & après un tems déterminé, donc les Forces agissantes sont comme les tems ou comme les vitesses, & non pas comme les quarrés.

Je vois bien qu'on me dira que les Forces dont je parle sont des Forces uniformes, au lieu que M. de Leibnits parloit des Forces retardées, mais je redirai aussi que les Forces uniformes & les retardées n'ont rien en elles-mêmes qui puisse les distinguer, & que toute la différence qu'on y trouve ne venant que des obstacles que les unes rencontrent tandis que les autres n'en rencontrent point, tout ce qu'il en arrive, c'est que celles-ci se trouvent affoiblies peu à peu & perissent même totalement, tandis que celles-là sont toujours dans la même vigueur. Pour s'en convaincre pleinement on n'a qu'à supposer que deux corps d'égale masse soient poussés avec des vitesses égales, mais que l'un rencontre sur sa route d'autres corps, qui par leur choc détruisent peu à peu son mouvement, & que l'autre n'en rencontre point, celui qui aura été choqué se trouvera en repos, tandis que l'autre continuera à se mouvoir & parcourra par conséquent un espace plus grand; dira-t-on pour cela que ces deux corps n'ont pas été poussés avec des forces égales; c'est ce que je ne crois pas qu'aucun Geométre ou Physicien ose jamais avancer, & ce qui me fait croire aussi qu'on ne soutiendra jamais qu'une Force qu'on transforme d'uniforme en retardée, ou de retardée en uniforme, puisse être différente d'elle-même, mais allons plus avant.

Supposons qu'un autre corps B (*Fig.* 243.) commençant à tom-

ber du point B, ſe meuve pendant les tems B*c*,*cd* égaux chacun à chacun aux tems AC, CD, l'eſpace B*ch* parcouru par le corps B pendant le tems B*c* ſera égal à l'eſpace ACH parcouru par le corps A pendant le tems AC=B*c*, & l'eſpace B*dn* que B parcourra pendant le tems B*d*, ſera égal à l'eſpace ADN que A parcourra pendant le tems AD; & comme les viteſſes ou les Forces acquiſes par le corps B à la fin des tems B*c*, B*d* feront entr'elles comme les droites *ch*, *dn* égales chacune à chacune aux droites CH, DN, à cauſe de la ſimilitude des triangles B*ch*, ACH; B*dn*, ADN, & des hauteurs égales B*c*, AC; B*d*, AD, il s'enſuit que la viteſſe ou Force acquiſe du corps B à la fin du tems B*c* ſera à la viteſſe ou Force acquiſe du corps A à la fin du tems AF, comme *dn* eſt à FP ou comme 2 à 4, ou comme 1 à 2; maintenant ſuppoſons que les deux corps A, B ayant parcouru les eſpaces AFP, B*dn*, à la fin des tems AF, B*d* ſoient repouſſés en haut avec leurs viteſſes acquiſes à la fin de ces tems, il eſt clair que ſi la peſanteur ceſſoit d'agir ſur ces corps, le corps A parcourroit l'eſpace ARPF double de l'eſpace APF dans un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir APF; car ſa viteſſe ou Force acquiſe à la fin du tems AF lui feroit parcourir pendant le tems EF l'eſpace FPQE, qui eſt le quart du rectangle FPRA, & comme cette viteſſe ſeroit uniforme, puiſque nous ſuppoſons qu'elle ne trouveroit point d'obſtacles, il s'enſuit qu'elle feroit parcourir au corps A le rectangle FPRA quadruple du rectangle FPQE dans le tems FA quadruple de FE; par la même raiſon le corps B parcourroit l'eſpace *dnu*B double de l'eſpace B*dn*, dans un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir B*dn*, & ces deux eſpaces FPRA, *dnu*B, ſeroient entr'eux comme 4 à 1, à cauſe que les baſes FP, *dn*, & les hauteurs AF, B*d* ſont entr'elles comme 2 à 1, ainſi les eſpaces parcourus ſeroient en raiſon doublée des viteſſes acquiſes, ou des viteſſes qui obligeroient les corps A, B à remonter.

Que ſi nous laiſſons agir la peſanteur ſur les deux corps A, B pendant qu'ils remonteront, il arrivera que pendant le tems EF la peſanteur empêchera le corps A de parcourir l'eſpace OQP, car la peſanteur agiſſant uniformement ſur le corps, ſoit qu'il deſcende ou qu'il monte, elle doit l'empêcher en montant pendant un tems, de parcourir un eſpace OQP égal à l'eſpace OKP qu'elle lui feroit parcourir dans le même tems s'il deſcendoit; ainſi la viteſſe qu'elle fera perdre au corps en montant

tant pendant le tems EF, étant égale à celle qu'elle lui auroit fait acquerir en descendant pendant le même tems, laquelle vitesse acquise lui feroit parcourir dans un tems semblable un espace semblable & égal à l'espace KOPQ; il ne doit plus rester au corps A, à la fin de ce tems, qu'une vitesse, laquelle ne lui feroit parcourir pendant le tems ED que l'espace EOTD, si elle ne rencontroit point d'obstacles; mais comme la pesanteur s'oppose toujours à son passage, le corps A perdra pendant ce tems la partie de cette vitesse qui lui auroit fait parcourir un espace semblable & égal à ZOTN; & continuant ce même raisonnement, on trouvera que les vitesses perdues pendant les tems FE, ED, DC, CA, sont représentées par les espaces KPOQ, ZOTN, MNYH, CHAG, lesquels pris ensemble sont égaux à l'espace FPQE, que le corps auroit parcouru dans le premier tems EF, & qui représente la vitesse acquise avec laquelle le corps remontoit; par la même raison, le corps B en remontant aura perdu des vitesses représentées par les espaces *mnyh*, *chg*B, qui pris ensemble sont égaux à l'espace *dnyc* qui représente la vitesse acquise avec laquelle il remontoit; or les espaces réellement parcourus par les corps A, B en remontant étant les triangles AFP, B*dn*, qui sont moitiés des rectangles AFPR, B*dnu*, qu'ils auroient parcouru s'ils n'avoient point trouvé de resistance; il est évident que ces espaces sont encore entr'eux comme les quarrés des vitesses qui font remonter les corps, d'où il semble d'abord qu'il faut faire une distinction entre les vitesses & les Forces des corps, à cause que les vitesses étant comme 2 à 1, les espaces que l'on confond mal-à-propos avec les Forces dans le cas present, sont comme 4 à 1.

Pour lever cette difficulté, on répond d'abord, que les espaces ne sont ici comme 4 à 1, que parce que la premiere Force agit dans un tems double de celui qui est employé par la seconde Force; & en effet, si on ne laisse agir la force uniforme du corps A, que pendant le tems FD égal au tems *d*B de la Force uniforme du corps B, on trouvera aisément que le corps A parcourra un espace qui ne sera à l'espace parcouru par B que comme 2 à 1, ou comme la vitesse acquise de A à la vitesse acquise de B; mais comme on pourroit prétendre que la diversité des tems en augmentant l'espace parcouru par A augmente aussi la Force de ce corps, nous allons montrer que cette Force est la même, soit qu'elle agisse pendant les deux tems FE, ED, ou qu'elle

agisse pendant les quatre, FE, ED, DC, CA.

Les effets étant toujours proportionnels à leurs causes, on ne peut mieux juger de la quantité d'une Force qui se détruit en agissant, que par les obstacles qui causent sa destruction. Or les obstacles qui détruisent la force de A sont les impressions de la pesanteur, lesquelles font périr au premier instant FE la vitesse qui feroit parcourir un espace égal à KPQO, au second la vitesse qui feroit parcourir un espace égal à ZOTN, au troisiéme celle qui feroit parcourir un espace égal à MNYH, & au quatriéme celle qui feroit parcourir un espace égal à CHGA; donc ces impressions ou obstacles sont comme les espaces KPQO, ZOTN, MNYH, CHGA; par la même raison les obstacles qui font périr & consumer la Force de B, sont comme *mnyh*, *chg*B, mais les quatre espaces KPQO, ZOTN, MNYH, CHGA, sont aux espaces *mnyh*, *chg*B, comme 4 à 2, ou comme 2 à 1, donc les obstacles qui détruisent les Forces de A & de B sont comme 2 à 1, & par conséquent les Forces sont comme 2 à 1 ou comme leurs vitesses.

On voit par là que la seule considération des mouvemens accelerés & retardés nous découvre, 1°. Que la vitesse d'un corps multipliée par la masse n'est point différente de sa force, soit que le mouvement soit uniforme ou qu'il soit acceleré, ou retardé. 2°. Que la force n'augmente point par la plus grande durée du mouvement. 3°. Enfin que M. de Mairan a eu raison de dire que ce sont les espaces non parcourus & qui l'auroient dû être par un mouvement uniforme, qui donnent l'estimation & la mesure de la Force motrice dans le mouvement retardé; les espaces non parcourus par le corps A, c'est-à-dire les espaces que la pesanteur a empêché de parcourir sont au premier instant l'espace PQO, au second l'espace OTN, au troisiéme l'espace NYH, & au quatriéme l'espace HGA; de même les espaces non parcourus par le corps B sont au premier instant l'espace *nyh*, & au second l'espace *hg*B, mais ces espaces non parcourus de part & d'autre étant comme 4 à 2, sont en même raison que les obstacles qui ont détruit leurs Forces, donc puisque les Forces sont comme les obstacles qui les détruisent, elles sont aussi comme les espaces non parcourus. Mais il est tems de faire voir comment M. de Mairan démontre lui-même la Proposition que nous avons rapportée ci-dessus; c'est à la page 29 de la premiere édition de sa

Dissertation, ou à la page 67 de la seconde édition qu'il s'explique ainsi. *

Concevons deux mobiles égaux A *&* B (Fig. 244.) *qui remontent sur les lignes* AD *de* 4 *toises* Bd, *de* 2 *toises, l'un savoir* A *avec deux degrez de vitesse, & l'autre* B *avec un degré. Si rien ne s'opposoit à la Force motrice du corps* B, *c'est-à-dire si le mouvement étoit uniforme,* B *parcourroit au premier tems les deux toises* Bd *sans rien perdre de cette force ni du degré de vitesse dont elle resulte ; mais parce que, par hypotèse, les impulsions contraires de la pesanteur qui lui sont continuellement appliquées pendant ce tems achevent de consumer sa Force & sa vitesse, & l'arrêtent enfin lorsqu'il est parvenu à la fin b de la premiere toise, le mobile* B *ne parcourra qu'une toise dans son mouvement retardé, & je dis de même du mobile* A ; *il auroit parcouru dans le premier instant les quatre toises* AD, *mais les impulsions contraires de la pesanteur l'ont fait, pour ainsi dire reculer d'une toise* DC *pendant ce tems, de sorte qu'il n'en a parcouru réellement que trois, & ces impulsions contraires ont consumé ou detruit en lui un degré de force & un degré de vitesse, comme ils ont fait dans le corps* B *pendant un tems semblable ; mais parce que le corps* A *avoit* 2 *degrez de force &* 2 *de vitesse, il lui en reste encore* 1, *& il se trouve par là en* C, *& à la fin du premier tems dans le cas où se trouvoit le corps* B *au commencement de ce premier tems. Il a donc tout ce qu'il faut pour parcourir encore* 2 *toises* CE, *en un second tems semblable au premier, si aucune impulsion contraire ne s'y oppose ; mais les impulsions contraires de la pesanteur vont s'y opposer de la même façon qu'elles se sont opposées au mouvement du corps* B, *donc le corps* A *ne parcourra pendant ce second tems que la toise* CD, *ayant pour ainsi dire reculé de l'autre toise* ED *en vertu du retardement, ou des impulsions contraires à sa Force motrice, après quoi il s'arrêtera en* D, *comme le corps* B *en b, de sorte qu'il n'aura parcouru en tout dans les deux tems de son mouvement que* 4 *toises. Ce sont ces espaces* Bd, CD *dans le premier instant, &* DE *dans le second, & ainsi de suite, que j'appelle non parcourus ; ils sont non parcourus relativement à la Force motrice des corps* A, B, *& à leur direction donnée de* B *vers d, & de* A *vers* E, *à laquelle seule on fait attention ; quoi qu'en un sens ils soient très-réellement parcourus en valeur, en direction contraire, & par l'effet d'une autre Force motrice opposée à*

* La premiere édition est in-4. & se trouve à la tête des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'année 1728, & la seconde qui vient de se faire est in 12, & se vend à Paris chez Jombert, Libraire rue S. Jacques.

la premiere, qui s'y mêle, & qui la modifie continuellement, comme feroit le mouvement contraire d'un plan sur lequel le mobile seroit porté.

Et à la page 33 de la premiere édition, & 75 de la seconde, M. de Mairan continue ainsi. *Les espaces non parcourus à chaque instant representent la Force perdue & consumée à cet instant, ou ce qui revient au même, l'effort de la puissance contraire qui la détruit, ou qui la consume en s'exerçant contre elle; mais la somme de toutes les Forces perdues ou de tous les efforts contraires est égale à la Force totale du mobile. Donc, &c.*

Les espaces Bb, AC *parcourus par le mobile dans le premier instant, sont l'effet de la Force constante & conservée, & non de la Force retardée ou perdue; ainsi ils ne doivent point mesurer la perte qui s'en est faite dans le tems employé à les parcourir. Cette perte, dis-je, s'est faite en les parcourant & non à les parcourir, elle doit être repandue sur ces espaces, & sur le tems employé à les parcourir; mais elle n'a d'effet réel, & n'apporte du changement à la Force motrice totale, & ne la fait decroitre que proportionnellement à l'espace non parcouru, ou à la valeur de l'espace non parcouru repandue ou retranchée continuellement sur les portions correspondantes d'espaces parcourus; l'espace parcouru n'exprime que la repetition de la Force totale ou de la partie qui en est conservée, espace qui seroit infini si elle étoit toujours conservée, quelque finie qu'elle pût être. C'est donc l'espace non parcouru* Bd, CD, DE, *qui mesure sa partie perdue ou consumée, celle là même qui fait le complement de la totale, avec celle qui s'est conservée à chaque instant, & qui se seroit conservée de même si le mouvement eût été uniforme, & s'il eût fait parcourir au mobile l'espace qu'il ne parcourt pas faute d'uniformité.*

Il est clair que les espaces bd, CD, DE, *qui ne sont que l'unité répetée à chaque instant & à chaque dégré de vitesse perdu, sont égaux en nombre aux instans, & aux dégrés de vitesse; & par conséquent* que leur somme est égale ou proportionnelle à la simple vitesse initiale du mouvement retardé; *mais leur somme est égale à la force du mobile* (ce qui a été démontré ci-dessus) *; donc la force est proportionnelle à la simple vitesse, soit qu'on la considere dans un instant particulier de son action, soit qu'on la considere dans la somme des instans de sa durée & de son action totale.*

Après une Demonstration aussi nette & geometrique que celle-ci, on avoit lieu d'esperer que les partisans de l'opinion contraire se rendroient enfin à une verité qui leur étoit si clairement

expliquée. Mais les noms de MM. Leibnits & Bernoulli sont si célébres, qu'il semble qu'on ait tort d'opposer des Démonstrations à leur autorité.

Voici de quelle maniere l'Auteur des Institutions de Physique attaque ce qui vient d'être rapporté : *Pour sentir*, dit-il, pag. 430. *le vice de ce raisonnement, il suffit de considerer l'action de la pesanteur comme une suite infinie de ressorts égaux qui communiquent leurs forces en descendant, & que le corps referme en remontant ; car alors on verra que les pertes d'un corps qui remonte, sont comme le nombre des ressorts, c'est-à-dire, comme les espaces parcourus, & non pas comme les espaces non-parcourus.*

La comparaison que l'on fait des impressions de la pesanteur avec les impressions d'une suite de ressorts égaux a quelque chose de brillant qui éblouit d'abord, mais quand on examine la chose de près, on y trouve un défaut de parité si sensible, qu'il paroît surprenant que M. Bernoulli ait pû s'y laisser prendre le premier. Lorsqu'un corps se meut en conséquence des impressions toujours égales de la pesanteur, les espaces parcourus d'une impression à l'autre, vont en augmentant dans la raison des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. & les tems sont égaux ; d'où il suit que si l'on divise en espaces égaux, l'espace total qu'un corps doit parcourir pendant un tems déterminé, les impressions de la pesanteur d'un espace à l'autre iront en diminuant, & les tems employés à parcourir ces espaces égaux diminueront aussi à mesure qu'ils s'éloigneront du mouvement ; cela est incontestable dans le sistême de Galilée que les Défenseurs des forces vives reçoivent de même que nous. Si l'on veut donc établir une comparaison juste entre les impressions de la pesanteur & les impressions d'une suite de ressorts égaux, il faut, ou qu'on dise que les espaces parcourus en conséquence des impressions successives des ressorts sont comme les nombres 1, 3, 5, 7, &c. & que les tems employés à les parcourir sont égaux, ou qu'on veuille au contraire que ces espaces soient tous égaux, & que les tems aillent en diminuant de même que les impressions. Mais on ne peut vouloir que les espaces parcourus d'une impression à l'autre, augmentent dans la progression des nombres impairs ; car M. Bernoulli a démontré lui-même, comme on a vû ci-dessus, que les espaces parcourus par la boule P (*Fig.* 28.) en conséquence des impressions des trois ressorts BN sont aux espaces parcourus par la boule L en conséquence des impressions des douze ressorts

AM, comme 3 à 12, c'eſt-à-dire, comme les nombres des reſſorts ou des impreſſions faites ſur P, eſt au nombre des reſſorts ou des impreſſions faites ſur L, & cela ne ſçauroit être ſi ces eſpaces alloient en augmentant, puiſqu'en ce cas les eſpaces parcourus par P ſeroient aux eſpaces parcourus par L comme 9 à 144, c'eſt-à-dire, comme les quarrez 3 & 12 des impreſſions, à cauſe que dans toute progreſſion des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. la ſomme de la progreſſion eſt toujours égale au quarré du nombre qui marque la multitude des termes, & que les nombre qui marquent ici les multitudes des eſpaces parcourus par P & par L ſont les nombres 3 & 12 des impreſſions ou des reſſorts; donc il faut néceſſairement qu'on diſe que les eſpaces parcourus d'une impreſſion à l'autre ſont des eſpaces égaux entr'eux, & que les tems employés à les parcourir vont en diminuant de même que les impreſſions ; mais ſi les impreſſions diminuent, il eſt viſible que leur ſomme, c'eſt-à-dire, les forces que les corps reçoivent, ſont moindres que la ſomme des forces égale des reſſorts ; donc on a tort de ſoutenir que les forces des corps mûs par des reſſorts ſoient comme ces reſſorts, ni que ces corps en refermant les reſſorts faſſent des pertes qui leur ſoient proportionnelles, puiſque les impreſſions contraires qui ſeroient la cauſe de ces pertes ne ſeroient pas dans la même proportion.

Quel ſera donc le rapport des impreſſions des reſſorts? le voici. De même que dans le mouvement des corps qui tombent, les impreſſions de la peſanteur ſont égales & les tems auſſi, lorſque les eſpaces parcourus d'une impreſſion à l'autre ſont comme les nombres 1, 3, 5, 7, &c. de même auſſi dans le mouvement des corps pouſſés par une ſuite infinie de reſſorts, les impreſſions ſeront égales & les tems auſſi quand les eſpaces parcourus ſeront dans la même progreſſion. Mais dans le mouvement des corps qui tombent, les ſommes des impreſſions ſont comme les ſommes des tems égaux à la fin d'un tems total, ou comme la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems, ou enfin comme la racine de l'eſpace total parcouru ; donc dans le mouvement des corps preſſés par des reſſorts, les ſommes des impreſſions à la fin d'un tems total, ſont auſſi comme la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems, ou comme la racine de l'eſpace total.

Et il faut obſerver en paſſant que la ſomme des impreſſions n'étant que comme la racine de l'eſpace total, & les reſſorts étant au contraire comme cet eſpace, ou comme la ſomme des eſ-

paces égaux qui le composent, & dont chacun est égal à la place qu'occupe le débandement d'un ressort, il s'ensuit nécessairement que s'il a fallu pour une premiere impression l'espace du débandement d'un ressort, il faudra pour une seconde impression égale à la premiere, l'espace du débandement de trois ressorts, pour une troisiéme l'espace du débandement de cinq, & ainsi de suite dans la progression des nombres impairs.

Après avoir montré que les pertes d'un corps qui remonte ne sont pas comme la somme des ressorts, mais simplement comme la racine de cette somme, il faut encore montrer que ces pertes sont comme les espaces non parcourus, & non pas comme les espaces parcourus, ainsi que l'Auteur des Institutions de Physique le pretend.

Supposons donc que les corps A, B,(*Fig.* 243.) étant parvenus en F & en *d*, remontent avec leurs vitesses acquises, les ressorts qu'ils seront obligés de surmonter en des tems égaux seront les mêmes qui leur auront donné leurs forces en descendant; donc le corps A qui dans l'instant FE parcourroit l'espace FPQE s'il ne trouvoit point de ressort, sera obligé de perdre l'espace PQO égal à l'espace OKP que les ressorts qu'il rencontre lui auront fait parcourir en descendant, & comme ces ressorts en lui donnant l'espace OKP lorsqu'il descendoit, lui auront donné une vitesse capable de parcourir l'espace KPQO dans un instant, de même en remontant la force de ces mêmes ressorts, en lui ôtant l'espace PQO lui ôtera une vitesse qui lui feroit parcourir un espace égal à KPQO dans un instant; ainsi le corps A ne pourroit plus parcourir dans l'instant ED que l'espace EOTD s'il ne se trouvoit point d'obstacle, mais comme il se rencontre encore des ressorts qu'il faut surmonter, il pert l'espace OTN & une vitesse capable de faire parcourir un espace double de OTN dans un instant, & continuant à raisonner de la même maniere, on trouvera que dans les deux autres instans le corps A aura perdu deux espaces NYH, AGH égaux aux deux espaces précédens, & deux vitesses égales aux précédentes; de même le corps B aura perdu en remontant deux espaces *nhy*, *hg*B, & deux vitesses semblables & égales à celles que le corps A aura perdu. Or ces espaces uo ces vitesses perdues consument totalement les deux forces, & ce sont les espaces perdus qui en perissant ont fait face aux ressorts, & les ont fait périr; donc les forces perdues sont comme les espaces perdus ou non parcourus, & non pas comme les es-

paces parcourus, puisqu'il est évident que ceux-ci ne sont pas comme les espaces non parcourus. Il semble que l'Auteur des Institutions de Physique auroit dû voir que la Demonstration de M. de Mairan avoit réfuté ce qu'il avance ici avec toute la clarté qu'on pouvoit désirer.

Pour mieux faire voir que ce n'est pas par les espaces plus grands qu'une force retardée parcourt dans un tems plus grand qu'il faut juger qu'elle est plus grande qu'une autre ; M. de Mairan s'exprime ainsi dans un autre endroit de sa Dissertation page 24. de la premiere Edition, & 57. de la seconde : *Comme il ne s'ensuit pas de ce que le mouvement uniforme d'un corps fini qui a une vitesse finie ne cesse jamais ou dure toujours, que la force motrice actuelle qui le produit soit infinie, il ne s'ensuit pas non plus à la rigueur que la force motrice de ce même corps dans le mouvement retardé en soit plus grande de ce qu'elle doit durer davantage. Elle n'est réellement plus grande que parce qu'elle fait parcourir de plus grands espaces en des tems égaux, ou plutôt ces espaces ne sont plus grands en des tems égaux que parce que la force est plus grande en vertu d'une plus grande vitesse ; & dans ce cas elle doit durer davantage ou perir plus tard, non pas à la rigueur parce qu'elle est plus grande, car la seule raison de la masse pourroit la rendre telle, mais parce qu'en des tems égaux elle fait parcourir de plus grands espaces. C'est par-là accidentellement qu'elle dure davantage ou perit plus tard .... la plus longue durée sera si l'on veut une indication d'une plus grande vitesse, mais non pas un second principe de valeur qui doive multiplier la valeur qu'indique déja la vitesse ou les espaces parcourus appliqués au tems. Ce seroit faire un espece de double emploi très-vicieux, mesurer une force par ses effets & par les effets de ses effets, & toute leur suite répandue successivement sur differens espaces.*

Tout ceci est évident & se démontre de lui-même, mais les forces vives ne s'en accommodent point ; il faut donc absolument prendre le parti d'y trouver à redire & de le critiquer. *On voit aisément*, dit l'Auteur des Institutions de Physique, *que dans le mouvement uniforme supposé éternel, il n'y a nulle destruction de force, au lieu que lorsque la force motrice pendant un tems double a derangé des obstacles quadruples, il y a eu une dépense réelle de force, laquelle n'a pû se faire sans un fonds de force quadruple, & qu'ainsi ces deux cas ne peuvent se comparer.* S'il pouvoit se faire que la force motrice pendant un tems double derangeât des obstacles quadruples, nous ne sçaurions disconvenir qu'il ne fallût un fonds de force quadruple pour

pour produire un pareil effet, mais si au contraire les obstacles dérangés dans des tems doubles ne sont jamais que doubles, de même que les espaces parcourus dans le mouvement uniforme en différens tems sont toujours proportionnels à ces tems, je ne vois pas pourquoi nous ne pourrions comparer les obstacles qui sont derangez par la force retardée, avec les espaces que la force uniforme fait parcourir. Or M. de Mairan a démontré que les espaces non parcourus dans des tems doubles sont comme ces tems, & il est visible que ces espaces sont dans la même raison que les obstacles qui les ont empêchés d'être parcourus ; donc il faut ou que l'Auteur des Institutions de Physique nous fasse voir le vice de sa Demonstration, ou qu'il convienne lui-même du peu de solidité de son raisonement.

Plus on a poussé les Partisans des forces vives par la justesse & la solidité des raisonnemens, plus aussi ont-ils appellé les expériences à leur secours. Les uns, à l'imitation de M. Bernoulli, ne nous parlent que de la force des ressorts, & les autres au contraire ne nous entretiennent que des proprietez des corps mols. Nous avons déja réfuté les preuves que M. Bernoulli prétend tirer des expériences des chocs des corps élastiques, & nous en parlerons encore au sujet du fameux Problême d'une boule qui en choque immédiatement plusieurs autres (*N.* 601). Il ne me reste donc plus qu'à répondre à ce qu'on nous objecte touchant les corps mols, & c'est ce que nous allons faire en peu de mots.

Si l'on prend de l'argile EFGH (*Fig.* 245.) dont la consistance soit assez forte pour soutenir un corps qu'on poseroit sur la surface EF, & qu'après avoir élevé ce corps à différentes hauteurs AB, CB, &c. on le laisse tomber à chaque fois, on trouvera toujours que les enfoncemens du corps dans l'argile seront proportionnels aux hauteurs dont il sera tombé, c'est-à-dire, si les hauteurs AB, CB, sont comme 1 à 2, les enfoncemens du corps dans l'argile seront dans la même raison ; or ces enfoncemens étant causés par la seule vitesse acquise par le corps lorsqu'il est parvenu sur la surface EF, & la pesanteur n'y contribuant rien, puisqu'on suppose que cette surface peut en arrêter l'action, les Partisans des Forces vives raisonnent ainsi : » Les enfoncemens » sont les effets des Forces du corps, mais les effets sont tou- » jours proportionnels à leurs causes ; donc ces enfoncemens sont » entr'eux comme les forces acquises du corps, lorsqu'il est par- » venu en B ; mais par l'expérience les enfoncemens sont comme

» les hauteurs AB, CB, & ces hauteurs sont comme les quarrez » des vitesses acquises; donc les forces sont aussi comme les quar- » rez des vitesses acquises «. A ce raisonnement spécieux, M. de Mairan répond que les enfoncemens du corps ne pouvant se faire sans déplacer à chaque instant des nouvelles parties d'argile, le mouvement du corps est retardé de la même façon que s'il remontoit au point d'où il est tombé, & que de même qu'il parcourroit en remontant des espaces plus grands & pendant plus de tems à mesure qu'il seroit tombé de plus haut & pendant un plus long-tems, de même aussi il s'enfonce plus avant dans l'argile & pendant un tems plus long, lorsque la hauteur dont il est tombé se trouve plus grande. Mais, comme ce Sçavant Géometre, dans la vûe d'éclairer davantage l'esprit, n'a pas jugé à propos de s'en tenir à la seule raison tirée de la différence des tems, lorsqu'il s'est agi du mouvement retardé d'un corps qui remonte, & que la conformité qui se trouve entre le mouvement retardé du corps qui s'enfonce dans l'argile, & du corps qui remonte l'engageoient à se servir des mêmes preuves; voici de quelle maniere il applique ce qu'il a dit au sujet des corps qui remontent non-seulement aux corps qui s'enfoncent dans des corps, mais encore à tous les effets du mouvement & du choc des corps à ressort, page 30. de la premiere Edition, & 71. de la seconde.

Ce que je dis des espaces non parcourus, n'a pas moins lieu à l'égard de tous les autres effets du mouvement & du choc, par rapport aux espaces parcourus, & nous dirons de même que ce ne sont pas les parties de matiere déplacées ni les ressorts bandés ou applatis qui donnent l'estimation & la mesure de la force motrice, mais les parties de matiere non-déplacées, les ressorts non-bandez & non-applatis, & qui l'auroient été si la force motrice se fut toujours soutenue, & n'eut point souffert de diminution, &c.

Pour en donner un exemple: Soient des impulsions, des obstacles, ou des résistances quelconques infiniment répetées & placées sur le chemin AF (Fig. 246.) *du mobile* A, *telles par exemple que les particules de matiere* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. ou des lames de ressort à déplacer, à abbatre, à soulever, ou à bander. Il est évident que si le mobile avec un dégré de vitesse & de force peut en soulever deux en un instant par un mouvement uniforme, c'est-à-dire, en conservant ou en reprenant toujours toute sa force & toute sa vitesse, après avoir soulevé la premiere, & qu'au contraire il n'en puisse soulever*

qu'une par un mouvement retardé, toute sa force & toute sa vitesse s'étant consumée à soulever ou à bander la premiere, il est, dis je, *évident que le mobile* A *ayant deux degrez de force, & autant de vitesse, souleveroit ou banderoit quatre de ces lames de ressort dans un instant par un mouvement uniforme. Mais il perd dans cet instant & en bandant les premiers ressorts un degré de sa force & de sa vitesse, & un degré de force & de vitesse perdue, donne par hypotèse une lame de moins soulevée, ou bandée; donc il n'en bandera que trois au premier instant; sçavoir* 1, 2, 3, *& il s'en faudra la lame* 4 *& l'espace* CD *qu'il ne fasse ce qu'il auroit fait s'il n'eût rien perdu. Cependant comme il lui reste encore un degré de force & de vitesse qui lui feroient soulever deux lames* 4, 5, *& parcourir le chemin* CDE *en un second instant, si son mouvement demeuroit uniforme, il doit continuer de se mouvoir & d'agir contre les resistances qui s'opposent à son mouvement; mais au lieu de deux, il n'en doit surmonter qu'une lame* 4D, *à cause que son mouvement y est retardé, & que sa force se trouve totalement éteinte. Ce qui fera en tout quatre portions de matiere deplacées, ou quatre ressorts bandez en vertu de deux degrez de force résultans de deux degrez de vitesse, & de l'action totale qui a duré deux instans ..... J'appellerai donc,* portions de matiere non-déplacées, ressorts non-soulevés, non-bandés, *& en général,* obstacles non-surmontés, *tous ceux qui ne l'ont point été faute d'uniformité & de perseverance dans la force du mobile, sçavoir* 4D *dans le premier instant,* 5E *dans le second, &c. quoiqu'ils puissent être censés surmontés par la force contraire dont les impressions redoublées peuvent enfin arrêter entierement le mobile.*

C'est ici où l'Auteur des Institutions de Physique paroît triompher par la façon dont il attaque ce raisonnement. *Dans les obstacles surmontés*, dit-il, page 430. *comme les déplacemens de matiere, les ressorts fermez, &c. on ne peut reduire même par voye d'hypotèse ou de supposition le mouvement retardé en uniforme, comme M. de Mairan l'avance dans son Memoire, & quelque estime que j'aye pour ce Philosophe, je ne crains point d'avancer qu'il dit ici une chose impossible; car il est aussi impossible qu'un corps avec la force necessaire pour fermer quatre ressorts, en ferme six (quelque supposition que l'on fasse) qu'il est impossible que 2 & 2 fasse 6. Si l'on suppose avec M. de Mairan que le corps n'auroit consumé aucune partie de sa force pour fermer quatre ressorts dans la premiere seconde d'un mouvement uniforme, je dis que les quatre ressorts ne seroient point fermez, ou qu'ils le seroient par quelque autre agent; que si on suppose au con-*

traire qu'ayant épuisé une partie de sa force à fermer les trois premiers ressorts dans la premiere seconde, & n'ayant plus que la force capable de lui faire fermer un ressort dans la deuxieme seconde, le corps reprendroit une partie de sa force pour en fermer deux dans la deuxieme seconde par un mouvement uniforme; (car il faut faire l'une ou l'autre de ces suppositions), on suppose dans le dernier cas que le corps à renouvellé sa force, ce qui sort entierement de la question. Ainsi il n'est point vrai que la force totale d'un corps soit representée parce qu'elle eut fait, si elle ne se fut point consumée; car elle ne pouvoit jamais faire un effet plus grand que celui qui l'a détruite, & ne contenoit en puissance que ce qu'elle a deployé dans l'effet produit.

Il n'y a qu'à lire l'endroit de la Dissertation de M. de Mairan que j'ai raporté pour voir qu'on n'attaque ici qu'un vain phantôme bien éloigné de la réalité. De quelque matiere que l'on traite, il est toûjours permis de faire telle supposition que l'on voudra possible ou impossible, pourvû que les conséquences que l'on en tire se trouvent renfermées dans les bornes de la possibilité. Que M. de Mairan suppose qu'un corps qui se meut d'un mouvemənt uniforme, & qui rencontre des obstacles sur ses pas, reprenne toute sa force à chaque obstacle qu'il renverse, on ne sçauroit le trouver mauvais, sans être de mauvaise humeur; chaque obstacle dans cette supposition sera renversé par la partie que le corps perdra de sa force, & le mouvement de ce corps sera cependant uniforme en vertu de la réproduction de la partie perdue qui se fera dans l'instant; ce seroit uniquement vouloir chicaner que de dire que ces obstacles ou ressorts ne seroient point fermés, ou qu'ils le seroient par quelqu'autre agent.

Mais si après cette supposition M. de Mairan concluoit qu'un corps qui consume toute sa force à détruire quatre obstacles, pourroit ne la consumer qu'après en avoir détruit six ou huit; dès-lors le vice du raisonnement seroit manifeste, & quelque estime que l'on ait pour ce Philosophe, on ne craindroit point d'avancer que son sentiment seroit faux. M. de Mairan est trop éclairé pour donner dans des Paralogismes de cette nature. Un corps qui consume sa force à fermer quatre ressorts, n'en fermera jamais six en agissant selon les mêmes loix, cela est indubitable, & le contraire est aussi impossible, qu'il est impossible que 2 & 2 fassent 6. Mais il est sûr aussi que si ce corps pouvoit reprendre toute sa force à chaque ressort qu'il ferme, il pourroit en fermer huit dans un tems égal à celui qu'il a employé à en

fermer quatre lorſque ſa force ſe conſumoit, & c'eſt uniquement ce que M. de Mairan a prétendu, & ce qu'il a pû prétendre conformement à la doctrine de Galilée ; or c'eſt de ce raiſonnement que l'on ne ſçauroit éluder que ce ſçavant Geometre tire la ſolution de la diſpute. Le corps B avec 1 de force & 1 de viteſſe uniforme pourroit dans une ſeconde fermer deux reſſorts 1, 2, s'il pouvoit reprendre ſa force après avoir renverſé le premier, mais avec 1 de force & 1 de viteſſe retardée, il ne ferme qu'un reſſort dans une ſeconde. De même le corps A égal à B ayant 2 de force & 2 de viteſſe uniforme, pourroit fermer quatre reſſorts dans une ſeconde, s'il pouvoit reprendre toute ſa force à meſure qu'il ferme chaque reſſort, mais avec 2 de force & 2 de viteſſe retardée, il ne ferme dans une ſeconde que trois reſſorts, & il perd un degré de viteſſe ; il eſt évident qu'à la fin de la premiere ſeconde, le corps A ſe trouvant dans le cas où étoit le corps B, au commencement de la premiere ſeconde pourroit fermer deux reſſorts dans la deuxiéme ſeconde ſi la viteſſe 1 & la force 1 qui lui reſte à la fin de la premiere, pouvoit ſe conſerver ſans rien perdre, & qu'au contraire ſa force s'affoibliſſant, il ne fermera qu'un reſſort dans la deuxiéme ſeconde. Or puiſque le corps A en conſervant toute ſa force, comme il a été dit, auroit fermé ſix reſſorts dans deux ſecondes, c'eſt-à-dire, quatre dans la premiere ſeconde, ſi ſa viteſſe 2 s'étoit conſervée, & deux à la deuxiéme ſeconde, ſi ſa viteſſe 1 eut été uniforme, & que le mouvement retardé par les pertes qu'il fait ne lui permet de fermer dans ces deux mêmes ſecondes que quatre reſſorts, il s'enſuit qu'il a perdu une quantité de force qui lui auroit fait fermer encore deux reſſorts ; par la même raiſon on trouvera que le mouvement retardé du corps B lui a fait perdre une quantité de force avec laquelle il auroit fermé encore un reſſort dans la premiere ſeconde. Mais les pertes que les deux corps ont faites ſont la cauſe de leur deſtruction & les cauſes ſont proportionnelles aux effets ; donc les pertes 2 & 1 ſont comme les forces des corps A, B, & par conſéquent les forces des corps A, B, ſont comme les reſſorts non-fermés, & qui l'auroient été ſi les corps avoient pû conſerver dans chaque ſeconde la viteſſe qu'ils avoient au commencement de cette ſeconde.

Il faut obſerver ici que M. de Mairan ne dit point que le corps A, à la fin de la premiere ſeconde, n'aye plus qu'une Force uniforme capable de lui faire fermer un reſſort dans la deuxié-

me seconde, mais que ce corps ayant encore un degré de vitesse & un de force, pourroit dans la deuxiéme seconde fermer deux ressorts si son mouvement ne se retardoit point, ce qui est bien différent de ce que l'Auteur des Institutions de Physique semble vouloir lui faire dire pour avoir droit d'en conclure qu'il sort de la question.

Il faut encore observer que quoique les obstacles que le corps A surmonte soient tous égaux entr'eux, cependant les Forces qu'ils déployent contre ce corps ne sont pas égales; car les espaces A1, 12, 23, &c. sur lesquels on doit concevoir que les obstacles 1, 2, 3, &c. sont repandus, étant tous égaux entr'eux, le corps A employe plus de tems à parcourir le second qu'à parcoutir le premier, à cause que sa force diminuant, sa vitesse diminue; ainsi l'obstacle 1 séjourne moins de tems sur le corps A que l'obstacle 2, & par conséquent il lui ôte une moindre vitesse; par la même raison l'obstacle 2, ôte au corps A une vitesse moins grande que celle que la troisiéme 3 lui ôte, & ainsi des autres. Or comme nous supposons que les trois premiers ressorts ou obstacles détruisent un degré de force & de vitesse, & que le quatriéme détruit un autre degré de force & de vitesse, il s'ensuit que les resistances des trois premiers obstacles prises ensemble, sont égales à la resistance du quatriéme; & ceci va me servir à répondre à une objection qu'on pourroit me faire sur ce que j'ai dit ci-dessus touchant les corps qui remontent avec leur vitesse acquise à la fin de leur chute.

Supposé, me dira-t-on, que le corps A (*Fig.* 247.) remonte de D vers A avec la vitesse acquise par sa chute à la fin de deux secondes AC, CD, ce corps parcourroit dans une seconde seconde une espace DEMC quadruple de l'espace ACH; si la pesanteur n'agissoit plus sur lui, mais comme la pesanteur s'oppose à son passage, il ne parcourra dans la premiere seconde en remontant qu'une espace DEHC, triple de l'espace CHA, qu'il parcourra pendant la deuxiéme seconde; or vous avez dit, ajoutera-t-on, que ce corps ne rencontrera qu'un obstacle dans la premiere seconde, non plus que dans la deuxiéme, donc, ou il faut que M. de Mairan ne mette qu'un obstacle dans la premiere seconde, ou que vous en mettiez trois au lieu d'un.

Je repons à cela que lorsque j'ai dit que le corps A ne rencontroit qu'un obstacle à chaque tems de son mouvement, j'ai entendu l'obstacle total qui repondoit à l'espace total parcouru à la

fin de chaque tems; car il eſt ſûr que ces obſtacles totaux ſont des reſiſtances qui ſe trouvent égales à la fin des tems égaux, c'eſt-à-dire, qui détruiſent des degrez égaux de viteſſe; mais cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe dire qu'il y a trois obſtacles qui repondent aux trois eſpaces égaux qui compoſent l'eſpace total DEHC, parcouru en remontant dans la premiere ſeconde; car la peſanteur agiſſant toujours ſur le corps pendant qu'il tend à parcourir les quatre eſpaces compris dans DEMC, & trouvant plus de viteſſe au corps A pendant le premier eſpace, elle fait moins d'impreſſion ſur lui qu'elle n'en fait pendant le ſecond où la viteſſe eſt diminuée, & par la même raiſon, elle en fait moins pendant le ſecond qu'elle n'en fait pendant le troiſiéme; ainſi ces différentes impreſſions peuvent être regardées comme différens obſtacles égaux en eux-mêmes, mais qui reſiſtent plus ou moins à proportion de la durée de leur reſiſtance ou du ſéjour qu'ils font ſur le corps, lequel employe plus de tems à parcourir un eſpace à meſure que ſa viteſſe diminue par la reſiſtance que l'obſtacle précédent lui a fait, mais ces trois obſtacles enſemble n'ôtant à la fin de l'eſpace DEHC qu'un degré de viteſſe, de même que l'obſtacle du ſecond inſtant CA n'en ôte qu'un, la reſiſtance des trois premiers obſtacles eſt égale à la reſiſtance du quatriéme.

On voit ici le parfait rapport qui ſe trouve entre le mouvement retardé, par la peſanteur & le mouvement retardé par des obſtacles ſurmontés, comme les déplacemens de matiere dans les enfoncemens, les reſſorts formés dans le choc des corps Elaſtiques, &c. Dans le mouvement retardé par la peſanteur, les reſiſtances de cette peſanteur vont en augmentant dans les eſpaces égaux que le corps parcourt, quoique la peſanteur ſoit toujours la même, & cependant ces reſiſtances dans des tems égaux font perdre des viteſſes égales; de plus ces viteſſes perdues à la fin du mouvement ſont la meſure des Forces, & non pas les eſpaces parcourus: tout cela a été démontré par M. de Mairan, de façon qu'il n'eſt pas poſſible de refuter ſon raiſonnement, on la vû ci-deſſus. Or dans le enfoncemens de matiere ou dans le hoc des corps élaſtiques, les obſtacles qu'il faut deplacer ou les reſſorts qu'il faut fermer dans des eſpaces égaux, ſont égaux entr'eux, de même que la peſanteur eſt égale à elle-même; car nous ſuppoſons que dans les enfoncemens les couches de matiere qu'il faut deplacer ſont homogenes, & que dans

le choc des corps élaſtiques les reſſorts à fermer ſont égaux ; donc puiſque la peſanteur dans des eſpaces égaux fait des reſiſtances d'autant plns grandes, que les eſpaces s'éloignent davantage du premier eſpace, & que cependant ces reſiſtances dans des tems égaux, ne font perdre au corps que des viteſſes égales, il s'enſuit que les couches égales de matiere qu'il faut déplacer dans les enfoncemens, & les reſſorts égaux qu'il faut fermer dans le choc des corps durs doivent faire des reſiſtances & retrancher des viteſſes proportionnelles aux reſiſtances de la peſanteur & aux viteſſes qu'elle retranche dans des tems égaux, car les cauſes étant proportionnelles, les effets doivent l'être auſſi, & par conſéquent il s'enſuit, que puiſque la quantité des Forces éteintes par la peſanteur doit s'eſtimer par les viteſſes éteintes, ou par les eſpaces non parcourus, leſquels ſont entr'eux comme les viteſſes acquiſes, & non pas comme les quarrés des viteſſes, la quantité des Forces éteintes par le developement des matieres ou par des reſſorts, doit s'eſtimer auſſi par les viteſſes éteintes, ou par les couches de matiere non deplacées ou les reſſorts non fermés, & qui l'auroient été ſi le corps avoit pû conſerver toute ſa force de chaque inſtant.

On ne peut mieux démontrer juſqu'où va la prévention des Partiſans des Forces vives, qu'en faiſant voir l'erreur où M. Wolf eſt tombé. Ce Geométre célébre par ſes ſavans écrits démontre dans ſa Mechanique, que dans le choc de deux corps à reſſort, ſoit que l'un ſoit en repos, ou que tous les deux ſe meuvent dans un même ſens, ou dans un ſens contraire, les quarrés des viteſſes après le choc multipliés par les maſſes ſont égaux aux quarrés des viteſſes avant le choc multipliés par les maſſes. Cette Propoſition eſt vraie, quelque ſuppoſition que l'on faſſe, pourvû que l'on ne veuille point avoir égard aux directions contraires des viteſſes, c'eſt-à-dire, pourvû qu'on ne veuille point retrancher le mouvement qui va d'un ſens de celui qui va d'un ſens oppoſé, comme font les Carteſiens; les Formules Algebriques nous en aſſurent, & ces Formules ne ſauroient nous tromper : mais que conclure de-là? *C'eſt*, dit M. Wolf, *qu'il y a toujours une même quantité de Forces vives, avant & après le choc.* Or c'eſt ici où eſt l'erreur. Il eſt certain qu'il y a toujours une même quantité de mouvement avant & après le choc, en ne prenant pour mouvement que celui qui eſt dans la direction du corps qui avoit le plus de force avant le choc, & en retranchant de ce mouvement

mouvement celui qui s'y trouveroit opposé après le choc. Les Défenſeurs des Forces vives en conviennent avec ceux qui ſont du parti contraire ; mais qu'il y ait une même quantité de Forces agiſſantes en négligeant les différentes directions, cela ne ſauroit être parce que dans ce ſens il arrive toujours que la quantité de mouvement après le choc ſe trouve plus grande que la quantité de mouvement avant le choc. Comme la plûpart des experiences qu'on rapporte en faveur des Forces vives, ſuppoſent que le corps choqué ſoit en repos avant le choc ; tout ce que nous allons dire roulera ſur cette ſuppoſition.

Soient donc les corps A, B (*Fig.* 248.) dont le premier A ſe meut ſelon la direction AB ſur un plan extremement poli, & le ſecond B eſt en repos ſur ce plan ; je nomme M la maſſe du corps A, V ſa viteſſe, & m la maſſe du corps B. Tout le monde convient que ſi ces deux corps ne ſont pas élaſtiques, ils ſe mouvront tous les deux après le choc dans la même direction, avec une viteſſe commune exprimée par $\frac{MV}{M+m}$, multipliant donc cette viteſſe d'une part par la maſſe de A, & de l'autre par la maſſe de B, la quantité de mouvement de A après le choc ſera $\frac{MMV}{M+m}$, & celle de B ſera $\frac{mMV}{M+m}$, c'eſt pourquoi ajoûtant ces deux quantitez enſemble, la ſomme ſera $\frac{MMV}{M+m} + \frac{mMV}{M+m} = MV$; or la quantité de mouvement avant le choc étoit auſſi MV ; donc il ſe trouve après le choc une quantité de mouvement égale à la quantité de mouvement avant le choc.

Suppoſons maintenant que les deux corps ſoient élaſtiques, on convient encore que la viteſſe de A après le choc ſera $\frac{MV - mV}{M+m}$, & celle de B $\frac{2MV}{M+m}$ d'où l'on voit que ſi M eſt plus grand que m, le corps A après le choc ſuivra ſa premiere direction & ira moins vite que B, & que ſi M eſt moindre que m, le corps A rebrouſſera chemin, à cauſe que ſa viteſſe $\frac{MV - mV}{M+m}$ ſera négative. Multipliant donc ces deux viteſſes par leur maſſes, la quantité de mouvement de B après le choc ſera $\frac{2mMV}{M+m}$ & celle de A ſera $\frac{MMV - mMV}{M+m}$, ſi ſa direction eſt la même que celle de B ; & $\frac{mMV - MMV}{M+m}$ ſi ſa direction eſt oppoſée à la direction de B ;

c'eſt pourquoi ajoûtant enſemble ces deux quantités lorſquelles ont la même direction, ou retranchant la quantité de mouvement de A de celle de B lorſque les directions ſont contraires, la ſomme ou le reſte ſera pour l'un & l'autre cas $\frac{2mMV - mMV + MMV}{M+m}$ $= MV$; or MV eſt la quantité de mouvement de A avant le choc, donc il y a encore ici même quantité de mouvement avant & après le choc, & cela arrivera toujours toutes les fois qu'on ne prendra pour quantité de mouvement après le choc que celle qui eſt ſelon la direction du corps A, & qu'on en retranchera celle qui pourroit lui être oppoſée.

Pour fixer notre imagination dans ces deux cas, ſuppoſons d'abord $M = 3$, $V = 2$, & $m = 2$, la viteſſe de A après le choc ſera $\frac{MV - mV}{M+m} = \frac{6-4}{5} = \frac{2}{5}$, & celle de B ſera $\frac{2MV}{M+m} = \frac{12}{5}$; multipliant donc ces viteſſes par leur maſſes, la quantité de mouvement de A après le choc ſera $\frac{6}{5}$, & celle de B ſera $\frac{24}{5}$, ainſi ajoutant ces deux quantités enſemble, à cauſe qu'elles ſont dans la même direction, leur ſomme ſera $\frac{30}{5}$; or la quantité de mouvement avant le choc eſt $3 \times 2 = 6 = \frac{30}{5}$, donc cette quantité eſt égale à la quantité de mouvement après le choc.

Pour le ſecond cas, ſuppoſons $M = 2$, $V = 2$, & $m = 3$, la viteſſe de A après le choc étant négative ſera $\frac{mV - MV}{M+m} = \frac{2}{5}$, c'eſt-à-dire, A rebrouſſera chemin avec $\frac{2}{5}$ de viteſſe, & celle de B ſera $\frac{2MV}{M+m} = \frac{8}{5}$, multipliant donc ces viteſſes par leur maſſes, la quantité de mouvement de A après le choc, ſelon la direction contraire ſera $\frac{4}{5}$, & celle de B ſelon la direction primitive ſera $\frac{24}{5}$; ainſi retranchant la quantité de mouvement de A de la quantité de mouvement de B, la quantité de mouvement qui reſtera ſelon la direction primitive ſera $\frac{24}{5} - \frac{4}{5} = \frac{20}{5} = 4$; or la quantité de mouvement de A avant le choc eſt $2 \times 2 = 4$, donc cette quantité eſt égale à celle qui ſe trouve après le choc.

Les Défenſeurs des Forces vives nous accordent aiſément tout ceci dans le ſens que je viens d'expliquer; mais comme dans le ſecond cas le corps A ne laiſſe pas que d'avoir un vrai mouvement, quoique ſa direction ſoit dans un ſens oppoſé à celle du corps B, & que dans ce ſens il y a une plus grande quantité de mouvement après le choc qu'avant le choc, ce qui ne peut provenir que d'une augmentation de force qui ſe fait dans l'in-

ſtant du choc, ils prétendent qu'au lieu de dire que les Forces agiſſantes ſont ici proportionnelles aux quantités de mouvement comme on l'a toujours cru, il faut dire au contraire qu'elles ſont entr'elles comme les quarrés des viteſſes multipliés par les maſſes, tandis que les quantités de mouvement ne ſont que comme les maſſes multipliées par les viteſſes, & cela par la raiſon que dans tous les cas, il ſe trouve toujours que les quarrés des viteſſes après le choc multipliés par les maſſes, ſont égaux aux quarrés des viteſſes avant le choc multipliés par les maſſes ; mais ce raiſonnement ne conclut rien, & c'eſt ce que nous allons faire voir.

Dans le mouvement uniforme, les Forces des corps en mouvement ſont entr'elles comme les maſſes multipliées par les viteſſes, ou par les eſpaces parcourus dans des tems égaux : *Le tems eſt à conſiderer*, dit l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique, *dans les occaſions dans leſquelles pendant un plus long tems, il peut y avoir un plus grand effet produit comme dans le mouvement uniforme, car alors l'eſpace total parcouru, qui eſt le ſeul effet produit, ſera plus ou moins grand, ſelon que le mouvement du corps ſera continué plus ou moins de tems.* Or ce principe poſé, voici comme je raiſonne.

Le corps A avant le choc ſe meut d'un mouvement uniforme, puiſque nous ſuppoſons qu'il eſt ſur un plan bien poli exempt de frotement, & que nous faiſons abſtraction de la reſiſtance de l'air ; donc la force du corps A avant le choc eſt comme le produit de ſa maſſe par ſa viteſſe ; de même les corps A, B après le choc ſe meuvent d'un mouvement uniforme, car nous ne voyons rien après le choc qui augmente ou diminue les viteſſes que le choc leur a données, donc les forces de ces corps ſont auſſi comme les produits de leur maſſes par leur viteſſes, & par conſéquent il n'eſt point vrai de dire, comme M. Wolf le prétend, que les forces des corps à reſſort, avant ou après le choc, ſoient comme les quarrés des viteſſes multipliés par les maſſes ; quoiqu'il ſoit vrai que les produits des quarrés des viteſſes par les maſſes ſoient égaux avant & après le choc.

Mais d'où vient cette multiplication de forces dans les corps à reſſort, lors qu'après le choc ils ſuivent des directions contraires ? Elle vient uniquement de leur élaſticité qui les rend capables d'être comprimés & de ſe retablir, & non pas de quelque différence qui ſe trouve dans les Forces motrices lorſqu'elles mettent en mouvement des corps qui ſont élaſtiques ou qui ne le ſont pas. Suppoſons le corps $A = M = 2$, ſa viteſſe $V = 2$

& $B = m = 3$, si ces deux corps ne sont pas élastiques, leur vitesse commune après le choc sera $\frac{MV}{M+m} = \frac{4}{5}$, donc la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{8}{5}$ & celle de B $\frac{12}{5}$, & ajoutant ensemble ces deux quantités la somme sera $\frac{20}{5} = 4$, & par conséquent cette somme sera égale à la quantité de mouvement $2 \times 2 = 4$ du corps A avant le choc.

Maintenant supposons que ces corps deviennent élastiques & que $A = 2$ avec la vitesse 2 choque $B = 3$ qui est en repos; la force de A avant le choc sera encore 4, puisque son mouvement est uniforme; ainsi si nous ne faisons attention qu'au mouvement communiqué par la Force motrice, les deux corps A, B après le choc, iroient selon la même direction avec une vitesse commune égale à $\frac{4}{5}$, mais comme l'élasticité de ces corps leur donne la force de se comprimer mutuellement & de se redresser, force qui ne vient point de la Force motrice, & qui en est même tout-à-fait indépendante; il arrive comme tout le monde en convient que cette force de ressort agit avec la vitesse primitive 2 qu'elle distribue aux deux corps reciproquement à leur masses, c'est-à-dire, que si on partage la vitesse 2 ou $\frac{10}{5}$ en deux parties $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$, qui soient entr'elles comme les masses 2, 3, le corps B reçoit la partie $\frac{4}{5}$, laquelle jointe à $\frac{4}{5}$ que le mouvement de A lui communique independamment du ressort, fait $\frac{8}{5}$ de vitesse pour le corps B, & le corps A reçoit $\frac{6}{5}$, mais dans une direction contraire, à cause que c'est en conséquence de la reaction du corps B qu'il reçoit cette vitesse; or independamment du ressort, le corps A après le choc à $\frac{4}{5}$ de vitesse selon la direction primitive, donc les $\frac{6}{5}$ qu'il reçoit de la force du ressort selon la direction contraire détruisent ces $\frac{4}{5}$, & il lui reste $\frac{2}{5}$ de vitesse selon la direction contraire; c'est pourquoi multipliant les masses par les vitesses, la quantité de mouvement de A après le choc sera $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$, & celle de B sera $3 \times \frac{8}{5} = \frac{24}{5}$, donc si l'on n'a pas égard à la différence des directions, la somme des quantités de mouvement après le choc sera $\frac{28}{5}$, & par conséquent cette somme sera plus grande que la quantité de mouvement $4 = \frac{20}{5}$ du corps A avant le choc; & cette augmentation de quantité de mouvement ou de force ne viendra pas de la Force motrice qui n'est que comme 4, mais uniquement de la reaction des ressorts.

Il est vrai que si l'on fait le quarré $\frac{64}{25}$ de la vitesse $\frac{8}{5}$ de B après le choc, & qu'on la multiplie par la masse 3, ce qui donne $\frac{192}{25}$,

& qu'après avoir multiplié le quarré $\frac{4}{25}$ de la viteſſe $\frac{2}{5}$ de A après le choc par la maſſe 2, ce qui donne $\frac{8}{25}$, on ajoute $\frac{192}{25}$ à $\frac{8}{25}$, la ſomme ſera $\frac{200}{25} = 8$, & par conſéquent elle ſera égale au quarré 4 de la viteſſe de A multiplié par ſa maſſe 2, mais cela ne fait rien en faveur des Forces vives, puiſque nous avons fait voir que les Forces agiſſantes de A & B ne ſont pas comme les quarrés des viteſſes multipliés par les maſſes, mais ſimplement comme les maſſes multipliées par les viteſſes.

M. Herman ayant fait une expérience dans laquelle la maſſe du corps élaſtique choquant A étoit 1, ſa viteſſe 2, & la maſſe du corps élaſtique B qui étoit en repos avant le choc étoit = 3; il s'eſt trouvé néceſſairement que la viteſſe de l'un & l'autre corps A, B, après le choc a été 1, il eſt facile de le juſtifier en appliquant à ce cas les formules que nous avons rapportées; or comme le quarré de 1 n'eſt pas différent de 1; il eſt arrivé encore que la force de A après le choc a dû être 1, & que celle de B a dû être 3 ſoit qu'on veuille que ces forces ſoient entr'elles comme les produits des viteſſes par les maſſes, ou comme les produits des maſſes par les quarrez des viteſſes, l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique, page 435 remarque que ceci eſt vrai *de l'aveu même de ceux qui refuſent d'admettre les forces vives*, & nous n'aurions garde de le déſavouer; mais que s'en ſuit-il de ceci? Le calcul & l'expérience nous diſent que le corps A & le corps B ont chacun 1 de viteſſe; mais ni l'un ni l'autre ne nous dit ſi pour meſurer les forces agiſſantes cet 1 doit être regardé ſimplement comme 1, ou s'il faut le prendre comme 1 élevé au quarré, & par conſéquent cette ſeule expérience ne peut pas plus autoriſer les partiſans des forces vives à ſoûtenir que les forces agiſſantes des corps A, B, après le choc ſont comme les maſſes multipliées par les quarrez des viteſſes, qu'elle ne nous donneroit droit de dire que ces forces ſont comme les produits des viteſſes par les maſſes, ſi nous n'avions pas d'autres preuves à apporter de cette verité.

Suppoſons, en effet, qu'un Geometre peu éclairé s'appuyant ſur cet exemple osât avancer que quoique les forces après le choc ſoient comme les maſſes multipliées par les viteſſes, ou comme les quantités de mouvement, il arrive cependant que la ſomme de ces forces eſt égale au quarré de la viteſſe de A avant le choc multiplié par ſa maſſe, par la raiſon qu'il ſe trouve dans cet exemple que la ſomme $1+3=4$ des forces après le choc eſt égale au

quarré 4 de la viteſſe 2 de A avant le choc multiplié par ſa maſſe 1. Il eſt certain qu'un hypotèſe ſi chimérique ſeroit bientôt renverſée, & qu'il ſuffiroit pour cela de faire voir à ſon Auteur que ce n'eſt ici qu'un cas particulier qui ſe trouveroit contredit par tous les autres cas où l'on changeroit la viteſſe ou le rapport des maſſes. Suppoſons, par exemple $A=2$, $V=2$, & $B=3$; deſlors la force de A après le choc ſeroit $\frac{4}{5}$, & celle de B $\frac{24}{5}$ comme on a vû ci-deſſus, & par conſéquent leur ſomme $\frac{28}{5}$ ne ſeroit pas égale au quarré 4 de la viteſſe primitive de 2 multiplié par ſa maſſe 2, ce qui feroit $8=\frac{40}{5}$, & il en ſeroit de même d'une infinité d'autres ſuppoſitions.

Je conviens que les partiſans des forces vives peuvent répondre que dans le cas de M. Herman comme dans tous les autres, les quarrez des viteſſes après le choc multipliés par les maſſes, ſont égaux au produit de la maſſe de A par le quarré de ſa viteſſe avant le choc; mais dequoi cette réponſe peut-elle leur ſervir? Le principe ſur lequel ils ſe fondent eſt inconteſtable, c'eſt une proprieté eſſentielle au choc des corps à reſſort que les quarrez des viteſſes après le choc multipliés par les maſſes ſont égaux au quarré de la viteſſe primitive du corps choquant multiplié par ſa maſſe, & cette proprieté vient de l'élaſticité des corps, puiſqu'on ne voit rien de ſemblable lorſque les corps ne ſont pas élaſtiques, il faudroit renoncer aux formules reçûës de tous les Sçavans pour diſconvenir de cette verité. Mais s'en ſuit-il delà que les forces motrices ou agiſſantes ſoient comme les maſſes multipliées par les quarrez des viteſſes, je ne le vois pas, & l'on ne viendra jamais à bout de le démontrer. A la verité, ce n'eſt que par le mouvement que la force du reſſort ſe manifeſte, & par conſéquent il faut que les forces motrices agiſſent afin que nous puiſſions juger ſi les corps ſont à reſſort, & juſqu'à quel point ils le ſont. Mais comme cela ne nous dit autre choſe, ſinon que les forces motrices ſont des cauſes occaſionnelles, ou ſi l'on aime mieux des conditions ſans leſquelles le reſſort n'agiroit point, & que tous les Phyſiciens ſçavent bien que ces conditions ne ſont pas des cauſes efficientes; il reſte toujours aux défenſeurs des forces vives à nous donner les fondemens de leurs prétentions. Ce n'eſt point à des expériences réïterées que nous croyons devoir nous en tenir, ces expériences avec quelque ſoin qu'elles ſoient faites ne nous montrent que des effets, & ces effets nous diſent que les quarrez des viteſſes après le choc multipliés par les maſſes ſont égaux

L'on ne donne point ce que l'on n'a pas, c'eſt un axiome reçû de tout l'Univers, & l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique ne manque pas de s'en ſervir pour nous montrer qu'un corps qui ne choque qu'avec une certaine force ne peut pas produire une force plus grande que celle qu'il avoit, & qu'ainſi ſi après le choc on trouve plus de force qu'il ne paroiſſoit y en avoir auparavant, on ſe trompoit ſans doute ſur l'eſtimation de cette force primitive. Voyons donc qui ſe trompe de lui ou de nous.

Je reprens ſon propre exemple qui eſt celui de M. Herman. Un corps A avec 1 de maſſe & 2 de viteſſe choque le corps B qui eſt en repos, & qui a 3 de maſſe ; nous ſuppoſons que les deux corps ſont élaſtiques. Après le choc, il y a 4 de force; donc, dit-il, le corps A devoit avoir 4 de force avant le choc ; car s'il avoit eu moins, il auroit donné plus qu'il n'avoit ; donc nous avons mal eſtimé ſa force en multipliant ſa maſſe par ſa viteſſe. Mais comment nous ſommes-nous donc trompés ? le corps A ſe mouvoit d'un mouvement uniforme avant le choc, ſa maſſe étoit 1 & ſa viteſſe 2, & dans le mouvement uniforme la force eſt comme la maſſe multipliée par la viteſſe, ou par l'eſpace parcouru dans un certain tems, l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique en tombe d'accord, page 425 ; donc il faut qu'il ſe ſoit trompé lui-même, ou que nous ne nous trompions pas, mais ne propoſons point cette alternative ; perſonne ne ſe trompe ici, le corps A n'a que 2 de force avant le choc, cela eſt certain, & après le choc, il y a plus de force qu'il n'y en avoit auparavant, cela eſt inconteſtable ; d'où vient donc cette différence ? c'eſt de l'élaſticité des corps que l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique n'a pas voulu diſtinguer de la force motrice ; le corps A ne peut donner ce qu'il a, mais la force du reſſort ſupplée au reſte. Voilà la ſolution.

M. Huguens a démontré qu'un corps en repos qui ne reçoit le choc que par l'entremiſe de pluſieurs autres corps qui ſont entre lui & le corps choquant, reçoit plus de force que ſi le corps choquant le frappoit immédiatement ; or je demande ſi cette force reçue par le corps choqué étoit dans le corps choquant dans le tems, par exemple, qu'il n'y avoit que trois corps en repos entre le choquant & choqué ; ſi on me dit oüi, je mets entre les deux deux fois plus de corps en repos, trois fois plus, & ainſi de ſuite à l'infini, & comme il arrivera, ſelon la Démonſtration de M. Huguens que la viteſſe du corps choqué par l'entremiſe de tous

choquante avec 1 de viteſſe, & aura par conſéquent 3 de force; donc après le choc il y aura 4 de force dont le mouvement ſera encore uniforme ; car nous ne voyons rien après le choc qui augmente ou diminue l'impreſſion que le choc aura donné aux deux boules, à moins qu'il n'arrive par hazard que d'autres boules ſe trouvent ſur leur chemin. Or je dis ces 4 de force ſeront doubles de la force 2 que la boule choquante avoit avant le choc; donc il n'eſt pas poſſible que l'effort 2 que la perſonne a fait pour pouſſer la boule choquante ſoit la cauſe de cette force 4, autrement il faudroit dire ou que l'effet peut n'être pas proportionnel à ſa cauſe, ou que l'effort 2 a dû devenir comme 4 en conſéquence d'un choc arrivé par hazard, ce qui eſt abſurde, attendu que les deux perſonnes qui ont pouſſé les deux premieres boules ayant fait des efforts comme 2 à 1, & ayant enſuite abandonné les boules à elles-mêmes, ces efforts non plus que les impreſſions qu'ils ont faites, ne ſçauroient par eux-mêmes changer de rapport, à moins qu'une cauſe étrangere ne vienne les alterer. Il eſt donc sûr & conſtant que la boule choquante n'avoit pas avant le choc une force qui fut comme le produit du quarré de ſa viteſſe par ſa maſſe, c'eſt-à-dire, une force 4, & que par conſéquent s'il s'eſt trouvé 4 de force après le choc, cette augmentation ne peut être venue que d'une cauſe étrangere à la force motrice, laquelle cauſe ne peut être ici que la mutuelle réaction des reſſorts; de même la boule choquante, & la choquée ayant reçû du choc, des forces comme 1 & 3, & des viteſſes uniformes, il eſt viſible qu'elles ſe meuvent de la même façon que ſi elles avoient été pouſſées par deux perſonnes qui auroient fait des efforts comme 1 & 3 & qui les auroient enſuite abandonnées à elles-mêmes; d'où il ſuit que les forces de ces boules ne peuvent être non plus que comme leurs maſſes multipliées par les viteſſes, & non par leurs quarrez; donc ni avant ni après le choc les forces des corps élaſtiques ne ſçauroient être dans des rapports tels que les défenſeurs des forces vives leur attribuent, & par conſéquent leur expériences ne nous prouvent tout au plus, ſinon que dans le choc direct des corps élaſtiques, il y a plus de force après le choc qu'auparavant, dans le cas où la boule choquante rebrouſſe chemin, de même que dans les chocs obliques où la force ſe trouve augmentée par les changemens de direction, comme on a vû ci-deſſus dans la Réponſe à la ſeconde preuve de M. Bernoulli.

L'on

L'on ne donne point ce que l'on n'a pas, c'eſt un axiome reçû de tout l'Univers, & l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique ne manque pas de s'en ſervir pour nous montrer qu'un corps qui ne choque qu'avec une certaine force ne peut pas produire une force plus grande que celle qu'il avoit, & qu'ainſi ſi après le choc on trouve plus de force qu'il ne paroiſſoit y en avoir auparavant, on ſe trompoit ſans doute ſur l'eſtimation de cette force primitive. Voyons donc qui ſe trompe de lui ou de nous.

Je reprens ſon propre exemple qui eſt celui de M. Herman. Un corps A avec 1 de maſſe & 2 de viteſſe choque le corps B qui eſt en repos, & qui a 3 de maſſe ; nous ſuppoſons que les deux corps ſont élaſtiques. Après le choc, il y a 4 de force ; donc, dit-il, le corps A devoit avoir 4 de force avant le choc ; car s'il avoit eu moins, il auroit donné plus qu'il n'avoit ; donc nous avons mal eſtimé ſa force en multipliant ſa maſſe par ſa viteſſe. Mais comment nous ſommes-nous donc trompés ? le corps A ſe mouvoit d'un mouvement uniforme avant le choc, ſa maſſe étoit 1 & ſa viteſſe 2, & dans le mouvement uniforme la force eſt comme la maſſe multipliée par la viteſſe, ou par l'eſpace parcouru dans un certain tems, l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique en tombe d'accord, page 425 ; donc il faut qu'il ſe ſoit trompé lui-même, ou que nous ne nous trompions pas, mais ne propoſons point cette alternative ; perſonne ne ſe trompe ici, le corps A n'a que 2 de force avant le choc, cela eſt certain, & après le choc, il y a plus de force qu'il n'y en avoit auparavant, cela eſt inconteſtable ; d'où vient donc cette différence ? c'eſt de l'élaſticité des corps que l'Auteur des Inſtitutions de Phyſique n'a pas voulu diſtinguer de la force motrice ; le corps A ne peut donner ce qu'il a, mais la force du reſſort ſupplée au reſte. Voilà la ſolution.

M. Huguens a démontré qu'un corps en repos qui ne reçoit le choc que par l'entremiſe de pluſieurs autres corps qui ſont entre lui & le corps choquant, reçoit plus de force que ſi le corps choquant le frappoit immédiatement ; or je demande ſi cette force reçue par le corps choqué étoit dans le corps choquant dans le tems, par exemple, qu'il n'y avoit que trois corps en repos entre le choquant & choqué ; ſi on me dit oüi, je mets entre les deux deux fois plus de corps en repos, trois fois plus, & ainſi de ſuite à l'infini, & comme il arrivera, ſelon la Démonſtration de M. Huguens que la viteſſe du corps choqué par l'entremiſe de tous

ces corps se trouvera augmentée peu à peu à l'infini, je conclurai que le corps choquant que l'on suppose avoir toujours une même vitesse finie dans tous ces chocs avoit cependant dans lui-même une force infinie, puisqu'à la fin il aura produit une force infinie dans le corps choqué ; or cela est absurde, donc il est absurde aussi de dire qu'un corps qui en choque un autre immediatement ait toujours toute la force qui se trouve après le choc ; la multiplication des forces dans le choc immédiat de même que dans le mediat, doit s'expliquer par l'élasticité des corps, & vouloir en chercher ailleurs la cause, c'est vouloir recourir à des qualités occultes à la maniere des anciens.

Je ne m'arrêterai pas davantage sur cette matiere, je crois en avoir assez dit pour montrer que M. de Mairan a découvert toute la fausseté de l'opinion des forces vives, & que sa Dissertation sera toujours vainement attaquée. Mais comme son Ouvrage renferme grand nombre d'autres preuves que je n'ai point rapportées, de peur d'être trop long, je conseille à ceux qui voudront être mieux instruits d'avoir recours à l'original, & d'y prendre cet esprit de justesse, de précision & de clarté qui y brille de toutes-parts.

L'illustre Auteur des *Institutions de Physique*, imprimées à Paris, chez Prault fils, Quai de Conti, en l'année 1740. n'ayant pas jugé à propos de mettre son nom à la tête de cet Ouvrage, j'ai crû devoir n'en parler que comme d'un Auteur anonime qui veut être inconnu, mais cela n'empêche point que je n'aye toute l'estime & le respect qui sont dûs à la sçavante érudition & au rang distingué de la personne qui a mis ce Traité au jour.

PROPOSITION XXXI.

107. *Si deux corps* A, B, (Fig. 32.) *sont attachés à un levier* AB, *que nous regarderons comme n'ayant aucune pesanteur, & qu'on divise la distance* AB *en deux parties* AC, CB *reciproques aux corps, c'est-à-dire, que* AC, CB : : B, A, *le point* C *sera le centre commun de gravité, ou le centre autour duquel les deux corps seront en équilibre, c'est-à-dire le centre d'équilibre.*

PREMIERE DEMONSTRATION.

Je prolonge le levier en D & en E, & je fais AD = CB & BE = AC, d'où il suit que DC = CE ; je divise DE en F, ensorte que DF soit à FE comme A est à B, & je conçois que la pesan-

teur du corps A, ou sa masse s'étende uniformement le long de DF, & que la pesanteur ou la masse du corps B s'étende aussi uniformement le long de FE, les deux corps formeront un solide représenté par DE, dont toutes les parties égales auront une égale pesanteur, parce que nous supposons que les corps sont homogenes; ainsi concevant que le solide soit divisé en deux parties égales, c'est-à-dire qu'il soit divisé au point C, le centre de gravité de ce solide sera le point C. Or par la construction la ligne DE est double de la ligne AB, & cette ligne DE étant partagée en F en deux parties DF, FE proportionnelles aux deux parties CB, DE de la ligne AB, il est visible que DF est double de CB ou de DA = CB, & que FE est double de CA ou de BF = CA, donc DF, FE, sont coupées chacune en deux parties égales aux points A, B, & par conséquent le centre de gravité du corps A repandu uniformement sur DF est le point A qui divise ce corps en deux parties égales, & le centre de gravité du corps B repandu uniformement sur FE, est le point B qui divise aussi ce corps en deux parties égales; or que les masses des corps A, B, s'étendent uniformement de part & d'autre de leur centre, ou qu'elles se ramassent autour de ces mêmes centres, leurs pesanteurs sont toujours les mêmes, parce qu'elles sont toujours comme les masses, lesqu'elles restent les mêmes quoi qu'elles changent de figures; donc supposant que les corps A, B se ramassent autour de leurs centres A, B, le point C qui est leur centre commun de gravité lorsqu'ils sont étendus sera encore leur centre commun lorsqu'ils seront ramassés.

SECONDE DEMONSTRATION.

Supposons que le levier AB, que nous regardons comme inflexible, soit attaché au point C, autour duquel il puisse tourner comme autour d'un axe, le corps B ne peut se mouvoir & décrire l'arc PB, que le corps A ne se meuve & ne décrive dans le même tems l'arc AO; or les vitesses de deux corps qui se meuvent dans des tems égaux sont entr'elles comme les espaces parcourus, donc la vitesse de B est à la vitesse de A comme l'arc BP à l'arc AO; mais l'angle PCB étant égal à l'angle OCB qui lui est opposé au sommet, les secteurs PCB, OCA sont semblables, donc BP, AO :: CB, CA, & par conséquent les vitesses des corps B, A sont comme les distances CB, CA, ainsi les quantités de mouvement étant comme $B \times BP$, $A \times AO$,

c'eſt-à-dire comme les produits des maſſes par les viteſſes, ou en raiſon compoſée de la raiſon des maſſes & de celle des viteſſes, feront auſſi en raiſon compoſée de la raiſon des maſſes & de celle des diſtances égale à la raiſon des viteſſes, donc les quantités feront comme B×BC, A×AC, & par conſéquent les forces feront dans la même raiſon, attendu que les forces ſont les cauſes des quantités & leur ſont proportionnelles. Or par la conſtruction nous avons B, A : : AC, BC, donc B×BC=A×AC, ainſi la force du corps B eſt égale à la force du corps A, & les deux corps ſont en équilibre autour du point C, qui par cette raiſon eſt leur centre de gravité.

Nota. Que dans cette Propoſition & dans toutes celles où nous parlerons d'un levier AB (*Fig*. 33.) qui tourne autour d'un point fixe O, il faut toujours ſuppoſer que le levier eſt d'abord dans une ſituation horizontale, & que ſon mouvement ſe fait dans un plan perpendiculaire à l'horiſon, c'eſt-à-dire, que s'il faiſoit une revolution entiere, tous ſes points, par exemple les points B, D, E, décriroient des circonférences concentriques, dont les cercles feroient perpendiculaires à l'horiſon, & dans un même plan; & s'il ne faiſoit qu'une partie de ſa revolution, tous ſes points ou les poids attachés à ſes points décriroient des parties de leurs circonferences proportionnelles à la partie de la revolution; par exemple, ſuppoſons que le levier s'arrête dans la poſition *ab*, & que dans cette poſition il n'ait décrit que la huitiéme partie de ſa revolution, les arcs B*b*, D*d*, E*e*, décrits par les points B, D, E, ou par les poids attachés à ces points, ne feroient que les huitiémes parties de leurs circonférences, & les ſecteurs OB*b*, OD*d*, OE*e* de ces arcs feroient dans le même plan des cercles perpendiculaires à l'horiſon.

COROLLAIRE I.

108. Donc pour trouver le centre de gravité de deux poids A, B (*Fig*. 32.) attachés à un levier, on n'a qu'à couper leur diſtance AB en deux parties AC, CB reciproques aux poids B, A; ou bien comme on a A, B : : BC, AC, on aura auſſi A+B, B : : BC+AC, AC, c'eſt-à-dire, que ſi l'on prend une quatriéme proportionnelle à la ſomme des poids A+B, à l'un des poids B & à la diſtance BC+AC ou AB des poids, cette quatriéme proportionnelle ſera la diſtance de l'autre poids A au centre de gravité, & par conſéquent on aura le centre cherché.

COROLLAIRE II.

109. Si deux corps A, B attachés à un levier AB ſont égaux & en équilibre, leur centre C de gravité commun ſera également éloigné de l'un & de l'autre; car pour faire équilibre il faut que AC, CB :: B, A, mais B=A, donc AC=CB.

PROPOSITION XXXII.

110. *Si deux ou pluſieurs corps* A, B, C, D, *&c.* (Fig. 34.) *ſont attachés en différens endroits d'un levier inflexible* AD, *& que ce levier tourne autour d'un point* O, *ſoit que ce point ſoit le centre commun de gravité des corps ou qu'il ne le ſoit pas, je dis que les forces des corps* A, B, C, D, *&c. ſont entr'elles comme les produits de leur maſſes par leur diſtances au point* O.

DEMONSTRATION

Concevons que le levier ſe meuve & parvienne à la poſition HE, il eſt viſible que les corps A, B, C, D, auront parcouru dans le même tems les arcs AH, BG, FC, ED, donc les viteſſes de ces corps ſeront entr'elles comme ces arcs. Or les arcs ſont proportionnels à leurs rayons AO, BO, &c. à cauſe qu'ils meſurent des angles égaux, donc les viteſſes des corps ſeront comme les rayons, c'eſt-à-dire comme leurs diſtances AO, BO, &c. du point O; or les quantités de mouvement des corps A, B, C, D, ſont comme les produits de leurs maſſes par leurs viteſſes, ou en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes, donc elles ſont auſſi en raiſon compoſée des maſſes & des diſtances leſquelles ſont comme les viteſſes; mais les forces des corps étant les cauſes des quantités de mouvement, ſont proportionnelles à ces quantités; donc les forces ſont en raiſon compoſée des maſſes & des diſtances, ou comme les produits des corps A; B, C, D par leurs diſtances AO, BO, &c.

DEFINITIONS.

111. Quand le point O n'eſt pas le centre de gravité commun des corps attachés en différens endroits du levier, ce point ſe nomme *centre de mouvement*, & toute ligne doite horiſontale qui paſſe par ce centre, & qui par conſéquent coupe le levier, ſe nomme *axe de mouvement*, lorſque le levier tourne autour d'elle en conſervant ſa même inclinaiſon.

Quand le point O eſt le centre commun de gravité des corps ; on le nomme *centre d'équilibre*, & toute ligne droite horiſontale qui paſſe par ce centre & coupe par conſéquent le levier, ſe nomme *axe d'équilibre*, lorſque le levier en tournant autour d'elle conſerve toujours ſa même inclinaiſon.

Les produits des maſſes par leurs diſtances s'appellent *momens* des corps ; ainſi le produit de A par AO eſt le moment de A, le produit de B par BO eſt le moment de B, &c.

Les momens ſont donc proportionnels aux forces & auſſi aux quantités de mouvement, & ces momens augmentent ou diminuent à meſure que les corps s'éloignent en approchant de O.

PROPOSITION XXXIII.

112. *Deux ou pluſieurs corps* A, B, C, D, (Fig. 35.) *étant attachés en différens endroits d'un bras* OD *de levier* FD, *qui tourne autour d'un point* O, *trouver un point* H *où tous les corps étant tranſportez, peſeroient autant ſur ce bras qu'ils peſent chacun en leur places, c'eſt-à-dire, ou leur moment ſeroit égal à la ſomme des momens.*

SOLUTION.

Prenez les momens de chaque corps en particulier, faites-en la ſomme & diviſez cette ſomme par celle des corps, le quotient ſera la diſtance HO du point cherché H au point O.

Ceci eſt évident, car les corps étant tous tranſportés au point cherché H, leur moment ſera le produit des maſſes ou de la ſomme des corps par la diſtance des corps ; or ce moment doit être égal à la ſomme des momens que les corps ont chacun en leur place, donc la ſomme de ces momens eſt auſſi égale au produit de la ſomme des corps par la diſtance HO ; mais ce produit étant diviſé par la ſomme des corps donneroit la diſtance HO, donc la ſomme des momens des corps diviſée par la même ſomme des corps, doit auſſi donner la diſtance HO.

Soit $A=1$, $B=3$, $C=4$, $D=2$, $OA=2$, $OB=4$, $OC=5$, $OD=6$; donc $A \times OA=2$, $B \times OB=12$, $C \times OC=20$, & $D \times OD=12$ donc la ſomme des momens ſera $2+12+20+12=46$, & cette ſomme doit être égale au moment des corps tranſportés en H ; ainſi diviſant 46 par la ſomme des corps $1+3+4+2=10$, le quotient $\frac{46}{10}=4\frac{3}{5}$ ſera la diſtance OH, c'eſt-à-dire que la diſtance OH doit être à la diſtance $OA=2$, comme $4\frac{3}{5}$ eſt à 2.

COROLLAIRE.

113. Les augmentations de moment que les corps A, B gagnent en s'éloignant de O lorſqu'ils ſont tranſportés en H, ſont enſemble égales aux diminutions de moment que les corps C, D ſouffrent en s'approchant de O lorſqu'on les tranſporte en H; car puiſque lorſque les corps ſont tous en H, leur moment eſt égal à la ſomme des momens qu'ils avoient chacun en leur place, il faut néceſſairement que ce qui a été gagné d'une part ſe trouve perdu de l'autre.

PROPOSITION XXXIV.

114. *Suppoſant les mêmes choſes que dans la Propoſition précedente, trouver le point où il faudroit tranſporter le centre* O *de mouvement* (Fig. 35.) *pour mettre les corps en équilibre.*

SOLUTION.

Cherchez par la Propoſition précédente le point H où tous les corps étant tranſportés, leur moment ſeroit égal à la ſomme des momens que les corps ont en leur place, & ce point H ſera le centre d'équilibre, de ſorte que ſi on tranſporte le point O en H, c'eſt-à-dire, ſi le levier au lieu de tourner autour du point fixe O tourne autour du point fixe H, les corps ſeront en équilibre autour de H.

DEMONSTRATION.

Les momens des corps A, B, par rapport à H, ſont A×AH, B×BH, & ces momens ſont égaux aux augmentations de momens par rapport à O, que les mêmes corps recevroient ſi on les tranſportoit en H, de même les momens des corps C, D par rapport à H, ſont C×CH, D×DH, & ces momens ſont égaux aux diminutions de momens par rapport à O, que ces mêmes corps ſouffriroient ſi on les tranſportoit en H; mais les augmentations priſes enſemble ſont égales aux diminutions priſes enſemble (*N.* 113.) donc la ſomme des momens des corps A, B, par rapport à H, eſt égale à la ſomme des momens des corps C, D par rapport à H, mais les forces des corps ſont proportionnelles aux momens, donc la ſomme des forces des corps A, B, par rapport à H, eſt égale à la ſomme des forces des corps C,

D par rapport à H, & par conséquent le point H est le point d'équilibre cherché.

PROPOSITION XXXV.

115. *Supposant encore les mêmes choses, trouver à quel point z ou Z du bras* AD (Fig. 35.) *il faudroit transporter tous les corps pour augmenter ou diminuer leur moment d'une certaine quantité.*

SOLUTION.

Prenez les momens de chaque corps par rapport au centre O de mouvement, faites-en la somme, & ajoûtez à cette somme, ou retranchez-en la quantité de mouvement qu'on veut ajouter ou retrancher; divisez ensuite le reste par la somme des corps, & le quotient sera la distance du point cherché Z ou z au centre O.

Ceci est évident, car la somme des momens étant augmentée ou diminuée de la quantité qu'on veut ajoûter ou retrancher, doit être égale au moment des corps transportés en z ou en Z; or le moment en z ou Z est le produit de la somme des corps par la distance cherchée Oz ou OZ, & par conséquent ce moment étant divisé par la somme des corps donneroit la distance cherchée, donc la somme des momens augmentée ou diminuée doit aussi donner la même distance cherchée, si on la divise par la somme des corps.

Soit comme ci-dessus $A=1$, $B=3$, $C=4$, $D=2$, $OA=2$, $OB=4$, $OC=5$, $OD=6$, nous aurons $A\times OA=2$, $B\times OB=12$, $C\times OC=20$, $D\times OD=12$, donc la somme des momens sera $2+12+20+22=46$, & la somme des corps $1+3+4+2=10$; maintenant si l'on veut que le moment des corps transportés en un point z surpasse par exemple, de 4 la somme 46 des momens, j'ajoûte 4 à 46, ce qui fait 50, & divisant par la somme 10 des corps, le quotient $\frac{50}{10}=5$ marque que la distance zO doit être à la distance AO comme 5 à 2.

Et si au contraire on veut que le moment des corps transportés en un point Z soit moindre de 4 que la somme 46 des momens, je retranche 4 de 46, & divisant le reste 42 par la somme 10 des corps, le quotient $\frac{42}{10}=4\frac{1}{5}$ marque que la distance OZ doit être à la distance OA comme $4\frac{1}{5}$ à 2.

PROPOSITION

PROPOSITION XXXVI.

116. *Deux ou plusieurs corps* A, B, C, D, (Fig. 36.) *étant attachez aux bras d'un levier* AD *qui tourne autour d'un point* O, *lequel n'est pas le centre d'équilibre, trouver quel est le bras surchargé, de combien il est surchargé, & en quel endroit il faudroit transporter tous les corps, afin que leur moment fût égal au moment dont l'un des bras est surchargé.*

SOLUTION.

En premier lieu, faites la somme des momens des corps A, B, qui sont sur le bras AO, & la somme des momens des corps C, D, qui sont sur les bras OD. Supposé que la derniere somme soit plus grande que la premiere, le bras OD sera le bras surchargé.

En second lieu, retranchez la moindre somme de la plus grande, & le reste sera le moment qui surcharge le bras OD.

Enfin, divisez le moment qui surcharge le bras OD par la somme des poids, & le quotient sera la distance OH du point cherché H au centre de mouvement O; car tous les poids étant transportés en ce point H, leur moment par rapport à O doit être égal au moment qui surcharge le bras OD; or le moment des poids transportés en H est égal au produit de la somme des poids par la distance OH, & par conséquent ce moment étant divisé par la somme des poids donneroit la distance OH; donc le moment qui surcharge le bras OD étant divisé par la même somme doit aussi donner la même distance.

PROPOSITION XXXVII.

117. *Les mêmes choses étant supposées que dans la Proposition précedente, trouver le point où il faudroit transporter le centre* O *pour faire équilibre entre les corps* (Fig. 36).

SOLUTION.

Cherchez par le Problême précédent le point H, où tous les corps étant transportés leur moment seroit égal au moment qui surcharge le bras OD, & ce point sera le point cherché, ensorte que si le levier vient à être attaché en H, & non plus en O, tous les corps seront en équilibre autour du point H.

DEMONSTRATION.

Le bras OD étant le bras ſurchargé, le moment des corps C, D peut ſe diviſer en deux momens, dont l'un ſera égal au moment des corps A, B du bras AO, & l'autre ſera le moment qui ſurcharge les bras OD; ſuppoſons donc d'une part que les corps A, B ſoient tranſportés en O, & de l'autre que les corps C, D ſoient tranſportés en un point comme R, où ils ayent perdu un moment égal au moment que les corps A, B tranſportés en O auront perdu (*N.* 115.) il eſt viſible que les corps A, B ayant perdu leur moment, il ne reſtera du moment des corps C, D que le moment qui ſurcharge le bras OD; c'eſt pourquoi ſi l'on veut que tous les corps tranſportés en H ayent un moment égal au moment ſurchargeant, il faut que le moment que les corps en O gagnent par rapport à O lorſqu'ils ſont en H, ſoit égal au moment que les corps en R perdent par rapport au même point O lorſqu'ils ſont en H, ainſi le moment que les corps A, B perdent ſur le bras AO, joint à celui qu'ils gagnent ſur le bras OD, eſt égal au moment que les corps C, D perdent ſur le même bras OD; or ſi l'on tranſporte le centre de mouvement en H, c'eſt-à-dire, ſi le levier vient à être attaché en H & non plus en O, & que tous les corps ſoient tranſportés en leur place, les corps A, B auront par rapport à H, non-ſeulement le moment qu'ils avoient perdu par rapport à O ſur le bras AO, mais encore celui qu'ils avoient gagné ſur le bras OD, & les corps C, D reprendront par rapport à H le moment qu'ils avoient perdu ſur le même bras OD, donc le moment des corps A, B par rapport à H, ſera égal au moment des corps C, D par rapport à H, & le point H ſera le centre d'équilibre.

PROPOSITION XXXVIII.

118. *Pluſieurs poids* A, B, C, D (Fig. 36.) *étant attachez en differens endroits d'un levier* AD, *trouver ſur ce levier leur centre d'équilibre.*

SOLUTION.

Regardez le point A comme étant le centre de mouvement, & prenant les momens de chacun des corps par rapport au point A, faites-en la ſomme que vous diviſerez par la ſomme des corps, & le quotient vous donnera la diſtance AH, & par con-

ſéquent le point H ſera le centre d'équilibre.

DEMONSTRATION.

Puiſque la ſomme des momens diviſée par la ſomme des poids donne la diſtance AH, donc la ſomme des poids multipliée par la diſtance AH eſt égale à la ſomme des momens; or la ſomme des poids multipliée par AH eſt le moment que tous les poids auroient étant mis en H, donc le point H eſt le point où tous les corps étant tranſportés, leur moment eſt égal à la ſomme des momens qu'ils auroient chacun en leur place; or quand cela arrive le point H eſt le centre d'équilibre (*N.* 114.) donc, &c.

PROPOSITION. XXXIX.

119. *Deux ou pluſieurs corps* A, B (Fig. 37.) *étant attachés à un bras* OC *d'un levier* EC, *qui tourne autour d'un point fixe* O, *trouver à quel endroit de l'autre bras* EO, *il faut attacher un autre corps donné* D *pour faire équilibre.*

SOLUTION.

Prenez les momens des corps A, B par rapport à O, faites-en la ſomme, & diviſez-la par le corps donné D, le quotient ſera la diſtance cherchée OD.

DEMONSTRATION.

Puiſque la ſomme des momens des corps A, B diviſée par D donne la diſtance OD, donc le produit de D par OD eſt égal à la ſomme des momens des corps A, B; mais le produit D×OD eſt le moment du corps D par rapport à O, donc le moment de D eſt égal aux momens de A & B pris enſemble; & par conſéquent il y a équilibre.

REMARQUE.

120. Nous avons dit (*N.* 111.) que toute ligne droite horiſontale, autour de laquelle un levier eſt cenſé tourner en gardant toujours ſa même inclinaiſon, ſe nomme *axe ou diametre de mouvement*, ſi les corps attachés aux bras du levier ne ſont pas en équilibre, & *axe ou diametre d'équilibre*, ſi les corps ſont en équilibre. Or nous n'avons conſideré juſqu'ici que les leviers perpendiculaires à cet axe, & c'eſt pourquoi nous avons dit dans

la note du nombre 107. qu'il falloit ſuppoſer que le levier pendant ſon mouvement décrivoit un plan perpendiculaire à l'horizon, & que tous ſes points décrivoient des circonférences concentriques (*Fig.* 33.) qui étoient toutes dans le même plan, ce qui doit être effectivement ainſi, puiſqu'en ſuppoſant, comme nous faiſons, que le levier ſoit toujours perpendiculaire à l'axe, il s'enſuit néceſſairement que les rayons des circonférences que tous ſes points décrivent ſont auſſi perpendiculaires à cet axe, c'eſt-à-dire, que ces rayons ne ſont autre choſe que les diſtances des points au centre de mouvement, ou que les parties du levier compriſes entre le centre de mouvement & les points qui décrivent les circonférences.

Mais ſi le levier tourne autour d'un axe qui ne lui ſoit pas perpendiculaire, il y a du changement dans tout ce que nous venons de dire, & c'eſt ce que nous allons examiner.

Suppoſons donc qu'un levier AB (*Fig.* 38.) étant attaché fixement en un point O d'un axe EP horiſontal, cet axe vienne à tourner ſur lui-même ſans changer de poſition, c'eſt-à-dire qu'il tourne comme un aiſſieu, il eſt évident 1°. Que le levier AB tournera autour de cet axe en conſervant toujours le même angle BOP. 2°. Que tous ſes points A, D, H, B, feront toujours à égale diſtance de l'aiſſieu, & que par conſéquent les perpendiculaires AE, DR, HS, BP, abaiſſées de ce point ſur l'axe ſeront toujours les mêmes. 3°. Que les circonférences décrites par les points A, D, H, B, ſont des circonférences de cercles perpendiculaires à l'horiſon, car les droites AO, AE étant toujours les mêmes, & l'angle AEO étant droit, la circonférence décrite par le point A eſt la même que la circonférence du cercle décrite par le rayon AE, mais ce cercle eſt perpendiculaire ſur l'axe EF, lequel eſt dans le plan de l'horiſon, donc il eſt perpendiculaire à l'horiſon, &c. 4°. Enfin que les circonférences décrites par les points A, D, H, B, ſeront toutes paralleles entr'elles, mais dans des plans différens.

Or de-là il s'enſuit que la différence du levier perpendiculaire a ſon axe au levier oblique à ſon axe, conſiſte 1°. En ce que les circonférences décrites par les points du premier ſont toutes dans un même plan, au lieu que les circonférences décrites par les points du ſecond ſont toutes dans des plans différens. 2°. Que les momens des corps attachés en différens endroits d'un levier perpendiculaire à ſon axe, ſont les produits des corps par leurs

diſtances au centre de mouvement, au lieu que les momens des points attachés à un levier oblique, ſont les produits des corps par les perpendiculaires abaiſſées ſur l'axe, car les viteſſes des corps A, D, H, B, étant entr'elles comme les circonférences qu'ils décrivent, & ces circonférences étant comme les rayons AE, DR, &c. les momens ſont par conſéquent les produits A×AE, D×DR, &c.

PROPOSITION XL.

121. *Si deux ou pluſieurs corps* A, B, C (Fig. 39.) *attachez à un levier* AC, *ſont en équilibre autour d'un axe* EF *qui paſſe par le centre* O, *ils ſeront en équilibre autour de tout autre axe qui paſſera par le même point* O.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que l'axe horiſontal EF ſoit perpendiculaire au levier AC, le moment A×AO du corps A ſera donc égal à la ſomme B×BO+C×CO, des momens des corps B, C, puiſqu'on ſuppoſe que les corps A, B, C ſont en équilibre. Concevons maintenant que le levier AC ſoit attaché fixement en O à un autre axe horiſontal HQ, lequel vienne à tourner autour de lui-même comme un aiſſieu, il eſt évident par la remarque précedente, que ſi des points A, B, C on abaiſſe les perpendiculaires AP, BQ, CR ſur l'axe HR, les momens des corps A, B, C par rapport à cet axe ſeront A×AP, B×BQ, C×CR; or à cauſe des triangles ſemblables AOP, BOQ, COR, les droites AP, BQ, CR ſont entr'elles commes les droites AO, BO, CO, donc les corps A, B, C multipliés par les droites AP, BQ, CR, ſont entr'eux comme les mêmes corps multipliés par les droites AO, BO, CO, & par conſéquent A×AP, B×BQ+C×CR :: A×AO, B×BO+C×CO, mais nous avons A×AO=B×BO+C×CO, donc A×AP=B×BQ+C×CR, c'eſt-à-dire, le moment du corps A par rapport à l'axe HR, eſt égal à la ſomme des momens des corps B, C, par rapport au même axe, donc ces corps ſont en équilibre autour de cet axe de même qu'ils l'étoient autour de l'axe EF.

PROPOSITION XLI.

122. *Un axe* EF (Fig 40.) *étant donné, autour duquel tourne un levier* AB *traverſé d'autres leviers* HI, CD *auxquels ſont attachez*

des poids H, I, C, D, *trouver* 1°. *Le moment de ces poids par rapport au levier* AB *consideré comme un axe.* 2°. *Le moment de ces mêmes poids par rapport à l'axe* EF. 3°. *Les points où il faudroit transporter les poids sur le levier* AB, *afin qu'ils eussent par rapport à l'axe* EF *les mêmes momens qu'ils avoient en leur place.* 4°. *Le point où il faudroit les transporter tous sur le levier* AB, *afin que le moment par rapport à* EF *fût égal à l'excès du moment dont l'un des bras est surchargé.* 5°. *Enfin le point où il faudroit attacher le levier* AB *à l'axe* EF, *afin que les corps fussent en équilibre autour de* EF.

SOLUTION.

En premier lieu, si le levier AB est consideré comme un axe horisontal auquel les leviers HI, CD, aussi horisontaux sont attachés fixement, & qu'il ne puisse tourner que sur lui-même comme un aissieu; des points H, I, C, D, abbaissez sur AB les perpendiculaires HS, IT, CQ, DR, & les momens des corps H, I, C, D, seront les produits de ces corps multipliés chacun par leur perpendiculaires. Car le levier CD conservant toujours la même obliquité à l'égard de AB, il est visible que si AB tourne autour de lui-même le corps C décrira une circonférence dont la droite CQ sera le rayon, & que par conséquent le moment de C par rapport à AB sera C×CQ (*N.* 120.) & on prouvera la même chose des autres corps.

En second lieu, si le levier AB est attaché fixement à l'axe horisontal EF, des points H, I, C, D, abbaissez sur l'axe EF les perpendiculaires H*m*, I*n*, C*r*, D*u*, & les momens des corps H, I, C, D, seront les produits de ces corps multipliés chacun par leur perpendiculaires; car quand EF viendra à tourner sur lui-même, le corps C étant toujours à égale distance de cet axe décrira autour de EF une circonférence dont le rayon sera la perpendiculaire C*r*; donc le moment de C par rapport à EF sera C×C*r* (*N.* 120.) & on prouvera la même chose des autres corps.

En troisiéme lieu, des points H, I, C, D, (*Fig.* 41.) menez les droites H*f*, I*d*, C*h*, D*q*, paralleles à l'axe EF, & les points *f*, *d*, *h*, *q*, où ces paralleles coupent le levier AB seront les points où il faudra transporter les corps si l'on veut que leurs momens par rapport à EF soient égaux à ceux qu'ils ont chacun en leur place; car des points C, *h*, menant les droites C*r*, *h*3, perpendiculaires à l'axe, il est clair que ces deux droites sont égales puisqu'elles sont perpendiculaires entre les paralleles EF, *h*C;

ainsi $C \times Cr = C \times h3$, mais $C \times Cr$ est le moment du corps C mis en C, & $C \times h3$ est le moment du corps C mis en *h*; donc le corps mis en *h* a un moment par rapport à EF égal à celui qu'il a en C, & on prouvera la même chose des autres corps.

En quatriéme lieu, si les corps H, I, C, D, étant transportés aux points *f*, *d*, *h*, *q*, sont en équilibre autour d'un axe qui passant par O seroit perpendiculaire au levier, ils seront aussi en équilibre autour de l'axe EF (*N.* 121.) & par conséquent il est visible qu'il n'y aura point de bras surchargé.

Mais si l'un des bras se trouve surchargé, par exemple le bras O*q*, considerez le levier *fq* comme s'il tournoit autour d'un axe ZY qui lui fut perpendiculaire, & prenant les momens $C \times hO$, $D \times qO$, des corps C, D, mis en *h* & *q*, & la somme des momens $H \times fO$, IdO, des corps H, I, mis en *f* & en *d*, retranchez la petite somme de la grande, & divisant le reste par la somme des corps, le quotient vous donnera la distance OV, & par conséquent le point où il faudroit mettre tous les corps, afin que leur moment par rapport à l'axe ZY fut égal à l'excès du moment surchargeant (*N.* 116.); or je dis que le moment par rapport à l'axe EF des corps mis en V est encore égal à l'excès du moment des corps C, D, sur le moment des corps H, I.

Car des points *f*, *d*, *h*, *q*, menant sur EF les perpendiculaires *f*1, *d*2, *h*3, *q*4, les momens par rapport à EF des corps mis en *f*, *d*, *h*, *q*, seront $H \times f1$, $I \times d2$, $C \times h3$, $D \times q4$, mais à cause des triangles semblables O*f*1, O*d*2, O*h*3, O*q*4, les perpendiculaires *f*1, *d*2, *h*3, *q*4, sont entr'elles comme les droites *f*O, *d*O, *h*O, *q*O; donc les corps multipliés par les droites *f*1, *d*2, *h*3, *q*4, c'est-à-dire, les momens par rapport à EF seront entr'eux comme les corps multipliés par *f*O, *d*O, *h*O, *q*O, ou comme les momens par rapport à ZY; donc les momens $D \times q4 + C \times h3$ seront aux momens $H \times f1 + I \times d2$ comme les momens $D \times qO + C \times hO$ aux momens $H \times fO + I \times dO$; donc l'excès de $D \times q4 + C \times h3$ sur $H \times f1 + I \times d2$ sera à l'excès de $D \times q + OC \times hO$ sur $H \times fO + I \times dO$ comme les momens excédans par rapport à EF aux momens excedans par rapport à ZY; or la somme des corps multipliée par V5 est à la somme des corps multipliée par VO comme les corps multipliés par *q*4, *h*3, *d*2, *f*1, sont aux corps multipliés par *q*O, *h*O, *d*O, *f*O, à cause que V5, est à VO comme les droites *q*4, *h*3, &c. sont aux droites *q*O, *h*O, &c. donc la somme des corps multipliée

par $V5$ eſt à la ſomme des corps multipliée par VO comme l'excès de $D \times q4 + C \times h3$ ſur $H \times f1 + I \times d2$ eſt à l'excès de $D \times qO + C \times hO$ ſur $H \times fO + I \times dO$; mais l'excès de $D \times qO + C \times hO$ ſur $H \times fO + I \times dO$ eſt égal à la ſomme des corps multipliée par OV (*N.* 116.) donc l'excès de $D \times q4 + C \times h3$ ſur $H \times f1 + I \times d2$ eſt égal à la ſomme des corps multipliée par $V5$, & par conſéquent le moment par rapport à EF des corps mis en V eſt égal à l'excès du moment des corps C, D, ſur le moment des corps H, I.

En cinquiéme lieu, ſi l'on tranſporte l'axe perpendiculaire en V, les corps mis en *f*, *d*, *h*, *q*, ſeront en équilibre autour de cet axe (*N.* 116.) donc ſi l'on tranſporte l'axe EF en V, les corps mis en *f*, *d*, *h*, *q*, ſeront auſſi en équilibre autour de EF (*N.* 121.) mais les corps mis en H, I, C, D, avoient les mêmes momens par rapport à EF lorſqu'il paſſoit par O, que ceux qu'ils ont en *f*, *d*, *h*, *q* ; donc puiſqu'ils ſont en équilibre étant en *f*, *d*, *h*, *q*, lorſqu'on tranſporte EF en O, ils ſeront auſſi en équilibre en H, I, C, D.

PROPOSITION XLII.

123. *Si un levier* AB *qui tourne autour d'un axe* EF (Fig. 42.) *traverſe d'autres leviers* CD, HI, *chargés de poids*, C, D, H, I, *& que les points* A, B, *par où il les traverſe ſoient les centres de gravité des poids ſur leur leviers, je dis que les poids* C, D, *étant mis en leur centre de gravité* A, *ſur le levier* CD, *& les poids* H, I, *en leur centre de gravité* B *ſur le levier* H, I, *leurs momens par rapport à l'axe* EF *ſeront égaux aux momens qu'ils ont chacun en leur place.*

DEMONSTRATION.

Des points C, D, H, I, je mene les droites CP, DQ, HR, IS, paralleles à l'axe EF, & par la Propoſition précédente les corps C, D, H, I, étant tranſportés aux points Q, P, R, S, où ces paralleles coupent le levier AB, leurs momens par rapport à EF ſeront les mêmes que ſi ces corps étoient en leur places C, D, H, I ; des points R, B, S, je mene les droites RN, BM, SL perpendiculaires ſur EF, & B3 perpendiculaire ſur SL, les momens des corps H, I, mis en R & en S ſont donc $H \times RN$, $I \times SL$; or par la ſuppoſition les corps H, I, mis en H & en I ſont en équilibre autour du point B ; donc $H \times HB = I \times IB$, mais à cauſe des triangles ſemblables RHB, SIB, on a HB,

IB

IB :: RB, BS, & à cauſe des triangles ſemblables R2B, B3S, on a RB, BS :: 2B, 3S ; donc HB, IB, 2B, 3S, & par conſéquent $H \times HB$, $I \times IB$ :: $H \times 2B$, $I \times 3S$, & à cauſe de $H \times HB = I \times IB$, on a $H \times 2B = I \times 3S$, c'eſt-à-dire, que ſi on tranſporte en B, les corps H, I, mis en R, & S le moment $H \times 2B$ que le corps H gagnera par rapport à EF ſera égal au moment $I \times 3S$ que le corps I perdra par rapport à EF, donc la ſomme de leurs momens en B par rapport à EF ſera la même que la ſomme de leurs momens en R & en S, ou en H & I, & on prouvera la même choſe par rapport aux corps C, D, donc, &c.

COROLLAIRE.

124. Les corps H, I, peſent donc autant ſur le bras OB lorſqu'ils ſont en B, que lorſqu'ils ſont en leur place, & les corps C, D, peſent autant ſur le bras AO, lorſqu'ils ſont en A, que lorſqu'ils ſont en C & D.

PROPOSITION XLIII.

125. *Pluſieurs leviers* AB, CD, EF (Fig. 43.) *chargés de poids étant ſur un même plan horizontal, trouver leur centre commun d'équilibre.*

SOLUTION.

Je cherche le centre d'équilibre H des poids A, B, ſur leur levier AB, & le centre d'équilibre S des poids C, D, ſur leur levier CD, & joignant ces centres par une droite HS, que je conſidere comme un levier qui ſeroit traverſé par un axe entre les points H, S, comme par exemple en V, il eſt clair par la Propoſition précédente que les poids B, A, étant tranſportés en H peſeroient autant ſur le bras HV que s'ils étoient en leur place, & que les poids C, D, tranſportés en S peſeroient autant ſur le bras VS que s'ils étoient en C & D. Je conçois donc que les poids A, B, ſoient tranſportés en H où ils ne font qu'un ſeul poids H, & que les poids C, D, ſoient tranſportés en S où ils ne font qu'un ſeul poids S. Je cherche le centre d'équilibre V des poids H, S, ſur le levier VS, & le centre d'équilibre T des poids E, F, & joignant les centres V, T, par la droite VT que je conſidere comme un levier qui ſeroit traverſé par un axe en quelque point X entre V & T, il eſt encore clair par la Propoſition précédente que les poids H, S, étant mis en V peſeroient

autant ſur le bras XV que s'ils étoient en leur place, & que les poids E, F étant mis en T peſeroient autant ſur le bras XT que s'ils étoient en E, F.

Je conçois donc que les poids S, H, ſoient mis en V, où ils ne font qu'un ſeul poids V, & que les poids E, F, ſoient tranſportés en T pour n'y faire qu'un ſeul poids T, & cherchant le centre d'équilibre X des poids V, T, ſur le levier VT, ce point X eſt le centre commun d'équilibre de tous les poids, ce qui eſt évident par ce qui a été dit ci-deſſus.

PROPOSITION XLIV.

126. *Suppoſant les mêmes choſes que dans la Propoſition précedente; je dis que ſi le levier* AB, CD, EF (Fig. 44.) *tournent autour d'un axe* MN *poſé d'un même côté par rapport à ces leviers, les momens par rapport à* MN *des poids chacun en ſa place ſeront égaux au moment de la ſomme des poids miſe au centre commun d'équilibre* X.

DEMONSTRATION.

Des points A, H, B, du levier AB, j'abbaiſſe ſur MN les perpendiculaires AM, HP, BQ, & des points A, H, je mene les droites Aa, Hb, paralleles à MN; il eſt évident qu'en tranſportant le corps A au centre de gravité H, ſa diſtance à l'axe MN augmente de la quantité Ha, & qu'au contraire en tranſportant le corps B en H ſa diſtance à l'axe MN diminue de la quantité Bb; or à cauſe des triangles ſemblables AHa, HBb, on a AH, HB :: Ha, Bb, & à cauſe que le point H eſt le centre d'équilibre des corps A, B, ſur le levier AB, on a $A \times AH = B \times BH$, donc $A \times Ha = B \times Bb$; c'eſt-à-dire, le moment que A tranſporté en H gagne par rapport à MN eſt égal au moment que le corps B tranſporté en H perd par rapport à MN, & par conſéquent le moment des deux corps en H eſt égal à la ſomme des momens qu'ils avoient en A & B. On prouvera de même que les corps C, D, étant tranſportés en S qui eſt leur centre d'équilibre par rapport à leur levier CD, leur moment par rapport à MN eſt égal à la ſomme des momens qu'ils ont en C & D. Concevant donc que les poids A, B, ſoient tranſportés en S pour n'y faire qu'un ſeul poids S, & qu'ayant mené la droite SH on cherche ſur cette droite le centre commun d'équilibre V des deux poids H, S, on prouvera de même que les deux poids H, S, étant tranſportés en V, leur moment par rapport à MN ſera égal à la ſomme des momens

qu'ils ont en H & S, & que les poids E, F, étant transportés en T qui est leur centre d'équilibre sur leur levier EF, leur moment par rapport à MN sera égal à la somme des momens qu'ils ont en E & F; concevant donc que les poids H, S, soient transportés en V pour n'y faire qu'un seul poids V, & que les corps E, F, soient transportés en T pour n'y faire qu'un seul poids T, & qu'ayant mené la droite VT, on cherche sur cette droite le centre d'équilibre X des poids V, T, on prouvera encore que les poids V, T, étant transportés en X, leur moment par rapport à MN sera égal à la somme des momens qu'ils ont en V & en T, & par conséquent on aura prouvé que le moment par rapport à MN de tous les corps mis en X est égal à la somme des momens mis chacun en leur place.

REMARQUE.

127. De tout ce que nous venons de dire, on tire la maniere de trouver les centres de gravité des surfaces planes & de leur circuits, & la maniere de mesurer les solides que ces surfaces produisent en tournant autour d'un axe, & les surfaces de ces solides.

Par exemple, pour trouver le centre de gravité de la figure ABCD (*Fig.* 45.), je conçois que cette figure tourne autour de l'un de ses côtés AD comme autour d'un axe, & qu'elle soit divisée en ses élemens paralleles à cet axe; ces élémens selon la Méthode des Indivisibles, seront des lignes, & selon la Méthode des nouveaux calculs, ce seront de petits trapezoïdes ou de petits rectangles lesquels ayant la hauteur infiniment petite, peuvent encore passer pour des lignes; or quoique des lignes géometriques n'ayent par elles-mêmes aucune pesanteur, cependant si on conçoit qu'elles soient divisées en parties égales & infiniment petites, & que de chacune de ces parties pendent des poids tous égaux entr'eux, il est visible que ces poids seront entr'eux comme les parties ausquelles ils seront attachés, & qu'ainsi on pourra regarder la pesanteur des poids comme appartenant à ces parties, & par conséquent les lignes composées par ces parties pourront être regardées comme ayant une pesanteur égale à la somme des pesanteurs de leur parties. Mais il est visible que dans cette supposition le centre de pesanteur de ces lignes sera sur le milieu de chacune d'elles, puisqu'il y aura de part & d'autre de ce centre un même nombre de parties égale-

ment pesantes ; ainsi les momens de ces lignes par rapport à l'axe AD seront les produits des lignes par les distances de leur centres de gravité ou de leur milieu à l'axe AD ; or par les principes établis dans ce Chapitre, la somme de ces lignes multipliée par la distance de leur centre de gravité commun à l'axe AD, est égale à la somme de leurs momens ; donc divisant la somme de leurs momens par la somme des lignes, le quotient sera la distance du centre de gravité commun à l'axe AD, & par conséquent on connoîtra de combien ce centre de gravité est éloigné de l'axe AD ; maintenant prenant pour axe le côté DC, & prenant les élémens de la figure ABDC paralleles à cet axe, on connoîtra en faisant les mêmes opérations que ci-dessus, la distance du centre de gravité commun à l'axe DC, & par conséquent la distance à l'axe AD étant connue, on n'aura qu'à la mettre sur DC de D en O, supposé que DC soit perpendiculaire à AD, & la distance à l'axe DC étant connue, on n'aura qu'à la mettre sur AD de D en R, après quoi tirant OX parallele à AD, & RX parallele à DC, l'intersection X de ces lignes sera le centre de gravité de la figure ABCD.

Donc en supposant que la somme des Elemens de la figure ABDC, c'est-à-dire, que la figure ABDC soit connue, ce que nous supposons toujours ; il est clair que pour trouver son centre de gravité, il ne s'agit plus que de connoître la somme des momens de ses élemens par rapport à l'axe AD & à l'axe DC ; or c'est ce que nous avons enseigné fort au long dans la *Mesure des Surfaces & des Solides*, & dans *le Calcul Differentiel & Intégral*, &c. c'est pourquoi nous y renvoyons le Lecteur pour ne pas repeter ce que nous avons déja dit.

De même si l'on veut trouver le solide décrit par la circonvolution de la figure ADBC autour de l'axe AD, il est visible que si je divise la figure ADBC en ses élémens paralleles à la base, tous les points de chacun de ces élémens décriront des circonférences qui seront entr'elles comme leur rayons, ou comme les distances des points à l'axe AD, ainsi de même que tous les points d'un élément multipliés par leur distances à l'axe AD sont égaux à la somme des points, ou à l'élement multiplié par la distance de leur centre commun de gravité ; de même tous les points multipliés par les circonférences que décrivent leur distances à l'axe AD, sont égaux à la somme des points ou à l'élément multiplié par la circonférence que décrit la distance de

leur centre commun de gravité, & de même que tous les élemens multipliés chacun par la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe AD, ſont égaux à la ſomme des élemens multipliée par la diſtance de leur centre de gravité commun à l'axe AD ; de même auſſi tous les élemens multipliés par la circonférence que décrit chacune de leur diſtance à l'axe AD, ſont égaux à la ſomme des élemens multipliée par la circonférence que décrit la diſtance de leur centre commun de gravité ; or tous les élemens multipliés par les circonférences que décrivent leur diſtances forment des ſurfaces qui compoſent le ſolide, donc tous les élemens, c'eſt-à-dire la baſe ABCD multipliée par la circonférence décrite par la diſtance de leur centre commun de gravité eſt égale au ſolide ; ainſi le ſolide eſt égal au produit de la figure ABCD par la circonférence que ſon centre de gravité X décrit autour de AD.

Et comme pour trouver la circonférence décrite par X, il ne s'agit que de trouver ſon rayon ou la diſtance de X à l'axe AD, il s'enſuit qu'en ſuivant les mêmes regles que nous avons données dans les Ouvrages cités, on trouvera le ſolide.

De même, pour trouver le centre de gravité du Périmetre ABCD (*Fig.* 46.) je conſidere chacun de ſes côtés comme autant de leviers chargés de poids égaux dans toutes leurs parties ; ainſi il eſt viſible que le centre de gravité de chaque levier ſera ſur le milieu de ce levier. Je joins les centres de gravité E, F de ces deux leviers par une droite EF, & conſiderant cette droite comme un levier, tous les poids de AB étant tranſportés en E, & tous ceux de BC étant tranſportés en F, peſeront autant que s'ils étoient en leur place. Je cherche donc ſur EF le centre de gravité V des poids E, F, & du point V par le centre de gravité X de la droite CD, je mene la droite VX que je conſidere comme un levier, ainſi les poids E, F peſeront autant en V que s'ils étoient en leur place, & les poids qui chargent DC peſeront autant en X que s'ils étoient en leur place. Je conçois donc que les poids E, F ſoient en V, & les poids de la droite DC en X, & je cherche le centre de gravité Z des poids V, X ; du point Z je mene la droite YZ au centre de gravité de la droite AD, & conſiderant les poids V, X, tranſportés à leur centre de gravité Z, & les poids qui chargent AD tranſportés à leur centres de gravité Y, je cherche ſur ZY le centre de gravité O des poids Z, Y, & ce point O eſt le centre de gravité du Perimetre ABCD.

Pour trouver la surface que décrit le périmetre ABCD de la Figure 45. en tournant autour de l'axe AD, j'examine que le côté AD de ce Perimetre ne décrit aucune partie de la surface; c'est pourquoi je cherche le centre de gravité commun des trois autres côtés AB, BC, CD, & supposant que ce centre soit le point X, & que sa distance à l'axe AD soit la droite XR, je multiplie les trois côtés AB, BC, CD par la circonférence du rayon XR, & le produit est la surface cherchée; car le moment de tous les poids égaux dont nous supposons que les droites AB, BC, CD sont chargées, est égal aux produits des poids multipliés chacun par sa distance à la droite AD, & si nous concevons que tous les poids soient transportés au centre X, leur produit par la distance XR sera encore égal à la somme des momens qu'ils ont chacun en leur place; or tous les points des droites AB, BC, CD en tournant autour de AD décrivent des circonférences dont les rayons sont les distances à la droite AD; donc puisque tous les points multipliés par leur distances sont égaux à la somme des points multipliés par la distance XR, tous les points multipliés par les circonférences que leur distances décrivent seront égaux à tous les points multipliés par la circonférence que XR décrit; mais tous les points multipliés par leur circonférences forment la surface décrite par les lignes AB, BC, CD, donc tous les points multipliés par la circonférence que XR décrit, c'est-à-dire les trois lignes AB, BC, CD, multipliées par la circonférence que XR décrit sont égales à la surface cherchée.

Si le Perimetre ABCD tournoit autour d'un axe MN (*Fig.* 46.) qui fut hors du Perimetre, il est évident que chacune des lignes AB, BC, CD, DA du Perimetre décriroit une partie de la surface décrite autour de MN; donc il faudroit alors chercher le centre de gravité commun à ces quatre lignes, & multiplier ensuite les quatre lignes par la circonférence que décriroit la distance de leur centre de gravité autour de MN, ce qui donneroit la surface formée par le Perimetre.

De tout ce que nous venons de dire, il s'en suit 1°. Que si une surface plane ABCD (*Fig.*45.) tourne autour d'un axe AD, le solide décrit par la circonvolution entiere est égal à la surface multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité X. 2°. Que si cette surface tourne autour d'un axe AD qui soit l'un de ses côtés la surface du solide produit est égale au produit des trois autres côtés par la circonférence que décrit leur centre de gra-

vité commun. 3°. Enfin que si cette surface tourne autour d'une ligne MN qui soit hors du perimetre, la surface décrite par les côtés du perimetre est égale au produit des côtés multipliés par la circonférence que décrit la distance de leur centre commun de gravité à l'axe MN.

Les Lecteurs auront la bonté de recourir aux ouvrages cités ci-dessus, ils y trouveront de quoi se satisfaire sur cette matiere.

CHAPITRE V.

Du Mouvement composé des Corps.

DEFINITIONS.

128. LE mouvement *simple* est un mouvement qui n'est produit que par une seule force, & le mouvement *composé* est celui qui est produit par deux forces, dont les directions ne sont pas opposées; car si les directions étoient opposées, & que les forces fussent égales, il est visible que le mouvement cesseroit, en supposant qu'il n'y eût point d'élasticité dans les corps, ainsi que nous avons supposé jusqu'à present, & si l'une des deux forces étoit plus grande que l'autre, le mouvement continueroit selon la direction de la plus grande force.

129. On appelle *angle des directions* l'angle que les directions de deux forces font entr'elles; par exemple, si le corps A (*Fig.* 47.) est poussé tout à la fois par une force dont la direction soit la droite AC, & par une autre dont la direction soit la droite AB, l'angle BAC fait par ces deux directions s'appellera *angle des directions*.

PROPOSITION XLV.

130. *Si un corps* A (Fig. 47.) *est mû par deux puissances, dont l'une ait la direction* AC, *& l'autre ait la direction* AB, *& que dans le même tems que la force de la direction* AC *feroit parcourir l'espace* AC, *la force de la direction* AB *fît parcourir l'espace* AB, *je dis qu'en achevant le parallelogramme* ABCD, *le corps* A *mû par les deux puissances parcourroit dans le même tems la diagonale* BD.

DEMONSTRATION.

Nommons x la puissance qui feroit parcourir l'espace AC, &

z la puissance qui feroit parcourir dans le même tems l'espace AB, il est sûr que la masse du corps A étant la même par rapport à l'une & l'autre puissance, ces puissances sont entr'elles comme les vitesses AC, AB. Ainsi supposant que dans le premier instant la puissance x fasse parcourir au corps A l'espace AE, la puissance z feroit parcourir dans le même instant l'espace AF, qui seroit à AE comme AB est à AC, ou comme CD est à AC, à cause de CD = AB; du point E je mene EG parallele & égale à AF, & du point F je mene FG parallele & égale à AE, enfin je tire la diagonale AG; cela fait, puisque les deux puissances agissent ensemble sur le corps A, & que leurs directions ne sont point opposées, il est sûr qu'à la fin du premier instant le corps A, en tant qu'il est poussé par la puissance x, doit avoir parcouru un espace AE égal à FG, & qu'en tant qu'il est poussé par la puissance z, il doit avoir parcouru un espace AF égal à EG, donc il faut nécessairement qu'il se trouve en G, car G est l'unique point où les deux conditions sont remplies; or par la construction FA est égal à GE, & nous avons trouvé FA, AE :: DC, CA, donc GE, AE :: DC, CA, & par conséquent le triangle GEA est semblable au triangle, DCA, & comme le point A étant le sommet commun de ces triangles, le côté AE du triangle GEA, tombe sur le côté homologue AC du triangle DCA, l'autre côté AG du triangle GEA tombe par conséquent sur le côté homologue AD du triangle DCA, & le point G est un point de la diagonale AD.

On prouvera de même que si à la fin du second instant la puissance x feroit parcourir l'espace AH, égal à IL, la force z feroit parcourir l'espace AI égal à HL, lequel seroit à l'espace AH comme CD est à CA, & qu'ainsi le corps A se trouveroit en L, qui est un point de la diagonale AD, à cause qu'on auroit LH, AH :: CD, CA. Puis donc qu'à la fin de tous les instans le corps A se trouveroit toujours sur un point de la diagonale AD, il s'ensuit qu'au dernier instant il se trouveroit en D, & que par conséquent le corps A mû par les deux puissances x, z auroit parcouru la diagonale AD.

COROLLAIRE I.

131. Si l'on conçoit que la ligne AB soit divisée en parties égal AF, FI, &c. & que la droite AC soit divisée en un mên nombre de parties égales AE, EH, &c. lesquelles seront conséqu

conféquent proportionnelles aux parties AF, FI, &c. de la droite AB, & que tandis que la droite AB avançant d'un mouvement uniforme & toujours parallelement à elle-même de A vers C, le corps A avance aussi d'un mouvement uniforme de A vers B, ensorte qu'il parcoure AF tandis que la droite AB parcourt AE, il est visible que le corps se trouvera en G quand AB sera dans la position EP, qu'il sera en L quand AB sera dans la position HM, & ainsi de suite, de sorte que le corps A sera toujours dans quelque point de la diagonale AD; donc le mouvement du corps A selon l'hypotèse que nous venons de faire, representera le mouvement composé de A poussé par les deux forces x, z.

COROLLAIRE II.

132. Le corps A parcourt la diagonale AD dans le même tems qu'il parcourroit le côté AC, s'il n'étoit poussé que par la force x, ou le côté AB, s'il n'étoit poussé que par la force z.

COROLLAIRE III.

133. Comme il n'y a point de ligne droite AD autour de laquelle on ne puisse décrire un parallelogramme ABCD, dont elle sera la diagonale, il n'y a point aussi de mouvement simple causé par une puissance qui pousseroit dans un certain tems le corps A de A vers D, qu'on ne puisse regarder comme un mouvement composé par deux puissances dont l'une pousseroit le corps A de A vers C, & l'autre de A vers B.

Et comme les rapports des côtés AC, AB du parallelogramme autour de la diagonale AD, peut varier selon que l'angle BAC est plus ou moins grand, & que ces côtés expriment le rapport des forces qui causent le mouvement composé, il s'ensuit qu'un même mouvement direct AD peut être regardé comme un mouvement composé de plusieurs façons, ou comme un mouvement causé par deux forces qui peuvent avoir entr'elles différens rapports.

PROPOSITION XLVI.

134. *Dans le mouvement composé la vitesse produite par les deux forces, est à la vitesse qui produiroit une seule force, comme la diagonale* AD *est au côté qui représente la direction de cette force.*

DEMONSTRATION.

Par la ſuppoſition la force x feroit parcourir au corps A l'eſpace AC dans le même tems que la force z lui feroit parcourir l'eſpace AB, & par la Propoſition précédente les deux forces enſemble font parcourir au même corps dans le même tems la diagonale AD; or la maſſe étant toujours la même, & les tems étant égaux, les viteſſes produites par différentes forces dans un mouvement uniforme tel que nous le ſuppoſons ici, ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus dans le même tems, donc la viteſſe produite par les deux forces x, z jointes enſemble, eſt à la viteſſe produite par la force x comme AD eſt à AC, & à la viteſſe produite par le corps z comme AD eſt à AB.

COROLLAIRE I.

135. On prouveroit la même choſe ſi les mouvemens cauſés par chacune des forces ſuivoient une même loi d'acceleration; car ſuppoſant qu'ils ſuiviſſent la loi de Galilée, la force x ayant fait parcourir à la fin du premier inſtant l'eſpace AE, à la fin du ſecond il auroit fait parcourir l'eſpace AH quadruple de AE, à la fin du troiſiéme l'eſpace AN neuf fois plus grand que AE, & ainſi de ſuite ſelon la raiſon des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, &c. par la même raiſon la force z ayant fait parcourir à la fin du premier inſtant l'eſpace AF, auroit fait parcourir à la fin du ſecond inſtant l'eſpace AI quadruple de AF, &c. ainſi on prouveroit de même que ci-deſſus qu'à la fin de ces inſtans le corps A mû par les deux puiſſances ſe trouveroit ſur les points G, L, &c. de la diagonale, & que par conſéquent les eſpaces AG, AE, AF, que ces différentes forces feroient parcourir au même corps A, étant parcourus dans le même tems ou dans des tems égaux, les viteſſes feroient comme les eſpaces, d'où il ſuit que la viteſſe acquiſe à la fin de AG, feroit à la viteſſe acquiſe à la fin de AE comme AG eſt à AE.

REMARQUE.

136. Ce que je dis ici n'eſt pas contraire à ce que j'ai dit a[...] leurs touchant les eſpaces parcourus dans des tems égaux [...] différens corps qui ſuivent une même loi d'acceleration; il [...] vrai comme je l'ai demontré (*N. 99.*) que ſi pluſieurs corps [...]

ſont en repos viennent à deſcendre librement vers le centre de la terre, ils parcourent tous dans le même tems des eſpaces égaux, par les raiſons que j'en ai données; ainſi ſi l'on ſuppoſoit que la force qui meut le corps A vers B fût ſa peſanteur, & que la force qui le pouſſe vers C fût une force égale à ſa peſanteur, & qui produiſit les mêmes effets, l'eſpace AE ſeroit certainement égal a l'eſpace AF, & ainſi des autres, mais ici je ſuppoſe deux forces inégales & différentes de la peſanteur, de ſorte que l'une faiſant parcourir au corps A l'eſpace AE dans le premier inſtant, l'autre dans le même inſtant lui feroit parcourir l'eſpace AF; or il eſt évident que ſi le mouvement produit par ces deux forces étoit acceleré par quelque cauſe que ce fût, & que l'acceleration ſe fit ſelon la loi de Galilée, le corps A en tant que pouſſé ſelon la direction AC auroit parcouru à la fin du ſecond inſtant l'eſpace AH quadruple de AE, &c. & que le même corps en tant que pouſſé ſelon la direction AB, auroit parcouru à la fin du ſecond inſtant l'eſpace AI quadruple de AF, &c.

COROLLAIRE II.

137. Si l'on connoît l'angle des directions BAC des forces qui concourent au mouvement compoſé, & les viteſſes exprimées par les droites AC, AB on connoîtra auſſi la direction & la viteſſe AD du mouvement compoſé, puiſqu'il n'y a qu'à achever le parallelogramme pour avoir la diagonale AD; mais ſi l'on connoît ſeulement la direction & la viteſſe AD du mouvement compoſé, on ne connoîtra pas pour cela les directions & les viteſſes des forces qui concourent, parce que l'angle des directions ABC pouvant être plus grand ou moindre, les forces concourantes peuvent avoir différentes directions, & de plus les côtés AC, AB du parallelogramme décrit autour de la diagonale, pouvant avoir entr'eux différens rapports, ſelon que l'angle BAC eſt plus grand ou moindre, les viteſſes des forces concourantes peuvent auſſi varier.

COROLLAIRE III.

138. C'eſt donc la même choſe de conſiderer le mouvement AD comme un mouvement ſimple cauſé par une force qui feroit parcourir au corps A l'eſpace AD dans un certain tems, ou de le conſiderer comme un mouvement compoſé cauſé par deux

forces, dont l'une feroit parcourir dans le même tems l'espace AC, & l'autre feroit parcourir l'espace AB.

PROPOSITION XLVII.

139. *Dans tout mouvement composé par deux forces concourantes, la vitesse est d'autant plus grande que l'angle des directions est moindre, & d'autant moindre que l'angle des directions est plus grand.*

Soit un corps en A (*Fig.* 48.) poussé par deux forces dont l'une feroit parcourir au corps A l'espace AB, dans le même tems que l'autre feroit parcourir au même corps l'espace AC, j'acheve le parallelogramme ABCD, & la diagonale AD de ce parallelogramme représente la vitesse du mouvement composé; maintenant si l'on conçoit que l'angle BAC diminue, c'est-à-dire que AC vienne dans la position A*c*, & AB dans la position A*b*; il est visible qu'en achevant le parallelogramme, la diagonale A*d* représentera la vitesse du mouvement composé; il s'agit donc de faire voir que A*d* est plus grand que AD.

DEMONSTRATION.

Les triangles ACD, A*cd* ont les côtés AC, CD égaux aux côtés A*c*, *cd*, mais l'angle ACD compris sous les deux premiers étant le complement à deux droits de l'angle BAC, est moindre que l'angle A*cd*, qui est le complement à deux droits de l'angle *b*A*c*, lequel est moindre que BAC, donc la base AD du triangle ACD étant opposée à l'angle ACD, est moindre que la base A*d* du triangle A*cd*, opposée à l'angle A*cd*; donc la vitesse A*d* du mouvement composé par les deux forces, dont l'angle des directions est *b*A*c*, est plus grande que la vitesse AD du mouvement composé par les deux mêmes forces, mais dont l'angle des directions est BAC plus grand que *b*A*c*, donc, &c.

PROPOSITION XLVIII.

140. *Dans tout mouvement composé produit par deux forces concourantes, les deux forces sont entr'elles reciproquement comme les sinus des angles que leurs directions font avec la diagonale* AD (Fig. 47.) *& chacune de ces forces est à une troisiéme force qui produiroit le mouvement* AD *comme le sinus de l'angle fait par la direction de l'au-*

tre force avec la diagonale, est au sinus de l'angle BAC *des directions.*

DEMONSTRATION.

Je nomme x la force qui feroit parcourir l'espace AC au corps A, z la force qui lui feroit parcourir l'espace AB, & y celle qui feroit parcourir la diagonale AD; ces forces étant entr'elles comme les produits de la masse par la vitesse qu'elles produisent, & la masse étant toujours la même, il s'ensuit que les forces sont comme les vitesses ou comme les espaces AC, AB, AD parcourus dans des tems égaux; donc x, z :: AC, AB ou CD, & par conséquent x, z :: $\frac{1}{2}$ AC, $\frac{1}{2}$ CD; mais dans tout triangle ACD les moitiés des côtés AC, CD sont les sinus des angles ausquels ils sont opposés, donc x est à z comme le sinus de l'angle ADC au sinus de l'angle DAC, mais l'angle ADC est égal à son alterne BAD, donc x est à z reciproquement comme le sinus de l'angle BAD fait par la direction BA de z avec la diagonale, est au sinus de l'angle DAC fait par la direction AC de x avec la même diagonale.

De même x, y :: AC, AD :: $\frac{1}{2}$ AC, $\frac{1}{2}$ AD, donc x est à y comme le sinus de l'angle ADC est au sinus de l'angle ACD, mais le sinus de l'angle ADC est égal au sinus de l'angle alterne BAD, & le sinus de l'angle ACD est égal au sinus de l'angle BAC, qui est le complement à deux droits de l'angle ACD, donc x est à y comme le sinus de l'angle BAD fait par la direction AB de la force z avec la diagonale, est au sinus de l'angle BAC des directions.

PROPOSITION XLIX.

141. *Un corps* A (Fig. 49.) *étant poussé par plusieurs forces, dont les directions & les vitesses sont exprimées par les droites* AB, AC, AD, AE, *trouver la direction & la vitesse* AQ *qu'il doit avoir.*

SOLUTION.

J'acheve le parallelogramme ABOC des deux directions AB, AC, & la diagonale AO représente la direction & la vitesse d'une force qui feroit parcourir au corps A la diagonale AO, dans le même tems que la force AB feroit parcourir l'espace AB, & la force AC feroit parcourir l'espace AC; ainsi la force AO est équivalente aux deux forces AB, AC agissant ensemble chacun selon sa

direction ; j'acheve le parallelogramme des directions AO, AD ; & la diagonale AP repréfente une force qui eft équivalente aux forces AO, AD agiffant enfemble, & par conféquent équivalente aux trois forces AB, AC, AD, qui agiroient enfemble chacune felon fa direction ; j'acheve le parallelogramme des directions AP, AE, & la diagonale AQ repréfente une force équivalente aux deux forces AP, AE, agiffant enfemble felon leur directions, donc la force AQ eft équivalente aux quatre forces AB, AC, AD, AE, qui agiroient enfemble felon leur directions, & par conféquent le corps A doit fuivre la direction AQ & avoir une viteffe exprimée par AQ.

Je vais donner ici une autre folution de ce Problême qui eft auffi ingenieufe qu'utile, mais qui demande pour être comprife qu'on faffe attention à fa démonftration.

AUTRRE SOLUTION.

Cherchez le centre de gravité H des quatre points B, C, D, E (*Fig.* 53.) qui font aux extrémités des quatre directions AB, AC, AD, AE; du point A par le point H, tirez la droite indéfinie AL, & portez fur cette droite autant de fois la droite AH qu'il y a de directions, c'eft-à-dire, dans le cas prefent quatre fois de A en L, & la droite AL exprimera la direction & la viteffe que le corps A pouffé par les quatre forces doit fuivre.

DEMONSTRATION.

Concevons que les quatre forces au lieu d'être en A foient en B, C, D, E, & que felon les directions & les viteffes BA, CA, DA, EA, elles pouffent chacune un corps égal à A, il eft évident que ces quatre corps venant à choquer le corps A, feront le même effet fur lui que fi les forces s'y appliquoient elles-mêmes, fi ce n'eft que la direction qu'il prendroit feroit de A vers Z, au lieu que fi les forces agiffoient toutes en A, la direction fe feroit de A vers L, ce qui ne change rien.

Je mene par le point A une droite indefinie XAR, & des points B, C, D, E, H menant les droites BX, CV, HT, DS, ER perpendiculaires fur XR, j'acheve les parallelogrammes BNAX, CQAV, PHTA, DOAS, EMAR; par cette conftruction il eft évident que la force BA eft équivalente aux deux BO, BX, ou OA XA, que la force CA eft équivalente aux

deux forces CQ, CV ou QA, VA, & ainsi des autres; ainsi au lieu de quatre forces j'en ai huit, & le corps A doit prendre une direction & une vitesse causée par ces huit forces.

Or de ces huit forces il y en a quatre dont les directions BX, CV, DS, ER ne sont point contraires, & par conséquent dans le même tems que chacune d'elles feroit parcourir au corps A la ligne qui marque sa vitesse, il faut que le corps A conçû comme poussé par ces quatre forces, parcoure un espace AI égal à la somme des quatre vitesses; or le point H étant le centre de gravité des quatre corps B, C, D, H, chacun desquels est égal à A, si on les conçoit tous transportés en H, leur moment par rapport à la droite XR sera égal au moment qu'ils ont chacun en leur place, ainsi on aura $4A \times HT = A \times BX + A \times CV + A \times DS + A \times ER$, & divisant tout par A, on aura $4HT = BX + CV + DS + ER$, c'est-à-dire que si l'on porte HT, sur la direction AP quatre fois de A en I, la droite AI sera égale aux quatre vitesses, & que par conséquent si le corps A n'étoit poussé que par ces quatre forces mises en A, sa direction & sa vitesse seroit exprimée par AI.

Maintenant les quatre autres forces concourantes ont des directions BN, CQ, DO, EM opposées les unes aux autres, & pour trouver quel est l'excedent des unes sur les autres, considerons que les corps B, C, D, E ayant leur centre de gravité commun en H, ils seroient en équilibre autour de HT, & par conséquent les momens $A \times XT + A \times VT$ seroient égaux aux momens $A \times RT + A \times ST$, c'est-à-dire que les produits des corps B, C égaux chacun à A, multipliés par leurs distances XT, VT à la droite HT, seroient égaux aux produits des corps D, E égaux chacun à A multipliés par leurs distances RT, ST, à la même droite HT; puis donc que nous avons $A \times XT + A \times VT = A \times RT + A \times ST$, si nous divisons par A nous aurons $XT + VT = RT + ST$, mais les forces BN, CQ ou XA, VA sont moindres que XT, VT, & au contraire les forces DO, EM, ou RA, SA sont plus grandes que RT, ST, donc les forces BN, CQ sont moindres que DO, EM, & comme ces forces sont contraires, il s'ensuit que les deux BN, CQ doivent être détruites, & que des deux DO, EM, il ne doit rester que l'excès qu'elles ont sur BN, CQ, lequel excès seul agira sur A lorsque les quatre forces seront appliquées en A.

Pour trouver donc cet excès, je considere que si les quatre

corps B, C, D, E, autour de HT tournoient autour de AI, le moment des corps D, E seroit preponderant, & que le point T seroit le point ou les quatre corps étant transportés, leur moment par rapport à AI seroit égal à l'excès du moment des corps D, E sur le moment des corps B, C, donc nous aurions $4A \times TA = A \times RA + A \times SA - A \times XA - A \times VA$, & divisant tout par A, nous aurions $4TA = RA + SA - XA - VA$, c'est-à-dire que l'excès des forces DO, EM, ou AS, AR sur les forces BN, CQ seroit 4TA, donc les quatre forces agissant ensemble en A, le corps A devroit prendre une direction & une vitesse AY quadruple de AT, ou de PH, donc puisque nous avons trouvé que les quatre autres forces agissant en A, le corps A devroit prendre une direction AI quadruple de AP, il s'ensuit que les huit forces agissant ensemble, le corps A doit avoir la direction & la vitesse de la diagonale AL; & il est évident que cette diagonale passe par le point H, & que AL est quadruple de AH, car puisque $IL = AV = 4AT = 4PH$, de même que $AI = 4AP$, on a donc AI, AP : : IL, PH, par conséquent PH étant ordonnée au triangle IAL, le point H est sur la diagonale AL; & comme l'on a aussi AL, AH : : IL, PH, donc $AL = 4AH$.

page XXX correction
... cette
[propo]sition n'est vray que
[dans] des cas particuliers quoiqu'on
l'enonce généralement

PROPOSITION L.

142. *Si une force pousse ou tire un corps avec une direction oblique à ce corps elle lui communique moins de mouvement que si elle le poussoit ou le tiroit avec une direction perpendiculaire.*

DEMONSTRATION.

Soit une force exprimée par la droite AB (*Fig.* 50.) laquelle pousse ou tire le corps CD avec une direction oblique AB; du point A j'abbaisse AE perpendiculaire sur CD, & achevant le parallelogramme AEFB, il est visible que la force AB qui feroit parcourir à un corps l'espace AB dans un certain tems est équivalente à deux forces dont l'une feroit parcourir dans le même tems au même corps l'espace AE, & l'autre lui feroit parcourir l'espace AF, ainsi la force AB avec sa direction fait le même effet que feroient les deux forces AE, AF jointes ensemble avec leur directions, ou ce qui est la même chose, la force AB agit avec une direction composée de la direction AE & de la direction AF, mais par la direction AF elle ne fait rien sur le corps CB, à cause que

que la direction AF étant parallele au corps CD, la force avec cette seule direction ne feroit que glisser sur ce corps sans le mouvoir, donc elle n'agit que par sa direction AE, c'est-à-dire qu'elle ne pousse ou ne tire le corps qu'avec un effort égal à la force AE.

Maintenant concevons que le corps CD devienne perpendiculaire à la direction AB; & soit dans la position HT, la direction AB sera toujours composée des deux directions AE, AF, ou FB, EB, & comme ces deux directions peuvent agir sur le corps HT, il s'ensuit que la force AB agit sur le corps HT avec un effort égal aux efforts que peuvent faire les deux forces FB, EB avec leurs directions; or les deux directions FB, EB étant obliques, je tire ER, FT perpendiculaires à HT, & achevant les parallelogrammes ERBS, FVBT, je trouve que les forces FB, EB, n'agissent sur le corps HT que comme les forces ER, FT; donc AB agit sur FT comme les forces ER, FT prises ensemble, mais ER, FT prises ensemble sont égales à AB; car par la construction j'ai ER = SB, & à cause des triangles semblables & égaux ESB, FVA, j'ai SB = AV, donc ER = AV; d'autre part j'ai FT = VB, donc ER + FT = AV + VB = AB; puis donc que AB agit sur HT comme ER + FB = AB, il s'ensuit que la force AB perpendiculaire sur HT agit sur HT de tout son pouvoir, donc elle agit plus que lorsqu'elle étoit oblique à ce corps, puisqu'elle n'agissoit que comme AE moindre que AB, & par conséquent une force qui pousse ou tire un corps avec une direction perpendiculaire lui communique plus de mouvement que si elle le poussoit ou le tiroit avec une direction oblique.

COROLLAIRE I.

143. *Le mouvement qu'une force communique à un corps avec une direction perpendiculaire est au mouvement qu'elle lui communique avec une direction oblique, comme le sinus droit est au sinus de l'angle que fait la direction oblique avec le corps ou au sinus de l'angle d'incidence* ABE.

Quand AB est oblique sur le corps elle n'agit que comme la force AE, & quand elle est perpendiculaire, elle agit comme AB, mais les mouvemens que deux forces communiquent sur un corps dans un même tems sont comme les forces, donc le mouvement communiqué par AB perpendiculaire est au mouvement communiqué par AB oblique, comme AB, AE, ou comme $\frac{1}{2}$AB à $\frac{1}{2}$AE; mais $\frac{1}{2}$AB est le sinus de l'angle droit AEB ou le sinus total, &

$\frac{1}{2}$AE est le sinus de l'angle d'incidence ABE, donc, &c.

COROLLAIRE II.

144. *Si une force tire ou pousse avec une direction oblique* AB (Fig. 51.) *un corps attaché à un bras de levier* BD *qui tourne autour d'un point fixe* D, *le mouvement qu'elle communique à ce corps est à celui qu'elle communiqueroit si elle lui étoit perpendiculaire comme la droite* DO, *tirée du centre* D *perpendiculairement sur la direction* AB, *est au bras* DB, *ou à la distance du corps* B *au centre* D; du point A je mene AR perpendiculaire à DB, & achevant le parallelogramme ARBS, je trouve que la force AB oblique n'agit que comme la force AR, au lieu que si elle étoit perpendiculaire elle agiroit comme AB; ainsi la force AB perpendiculaire est à la force AB oblique comme AB est à AR, mais les triangles rectangles ARB, DBO, étant semblables à cause de l'angle aigu RBO qui leur est commun, on a AB, AR :: DB, DO, donc la force perpendiculaire AB est à la force AR oblique comme DB est à DO; ainsi si le moment du corps poussé ou tiré par AB perpendiculaire est B×BD, celui qui lui sera communiqué par AB oblique sera B×DO.

CHAPITRE VI.

Du repos & de la chûte des Corps.

DEFINITIONS.

145. ON dit qu'un corps *tombe* lorsqu'il passe du repos au mouvement par la seule force de sa pesanteur.

La *ligne horizontale vraye* est une ligne dont tous les points sont également éloignés du centre de la terre, & comme la terre peut être regardée comme spherique, il s'ensuit que la ligne horizontale vraye est un arc de cercle dont le centre est le centre de la terre.

La *ligne horizontale apparente* est une ligne droite qui touche la ligne horizontale vraye en un point, & qui par conséquent est perpendiculaire à une droite tirée du point d'attouchement au centre de la terre. La circonférence de la ligne horizontale vraye étant extrémement grande, si la ligne horizontale appa-

rente n'eſt pas d'une longueur qui ſurpaſſe 150 toiſes, on peut la confondre avec la ligne horizontale vraye, la diſtance des points de l'une aux points de l'autre de part & d'autre du point d'attouchement étant très peu de choſe à l'égard de la diſtance de ces même points au centre de la terre.

PROPOSITION LI.

146. *La ligne de direction d'un corps grave qui ſe meut par la ſeule force de ſa peſanteur eſt perpendiculaire aux lignes horizontales vraye & apparente.*

DEMONSTRATION.

Soit O le centre de la terre (*Fig.* 52.) la circonférence HCD repreſentera la ligne horizontale vraye. Soit B le point d'où le corps grave B tombe par la ſeule force de ſa peſanteur, puiſque les corps graves mûs par la ſeule force de leur peſanteur tendent au centre de la terre, la direction du corps B ſera donc la droite BO, & par conſéquent elle tombera perpendiculairement en C ſur la circonférence HCD qui repreſente la ligne horizontale vraye ; & il eſt viſible que ſi par le point C on mene la tangente LI qui repreſentera la ligne horizontale apparente, la ligne BO ſera auſſi perpendiculaire ſur LI, donc, &c.

PROPOSITION LII.

147. *Trouver ſi un plan* ABCD (Fig. 54.) *eſt horizontal, ou s'il ne l'eſt pas.*

SOLUTION.

Ayez un Equerre EFG dont les jambes EF, FG faiſant un angle quelconque ſoit parfaitement égales entr'elles, & que cet Equerre ſoit traverſé par une baſe HI, en ſorte que FH ſoit égal à FI. Diviſez HI en deux également au point O que vous marquerez exactement ; prenez un plomb attaché à l'extremité d'un fil & ſuſpendez-le au ſommet F de l'angle EFG, cet inſtrument étant ainſi préparé

Tirez dans le plan propoſé ABCD une droite LM, & prenant votre Equerre poſez-le à plomb ſur la ligne LM, en ſorte que ſes jambes FE, FG portent ſur deux points EG de cette ligne ; vous connoîtrez que l'Equerre eſt perpendiculaire ſur la

ligne LH en laissant pendre librement le plomb, car quand le fil FS touchera la base HI, & que toutes ses parties seront en ligne droite, il est visible que ce fil sera dans le plan de l'Equerre EFG, & comme la direction FS sera la direction d'un corps grave S, il est encore évident que FS sera perpendiculaire à l'horizon, & que par conséquent le plan EFS de l'équerre dans lequel cette ligne se trouve sera perpendiculaire à l'horizon; donc la ligne EG ou LM se trouvera aussi dans le plan perpendiculaire à l'horizon.

Maintenant pour sçavoir si EG ou LM est horizontale ou parallele à l'horison, examinez si le fil FS passe precisement par le point O, & si cela est, la ligne EG ou LM sera horizontale; car le triangle HFI étant isoscele, & sa base HI étant divisée en deux également en O, il est visible que la droite FS est perpendiculaire sur cette base, mais à cause des triangles semblables HFI, EFG, il est encore visible que si la ligne FS étoit prolongée, elle seroit perpendiculaire sur EG ou LM; donc la direction du corps grave S tendant au centre de la terre seroit perpendiculaire sur LM, & par conséquent LM est horizontale (*N.* 146.); donc le plan ABCD n'incline pas plus vers le centre de la terre du côté de L que du côté de M; il reste donc à voir s'il n'incline pas plus du côté de AB que du côté de DC; & pour cela, tirez dans ce plan une autre ligne PQ qui coupe la précédente, & faisant sur cette ligne avec votre Equerre les mêmes operations que vous faites sur LM, vous connoîtrez si cette ligne est horizontale, & si cela est, le plan ABCD n'inclinant pas plus vers le centre de la terre du côté de B que du côté de C, & du côté de L que du côté de M, il sera horizontal.

DEFINITION.

148. Nous appellerons ici *base* d'un corps tout plan horizontal sur lequel le corps s'appuye, soit que ce corps soit plus grand ou moindre que la face du corps qui touche cette base; & par la même raison si ce corps etoit soutenu sur plusieurs pieds, nous concevrons un plan horizontal qui porte sur ces pieds & sur lequel le corps sera appuyé.

PROPOSITION LIII.

149. *Si du centre de gravité d'un corps on mene une perpendicu-*

laire sur la base horizontale qui le soutient, & que cette perpendiculaire tombe dans l'aire de la base, c'est-à-dire dans l'aire sur laquelle est l'une des surfaces de ce corps, le corps restera ferme & ne tombera point, mais si cette perpendiculaire tombe hors de la base, le corps tombera.

DEMONSTRATION.

Soit le solide AD soutenu par le plan horizontal CD (*Fig.* 55.) ou par les quatre pieds CR, EF, HI, DQ, sur lesquels je conçois un plan horizontal CD qui sert de base au corps; du centre de gravité O du solide j'abbaisse une perpendiculaire OX, & comme cette perpendiculaire tombe dans l'aire de la base CD, je dis que le solide AD restera ferme & ne tombera point; car toutes les parties de ce solide étant en équilibre autour du centre O, l'effort qu'elles font vers le centre de la terre peut être regardé comme étant réuni au centre O, ainsi la pesanteur commune de toutes ces parties, c'est-à-dire la pesanteur du corps tend vers le centre de la terre selon la direction OX, mais le point X étant un point de la base s'oppose à la descente du centre O, donc ce centre doit demeurer en repos, & par conséquent toutes les parties du corps étant en équilibre autour de lui, il ne doit point y avoir de mouvement, & le corps AD doit rester ferme sur sa base sans tomber.

Concevons maintenant un autre solide appuyé sur la base horisontale CD (*Fig.* 56.) ou sur quatre pieds sur lesquels je conçois une base horizontale CD qui soutienne le corps; du centre de gravité O, je mene OX perpendiculaire à l'horizon, & comme cette perpendiculaire ne rencontreroit cette base que dans son prolongement je dis que le corps AD doit tomber; car la pesanteur commune de toutes les parties du corps AD tendant vers le centre de la terre selon la direction OX, & rien ne se trouvant dans cette direction qui empêche le centre O de descendre, ce centre descendra & toutes les parties du solide avec lui, & par conséquent le corps tombera.

COROLLAIRE I.

150. La base d'un solide étant donnée, & la position de son centre de gravité, on peut trouver si ce solide sera en repos, ou s'il tombera.

COROLLAIRE II.

151. Comme on peut faire des solides inclinés AD (*Fig.* 56.) dont la perpendiculaire tirée du centre de gravité tombe dans l'aire de la base, il ne faut pas s'étonner s'il se trouve des édifices qui panchent d'un côté sans tomber.

COROLLAIRE III.

152. Cette Proposition sert à rendre raison de plusieurs choses que nous faisons pour nous empêcher de tomber. Par exemple, si l'on nous demande pourquoi un homme adossé contre une muraille ne peut se baisser pour prendre quelque chose sans aller à terre; on verra d'abord que c'est que cet homme ne pouvant se baisser sans avancer la tête & les bras hors de l'aire de sa base, & la muraille empêchant les autres parties du corps de s'avancer vers le côté opposé pour conserver le centre d'équilibre dans sa même position, ce centre change nécessairement de place, & la perpendiculaire tirée de ce centre sur la base venant à passer hors du plan de la base, c'est-à-dire hors du plan que les pieds occupent, l'homme doit aussi nécessairement se renverser. Pour éviter cet accident, il faut donc que cet homme s'écarte de la muraille, afin de pouvoir faire en liberté tous les mouvemens qui doivent le conserver dans son équilibre, & l'on peut raisonner de la même maniere sur tous les mouvemens que la Nature bien mieux que la Science nous apprend à faire pour nous empêcher de tomber à tous momens.

PROPOSITION LIV.

153. *Un corps* A (*Fig.* 57.) *étant suspendu à un point* C *d'un levier* BD, *trouver deux forces qui étant appliquées en* B *&* D, *soûtiendroient le corps* A, *de façon que le levier reste dans une situation horizontale.*

SOLUTION.

De la façon dont le Problême est proposé, l'on voit que c'est la même chose que si l'on mettoit en C une puissance égale au poids A qui soûtînt le levier sans l'empêcher de tourner, & qu'ôtant A de sa place on le partageât en deux parties qui fussent telles qu'elles restassent en équilibre autour du point C, car alors on voit bien que la force C soutiendroit les parties B, D, &

que ces parties entretiendroient le levier dans une situation horizontale.

Pour cela donc je considere que puisque le point C doit être le centre d'équilibre des parties B, D, si je prens le point B pour le centre de mouvement, le point C sera le point où les parties B, D étant transportées leur moment par rapport à B sera égal aux momens qu'ils ont en leur place, c'est-à-dire au moment de D, car il n'y a que cette partie qui ait un moment par rapport au centre B; donc les parties B, D, c'est-à-dire A multiplié par la distance BC sera égal à D multiplié par BD; ainsi divisant $A \times BC$ par la distance BD, le quotient $\frac{A \times BC}{BD}$ sera égal à la partie D que je cherche, & par conséquent la partie B sera $A - \frac{A \times BC}{BD}$.

Prenant donc deux poids égaux aux deux parties de A que je viens de trouver, & les mettant en B & D, ils seront en équilibre, &c.

Et remettant le corps A en C en ôtant la puissance qui soutenoit le levier, & mettant au lieu des poids B, C deux puissances qui soient en même raison, le corps sera soutenu par ces deux puissances, & le levier sera horizontal.

Supposant $A = 30$ livres, $BC = 2$ pieds, $CD = 3$ pieds, on aura $D = \frac{A \times BC}{BD} = \frac{30 \times 2}{2+3} = 12$, donc $B = 30 - 12 = 18$; ainsi la puissance D doit être à la puissance B, comme 12 à 18, ou comme 2 à 3.

COROLLAIRE I.

154. Au lieu des puissances B, D, on pourroit mettre deux poids X, Z égaux aux deux puissances B, D, c'est-à-dire, en même raison que B, D, & égaux ensemble au corps A, lesquels poids seroient attachés à des cordes qui passeroient sur deux poulies E, F, en sorte que les directions BE, DF fussent perpendiculaires au levier de même que la direction du corps A; car autrement les choses changeroient ainsi que nous dirons bientôt.

COROLLAIRE II.

155. Au lieu du corps A on pourroit supposer un corps de même poids de la longueur du levier inégal dans ses parties, & dont le centre de gravité seroit le point C; car alors concevant

MCN de changer de situation ; car cela étant, il est visible que l'effort qu'elles font sur le levier BD étant le même, ces forces considérées comme attachées au levier BD, le tiendront dans la situation horisontale ; mais afin que les deux forces attachées en M, N, soient en équilibre autour de C, il faut que leur momens par rapport à C soient égaux, & par conséquent il faut que leurs distances MC, NC leur soient réciproques ; donc MC, NC :: D, B, & par conséquent MC+NC, NC :: D+B, B ; mais D+B doit être égal à A, puisque les deux forces doivent soutenir le corps ; donc MC+NC, NC :: A, $B = \frac{A \times NC}{MC+NC}$; donc $D = A - \frac{A \times NC}{MC+NC}$.

Prenant donc deux forces qui soient entr'elles comme les valeurs de B & D que nous venons de trouver, & qui ayent les directions BE, DF, ces forces appliquées en B & D selon les directions obliques données, soutiendront le corps A, & tiendront le levier BD en équilibre.

Soit A = 30 livres MC = $\frac{3}{2}$ pieds, & NC = $\frac{5}{2}$ pieds ; donc $B = \frac{A \times NC}{MC+NC} = \frac{30 \times \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = \frac{150}{8} = 18\frac{3}{4}$, & $D = 30 - 18\frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$.

Ce seroit la même chose si au lieu des puissances B, D, on prenoit deux poids X, Z égaux ensemble à A, & qui fussent entr'eux comme B, D, & qu'étant attachés à des cordes, ils passassent sur deux poulies E, F, en sorte qu'ils tirassent le levier selon les directions BE, DF des forces B, D.

Ce seroit encore la même chose, si au lieu du corps A on mettoit une puissance égale à A en C pour soutenir le levier, & qu'au lieu des forces B, D, on mit deux poids égaux ensemble à A, & qui fussent entr'eux comme B, D, & qu'étant attachés à des cordes ils passassent sur deux poulies, en sorte qu'ils tirassent le levier selon les directions BG, DH, qui sont les mêmes que celles des puissances B, D, si ce n'est qu'elles sont dans un sens opposé.

J'ai dit qu'afin que les puissances mises en M & en N soient en équilibre, il faut que leurs momens soient égaux, & par ces momens j'ai entendu les produits de ces puissances par leur bras de levier MC, NC ; car il est visible que si le levier recourbé MCN venoit à tourner autour du point C, les points M, N, décriroient dans le même tems des circonférences qui seroient entr'elles comme leur rayons ; or ces circonférences exprime

roient les viteſſes des forces M, N, ainſi ces viteſſes ſeroient entr'elles comme les circonférences, ou comme les rayons MC, NC, donc les momens des forces ſeroient les produits M × MC, N × NC, & par conſéquent la même choſe arrive par rapport à un levier recourbé MCN que par rapport à un levier droit BD.

PROPOSITION LV.

159. *Un levier ou bâton* AB *dont le centre de gravité eſt* O *étant donné* (Fig. 59.) *poſer ce bâton ſur un plan horizontal* EFGH, *de façon qu'un poids* P *étant ſuſpendu à l'un de ſes bouts* A *hors du plan horizontal, le bâton reſte dans ſa ſituation horizontale.*

SOLUTION.

Le point O étant le centre de gravité du bâton, je conçois que toute ſa peſanteur ſoit ramaſſée en O comme un poids qui ſeroit ſuſpendu en ce point, après quoi je cherche le centre de gravité commun R du poids O & du poids P, & plaçant ce bâton ſur le plan EG de façon que le point R porte ſur le plan, j'attache le poids P en A, & le bâton reſte dans ſa ſituation horizontale ; car le centre commun de gravité R du bâton & du corps P ne pouvant deſcendre à cauſe que le plan EG le ſoutient, il eſt viſible que le bâton & le corps P reſteront en repos, & que rien ne tombera.

PROPOSITION LVI.

160. *Si un Corps* AB (Fig. 61.) *eſt ſoutenu par deux cordes obliques* AR, RB, *leſquelles ſe rencontrent en un point* R, *la direction* RO *du centre de gravité* O *paſſe par le point* R *où les corps s'entre-coupent.*

DEMONSTRATION.

Le centre de gravité eſt le point où l'on peut concevoir que toute la peſanteur du corps eſt réunie ; ainſi ce centre deſcend toujours autant qu'il peut deſcendre, à moins qu'il ne ſoit empêché ; c'eſt pourquoi il s'agit de faire voir que ſi le centre de gravité n'étoit pas en O ſur la droite RO qui paſſe par R & qui eſt perpendiculaire à l'horizon, ce centre ne ſeroit pas auſſi bas qu'il pourroit être quoique rien ne l'en empêchât.

Suppoſons donc que le centre de gravité ſoit en X ; du centre R par le point X je décris l'arc de cercle XP, le point P ſera

plus bas que X; car menant du point X la droite XQ perpendiculaire à RP, cette droite sera le sinus de l'arc XP; donc Q sera plus proche de R que P, & par conséquent P sera plus bas que Q & plus bas aussi que X, à cause que XP étant perpendiculaire à la droite RP, est par conséquent horizontale; ainsi les points X, Q étant également éloignés du centre de la terre, P est plus proche du même centre que X puisqu'il en est plus proche que Q; donc si le centre de gravité du corps AB étoit en X, il ne descendroit pas autant qu'il pourroit descendre, quoique rien ne l'en empêchât; car la corde AR peut décrire l'arc AM, & se trouver dans la position RM, & la corde BR peut décrire l'arc BN & se trouver dans la position RN, en sorte que le point X se trouve en P qui est le point le plus bas de l'arc XPS, donc, &c.

Et on prouvera la même chose si on prétendoit que le centre de gravité fut de l'autre côté en Z.

CHAPITRE VII.

Du mouvement des Corps sur un plan incliné à l'horison.

CE que nous venons de dire dans le Chapitre précédent touchant le mouvement composé, nous fait entendre pourquoi un corps A (*Fig.* 61.) descend lorsqu'il est mis sur un plan incliné BC; car la direction AR de sa pesanteur étant oblique au plan, cette pesanteur équivaut à deux forces, dont l'une pousseroit selon la direction AS perperpendiculaire, & l'autre selon la direction AX parallele à ce plan; mais le plan incliné ne s'oppose qu'à la force AS, donc il reste encore à la pesanteur la force AX, & c'est selon celle-ci qu'elle entraine le corps en le faisant descendre obliquement vers le centre de la terre.

PROPOSITION LVII.

161. *Si un corps* A *descend le long d'un plan incliné* BC (Fig. 61.) *il descend moins vite que s'il descendoit librement vers le centre de la terre.*

DÉMONSTRATION

La direction de la pesanteur du corps A étant la droite AR perpendiculaire à l'horison, laquelle rencontre le plan incliné en R,

je tire du centre de gravité A la droite AS perpendiculaire sur le plan incliné, & la droite AX parallele à ce plan, & achevant le parallelogramme ASRX autour de la diagonale AR, il est visible que si la pesanteur du corps A fait parcourir à ce corps l'espace AR dans un tems déterminé, elle équivaut à deux forces dont l'une dans le même tems feroit parcourir au même corps l'espace AS, & l'autre l'espace AX. Maintenant supposons que la pesanteur rencontre un obstacle CB qui détruise la force AS, il est sûr qu'il ne lui restera plus que la force AX, & par conséquent elle ne fera plus parcourir au corps A que l'espace AX dans le même tems qu'elle lui auroit fait parcourir l'espace AR si elle n'avoit point rencontré d'obstacles; mais lorsque les espaces sont parcourus dans un même tems les vitesses sont comme les espaces, donc la vitesse du corps A poussé par sa pesanteur qui ne rencontre point d'obstacle, est à la vitesse du même corps poussé par sa pesanteur qui rencontre l'obstacle CB comme AR est à AX, mais AR étant l'hypoténuse du triangle rectangle ARX est plus grande que le côté AX; donc la vitesse du corps A descendant librement vers le centre de la terre, est plus grande que la vitesse du même corps A descendant le long du plan incliné BC.

DEFINITION.

162. Nous appellerons *pesanteur absolue* d'un corps A, la force qui le fait descendre librement vers le centre de la terre, & *pesanteur relative* la force qui le fait descendre en rencontrant un obstacle comme il vient d'être dit.

COROLLAIRE I.

163. *La pesanteur absolue d'un corps est à la pesanteur relative, comme la longueur* BC *du plan incliné sur lequel le corps descend est à la hauteur* CD *de ce plan*; la pesanteur absolue est à la relative, comme AR est à AX, mais les triangles rectangles ARX, RBP étant semblables, on a AR, AX :: RB, RP, & à cause des triangles semblables BRP, BCD, on a RB, RP :: CB, CD, donc AR, AX :: CB, CD.

COROLLAIRE II.

164. Plus l'angle CBD du plan incliné devient grand, plus aussi l'angle ARX qui lui est égal devient grand, & par consé-

quent le côté AX qui exprime la pesanteur relative, devient plus grande par rapport à AR qui exprime la pesanteur absolue, de façon que quand l'angle devient droit, la pesanteur relative n'est autre chose que la pesanteur absolue, au contraire plus l'angle CBD diminue, plus aussi le côté AX diminue par rapport à la diagonale AR ; ainsi la pesanteur relative diminue, de sorte que quand l'angle devient infiniment petit ou nul, la pesanteur relative est aussi nulle, & la pesanteur absolue ne pouvant surmonter l'obstacle du plan horisontal BD, le corps reste en repos.

COROLLAIRE III.

165. *La pesanteur absolue est à la relative, comme le sinus droit est au sinus de l'angle d'inclinaison ;* car la pesanteur absolue est à la relative, comme la longueur BC à la hauteur DC, ou comme $\frac{1}{2}$BC est à $\frac{1}{2}$DC ; mais dans le triangle BCD, le sinus de l'angle droit est $\frac{1}{2}$BC ou la moitié du côté opposé, & le sinus de l'angle d'inclinaison est $\frac{1}{2}$CD ou la moitié du côté opposé, donc, &c.

COROLLAIRE IV.

166. *Si un même corps* A *descend successivement sur divers plans inégalement inclinés* CB, *cb*, *les pesanteurs respectives sont entr'elles comme les sinus des angles d'inclinaison ;* car la pesanteur absolue est à la pesanteur respective sur CB, comme le sinus total à l'angle d'inclinaison CBD, & la pesanteur absolue est à la pesanteur respective sur *cb* comme le sinus total à l'angle d'inclinaison *cbd* ; or la pesanteur absolue étant toujours la même, & le sinus total aussi, puisqu'on peut faire *bc* = BC en prolongeant ou en racourcissant la droite *bc* sans changer l'angle d'inclinaison *cbd*; il s'ensuit que les pesanteurs respectives sont entr'elles comme les sinus des angles CBD, *cbd*.

PROPOSITION LVIII.

167. *Si deux corps spheriques* A, M, (Fig. 62.) *attachés aux extrémités d'une corde se meuvent l'un sur un plan incliné* BC, *& l'autre le long de la hauteur* CD, *ensorte que les directions* NM, NA, *soient paralleles aux côtés* BC, CD, *& que ces deux corps se tiennent en équilibre, je dis que le corps* M *est au corps* A, *comme la hauteur* DC *du plan incliné est à sa longueur* BC.

DEMONSTRATION.

Du centre de gravité A du corps A, par lequel je conçois que la direction AN passe, j'abaisse AR perpendiculaire sur le plan incliné, & cette perpendiculaire passe évidemment par le point d'attouchement du corps A & du plan; du même point A, je mene AH perpendiculaire sur le plan horisontal BD; enfin du point R je mene RS perpendiculaire sur la direction de la pesanteur du corps A.

Comme le corps A ne s'appuye sur le plan incliné que par le point R, il est visible que si l'on retranche la partie BR de ce plan, les corps A, M seront encore en équilibre, & le point R du levier AR sera le point A d'appui, autour duquel le corps M & le corps A se contrebalancent; or M tirant la droite AR avec une direction perpendiculaire, fait le même effet sur cette droite que s'il étoit en A, & la pesanteur du corps A tirant par la direction AH oblique à AR, n'agit sur AR que comme elle agiroit sur le point S de la droite RS tirée du centre de mouvement R perpendiculairement sur sa direction (*N.* 144); ainsi cette pesanteur étant mise en S fera le même effet sur le levier SR qu'elle fait sur AR; or l'effet que M fait sur AR contrebalance celui que la pesanteur de A fait sur AR, donc considerant ARS comme un levier recourbé, l'effet de M sur AR doit contrebalancer celui de la pesanteur de A sur SR, & il est visible que cette pesanteur est la pesanteur absolue du corps A, attendu que si M ne soutenoit plus ce corps, rien n'empêcheroit sa pesanteur de le pousser selon sa direction perpendiculaire à l'horison; puis donc que M mis en A & la pesanteur absolue de A mise en S, sont en équilibre autour du point d'appui ou de mouvement R, il s'ensuit que M est à la pesanteur absolue ou au corps A reciproquement comme SR est à AR; mais les triangles BCD, ASR sont semblables, car le triangle rectangle BTH semblable au triangle rectangle BCD, est aussi semblable au triangle RTS, à cause de l'angle aigu BTH égal à l'angle aigu RTS, & le triangle RTS étant semblable au triangle rectangle ATR, à cause de l'angle aigu commun ATR, est aussi semblable au triangle ASR parce que celui-ci est semblable à ATR, à cause de l'angle aigu TAR commun à tous les deux, donc le triangle SAR est semblable au triangle BDC, & SR, AR : : CD, BC, mais le poids M est au poids A comme SR est à AR, ainsi qu'on vient de voir, donc

le poids M eſt au poids A, comme la hauteur CD du plan incliné eſt à la longueur BC de ce même plan.

COROLLAIRE I.

168. Donc le corps M eſt au corps A comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus total (*N.* 165.) ou comme la peſanteur relative du corps A eſt à ſa peſanteur abſolue.

COROLLAIRE II.

169. Si le corps A étant en X montoit de X en A, la longueur XN de ſa corde ſeroit racourcie de la grandeur XA, & la longueur NM de la corde NM ſe ſeroit augmentée de la même grandeur XA, donc M auroit deſcendu vers le centre de la terre de la quantité XA = BR, au contraire A ne ſe ſeroit éloigné de ce centre que de la quantité AV = RZ, donc la quantité dont le corps M deſcendroit eſt à la quantité dont le corps A monteroit comme BR à RZ, ou comme BC à CD, ou comme la longueur du plan incliné à ſa hauteur, c'eſt-à-dire, comme la peſanteur abſolue du corps A à ſa peſanteur relative, ou comme le ſinus total à l'angle d'inclinaiſon, ou enfin comme le poids A eſt au poids M.

COROLLAIRE III.

170. Puis donc que le corps M parcourroit en deſcendant un eſpace égal à BR dans le même tems que le corps A s'éloigneroit du centre de la terre d'un eſpace égal à RZ, il s'enſuit que les viteſſes de ces corps, ſelon la direction perpendiculaire à l'horiſon, ſont entr'elles comme BR à RZ, ou comme BC à CD; ainſi leurs momens ſeroient comme M × BC, A × CD, c'eſt-à-dire en raiſon compoſée de la raiſon M, A des maſſes, & de la raiſon BC, CD des hauteurs par leſquelles l'une deſcend & l'autre monte; or quand les corps M, A ſont en équilibre, les momens M × BC, A × CD ſont égaux, donc on a M, A :: CD, BC, & c'eſt ce que nous venons de trouver ci-deſſus (*N.* 167).

COROLLAIRE IV.

171. Si au lieu du corps M on mettoit une force *ab* qui pouſſât le corps A de *b* en N, c'eſt-à-dire dans une direction contraire à la direction NX du corps A, & que la puiſſance *ab* & le corps fuſſent en équilibre, il eſt viſible que la force *ab* ſeroit éga-

le à la force du corps M, & qu'ainsi la force *ab* seroit au corps A comme CD à BC.

Et par la même raison, si une force mise en N tiroit le corps de A en N, ensorte qu'il y eût équilibre, la force mise en N seroit au corps A comme CD à CB.

COROLLAIRE V.

172. Un plan incliné BC & sa hauteur CD étant donnés, on trouvera le poids qu'il faudroit mettre en M pour tenir en équilibre le corps donné A sur le plan incliné, en faisant cette analogie ; BC, CD :: A, $\frac{A \times CD}{BC}$.

Soit BC=5, CD=3, & A=20 ℔, faisant 5, 3 :: 20 ; $\frac{3 \times 20}{5} = \frac{60}{5} = 12$, le quatriéme terme 12 ℔ sera le poids qu'il faut mettre en M.

COROLLAIRE VI.

173. Et si les poids A, M étoient donnés, & qu'on voulût trouver l'angle d'inclinaison CBD qu'il faudroit donner au plan incliné CB, afin que le corps A mis sur ce plan fût en équilibre avec le corps M, on prendroit une longueur déterminée BC pour la longueur du plan incliné, & prenant cette longueur pour le double du sinus total, on diroit A, M, comme le sinus total est au sinus de l'angle d'inclinaison, ou comme le double du sinus total au double du sinus de l'angle d'inclinaison ; c'est pourquoi prenant une quatriéme proportionnelle aux deux corps A, M, & à la longueur BC, & décrivant un demi-cercle autour de BC, on porteroit de l'extrémité C sur la circonférence la quatriéme proportionnelle trouvée de C en D, & tirant la droite BD, l'angle CBD sera l'angle d'inclinaison cherché, car dans le triangle CBD la moitié de BC est à la moitié de CD, comme le sinus de l'angle droit BDC opposé à BC au sinus de l'angle CBD d'inclinaison opposé à CD, on auroit donc A, M comme le sinus droit est au sinus de l'angle d'inclinaison, & par conséquent les deux corps seroient en équilibre.

COROLLAIRE VII.

174. Soient deux plans BC, GE (*Fig.* 63.) également ou inégalement inclinés à l'horison, que nous supposerons perpendiculaires

culaires entr'eux, & de plus égaux en longueur simplement pour mieux faire entendre ce que nous devons dire ; car dans le fonds la différence des longueurs n'y fait rien ; & soit un corps A soutenu par l'un & par l'autre ; concevons que le plan incliné EG soit retiré, & qu'un corps M qui tire le corps A avec une direction AR parallele au plan incliné BC, soit en équilibre avec ce corps ; nous aurons A, M :: BC, CD, & par conséquent A, BC :: M, CD.

Concevons de même que le plan GE soit remis, & le plan BC ôté, & qu'un corps N qui tire A avec une direction AX parallele au plan BC soit en équilibre avec A ; nous aurons A, N :: GE, EF, donc A, GE :: N, EF, mais nous avons GE = BC par la construction, donc A, BC :: N, EF ; or nous venons de trouver A, BC :: M, CD, donc M, CD :: N, EF, & par conséquent M, N :: CD, EF, c'est-à-dire les poids M, N sont entr'eux comme les droites CD, EF en supposant les plans inclinés égaux en longueur, & comme en prenant chacun de ces plans ou chacune de leurs moitiés pour le sinus total ou pour le sinus de l'angle droit EFG ou CDB, la droite CD ou sa moitié seroit le sinus de l'angle d'inclinaison CBD, & la droite EF ou sa moitié le sinus de l'angle d'inclinaison EGF, il s'ensuit que les corps M, N sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison CBD, EGF.

Si l'un des plans inclinés étoit moindre que l'autre, par exemple EG moindre que BC, on couperoit BC en *a*, ensorte qu'on eût B*a* = EG, & tirant *ab* parallele à CD, il est visible qu'on auroit B*a*, BC :: *ab*, CD, ou B*a*, *ab* :: BC, CD, & comme nous avons A, M :: BC, CD, nous aurions aussi A, M :: B*a*, *ab*, ou A, B*a* :: M, *ab* ; de même ayant A, N :: GE, EF, nous aurions à cause de GE = B*a* par la construction A, N :: B*a*, EF, ou A, B*a* :: N, EF, & par conséquent à cause de A, B*a* :: M, *ab*, nous aurions M, *ab* :: N, EF, c'est-à-dire, les poids M, N sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison de même que ci-dessus.

Donc soit que les plans inclinés soient égaux en longueur ou non, il n'y a qu'à prendre à volonté un rayon ou sinus total, & chercher ensuite les sinus des angles d'inclinaison par rapport à ce sinus total, & ces sinus marqueront les rapports des poids M, N.

COROLLAIRE VIII.

175. Les mêmes choses étant posées, si l'on suppose que les deux plans soient ôtés, il est visible que les deux poids M, N soutiendront le poids A dans la même situation; or je dis que si l'on conçoit que N soit transporté en Q, & M en R, ensorte que ces deux poids soient sur une ligne horisontale QR, ce qui ne changera rien à la force de ces corps, à cause qu'ils tireront toujours le corps A avec les mêmes directions, ces deux corps seront entr'eux reciproquement comme les cordes RA, QA; car QR étant parallele à HD, & RA ou RH parallele à CB, l'angle ARQ est égal à l'angle CBD, & l'on prouvera de même que l'angle AQR est égal à l'angle EGH, mais M est à N comme le sinus de l'angle CBD au sinus de l'angle EGH, donc M est à N comme le sinus de l'angle ARQ au sinus de l'angle AQR, ou comme $\frac{1}{2}$AQ à $\frac{1}{2}$ AR, & par conséquent comme AQ est à AR.

Ainsi si deux forces M, N soutiennent un poids A par le moyen d'une corde, on trouvera toujours le rapport de ces deux forces par le moyen de la droite horisontale RQ.

COROLLAIRE IX.

176. Pour trouver la grandeur de ces deux poids, supposons A = 20, & que les deux plans inclinés BC, GE étant égaux entr'eux, on ait BC = GE = 5, DC = 3, & EF = 4; or puisque BC, CD :: A, M, donc 5, 3 :: 20, $\frac{3 \times 20}{5} = 12$, & puisque EG, EF :: A, N, donc 5, 4 :: 20, $\frac{4 \times 20}{5} = 16$, ainsi les deux corps M, N valent 12 & 16, c'est-à-dire que ces deux corps pris ensemble pesent plus que le corps A, ce qui paroît surprenant, mais en voici la raison.

La direction AR du corps M est composée de deux directions l'une horisontale RZ & l'autre perpendiculaire RV ou ZA, ainsi la force du corps M équivaut à ces deux forces, & agit de même qu'elles agiroient; mais la force RZ ne fait rien sur le corps A, car sa direction étant horisontale, elle ne sçauroit empêcher que la pesanteur du corps A ne le fasse descendre, ainsi il n'y a que la force ZA ou RV qui agisse, à cause que sa direction de A en Z est directement opposée à la direction de la pesanteur du corps A; donc la force du corps M n'agit que comme la force

RV ou ZA, & pour faire voir la justesse du raisonnement que nous venons de faire, il n'y a qu'à considerer que le triangle ZAR est semblable au triangle QAR, & par conséquent ZA, ZR :: QA, AR, mais QA, AR :: CD, EF :: 3, 4, donc l'hypotenuse AR est comme 5, car dans tout triangle rectangle dont les côtés sont comme 3 & 4 l'hypotenuse est 5, à cause que les quarrés 9 & 16 des côtés font ensemble 25, ou le quarré de l'hypotenuse, laquelle par conséquent doit être comme 5; mais la force du corps M est représentée par l'hypotenuse ou diagonale, parce qu'elle équivaut aux deux ZR, RV, donc puisqu'elle n'agit que comme RV, elle est à elle même agissant de tout son pouvoir comme 3 à 5, mais nous avons trouvé que M est 12; faisant donc comme 5, 3 :: 12, $\frac{3 \times 12}{5} = \frac{36}{5}$, le quatriéme terme $\frac{36}{5}$ marquera la quantité de M qui agit sur le corps A.

De la même façon on trouvera que la force du corps N étant exprimée par QA, qui équivaut aux deux forces QZ, QT ou ZA n'agit cependant sur le corps A que comme ZA; or le triangle QZA étant semblable au triangle QAR, ses côtés QZ, ZA seront entr'eux comme 3 à 4, & par conséquent QA sera comme 5, mais QA n'agissant que comme ZA ou 4, sera à elle-même comme 4 à 5; & comme nous avons trouvé N = 16, faisant 5, 4 :: 16, $\frac{4 \times 16}{5} = \frac{64}{5}$, le quotient $\frac{64}{5}$, montrera la quantité de N qui agit sur le corps A; ajoûtant donc cette quantité $\frac{64}{5}$ à la quantité $\frac{36}{5}$ de M la somme sera $\frac{100}{5} = 20$, ainsi ce que les deux forces M, N fournissent pour arrêter le corps A est égal à ce corps.

On se tromperoit donc si l'on croyoit que pour empêcher un corps A de descendre il suffisoit de faire tirer les cordes obliques XA, RA par des poids dont la somme fût égale au poids A.

COROLLAIRE X.

177. Si les plans inclinés sont obliques entr'eux (*Fig.* 64.) on prouvera de même que les poids M, N sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison, & en tirant QR horisontale les poids M, N seront entr'eux reciproquement comme les cordes QA, RA, & leur valeur se trouvera comme ci-dessus.

PROPOSITION LIX.

178. *Si un corps spherique* A (Fig. 65.) *qui est sur un plan incliné* voyés page XX

BC, *est tiré par des puissances* H, G, *&c. dont les directions ne soient point paralleles au plan incliné, & fassent par conséquent un angle avec ce plan, & que chacune de ces forces soit en équilibre avec le corps, la force sera au corps* A *comme l'angle d'inclinaison du plan sur la base est au complement à un droit de l'angle fait par la direction de la force avec le plan incliné.*

Nous appellerons *angle de traction* l'angle GLC fait par la direction GL de la force G avec le plan incliné BC; de même l'angle AIB fait par la direction de la force H, avec le plan incliné BC, sera l'angle de traction, & ainsi des autres.

DEMONSTRATION.

Du centre A je tire la droite YX au point d'attouchement laquelle coupe le grand cercle du corps spherique A en deux également; du même point A je mene la droite FT parallele au plan incliné, & cette droite coupe chaque demi-cercle en deux parties égales. Or il est visible que si de tous les points du quart de circonférence OV on tire des diametres au cercle, ces diametres prolongés couperont le plan incliné de X vers B, ainsi toutes les puissances telles que G, qui seront dans la direction de ces diametres, auront leurs angles de traction GLC entre X & B; par la même raison les puissances telles que H qui auront leur directions sur les prolongemens des diametres tirés de tous les points du quart de circonférence OX auront leur angles de traction AIQ entre X & C, & quant aux autres deux quarts de cercle, on voit bien que les forces qui seroient sur les prolongemens des diamétres tirés de tous les points du quart du cercle VT, devroient pousser le corps A au lieu de le tirer, & que par conséquent leurs angles de traction seroient les mêmes que ceux des puissances qui seroient du côté de H, & que les puissances qui seroient sur les directions des diametres menés de tous les points du quart de cercle TX, auroient les mêmes angles que ceux des puissances qui sont du côté de G; ainsi ce que nous dirons des puissances du côté de G & de H s'appliquera facilement aux puissances qui sont aux côtés opposés. Commençons par les puissances du côté de G, ou dont les directions passent par le quart de circonférence OV.

Soit donc la puissance G dont la direction GL fait avec le plan incliné l'angle de traction GLC; du point d'attouchement X je tire XR perpendiculaire sur la direction de cette puissance,

& XS perpendiculaire sur la direction AV de la pesanteur du corps A ; le triangle rectangle AXS est semblable au triangle AXQ, lequel est semblable au triangle rectangle SXQ, & celui-ci est semblable au triangle rectangle *u*QB, lequel est aussi semblable au triangle rectangle DBC ; donc AXS est semblable au triangle DBC, & l'angle XAS est égal à l'angle d'inclinaison CBD ; donc prenant AX pour sinus total, la droite XS sera le sinus de l'angle XAS ou de l'angle d'inclinaison CBD ; de même le triangle rectangle AXL étant semblable au triangle rectangle AXR, l'angle AXR est égal à l'angle de traction XLA, donc l'angle XAR est le complement à l'angle droit de l'angle AXR, ou de l'angle de traction ; ainsi prenant pour sinus total la droite AX, la droite AR sera le sinus de l'angle AXR ou de l'angle de traction XLA, & la droite XR sera le sinus de son complement XAR.

Or la puissance & le corps A s'entretenant en équilibre autour du point d'appui X, la puissance n'agit sur le levier AX que comme elle agiroit sur le levier XR perpendiculaire à sa direction, & par la même raison la pesanteur du corps A n'agit sur AX que comme elle agiroit sur le levier XS qui est perpendiculaire à sa direction. Supposant donc cette pesanteur en S, & la puissance G en R, & considérant les droites XR, XS comme faisant un levier recourbé, la puissance G & la pesanteur du corps A seront encore en équilibre autour de X ; donc G, A :: XS, XR, c'est-à-dire la puissance est au poids comme le sinus de l'angle d'inclinaison est au sinus du complement à l'angle droit de l'angle de traction ; & on prouvera la même chose à l'égard des autres puissances dont les directions passent par le quart de circonférence OV.

Le plan incliné BC étant perpendiculaire à XA, il est visible que les diametres du cercle qui passeront par tous les points du quart de cercle OX feront sur CX des angles égaux à ceux que font sur XB tous les diametres tirés du quart de cercle OV, à cause que ceux-ci passent par le quart de cercle XT ; ainsi les puissances qui auroient ces diametres pour direction auront les mêmes angles de traction que les puissances du côté de G, donc on conclura la même chose, & quant à celles qui pousseroient le corps, & dont les directions seroient les diametres qui passent par les points du quart de cercle VT, il est encore visible que leurs angles de traction seroient précisement les mêmes que ceux

des puiſſances qui tirent du côté de H, de même que celles qui pouſſeroient du côté du quart de cercle XT auroient les mêmes angles de traction que les puiſſances qui tirent du côté de G, donc, &c.

COROLLAIRE I.

179. Suppoſons que les puiſſances qui tirent ſucceſſivement le corps A ſelon les différentes directions ſoient toutes égales, & comparons les efforts qu'elles font avec celui que fait la puiſſance dont la direction eſt parallele au plan incliné, la puiſſance F ayant ſa direction parallele, on a F, A :: XS, XA ; donc $F = \frac{A \times XS}{XA}$ & la puiſſance G ayant ſa direction qui paſſe par le quart de circonférence OV, on a G, A :: XS, XR ; donc $G = \frac{A \times XS}{XR}$, & par conſéquent F, G :: $\frac{A \times XS}{XA}$, $\frac{A \times XS}{XR}$ :: $\frac{XS}{XA}$, $\frac{XS}{XR}$ :: XS×XR, XS×XA :: XR, XA, c'eſt-à-dire, la puiſſance F eſt à la puiſſance G comme XR eſt à XA ; mais XR eſt toujours moindre que XA qui eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle AXR ; donc F eſt moindre que G, c'eſt-à-dire qu'en ſuppoſant les puiſſances F & G égales, F fait moins d'effort que G ; donc il faut moins de force pour tirer avec une direction parallele qu'avec une direction oblique.

En ſecond lieu, quand la direction de la puiſſance paſſe par le quart de circonférence OV, on a G, A :: XS, XR, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus du complement à l'angle droit de l'angle de traction ; mais plus la direction GL s'écarte du point O & s'approche du point V, plus l'angle de traction devient grand ; donc le ſinus XR de ſon complement devient auſſi moindre ; donc XS devient plus grand par rapport à XR, & par conſéquent G devient plus grand par rapport à A, c'eſt-à-dire, que plus l'angle de traction eſt grand, plus une même puiſſance doit employer de force.

Quand la direction Z*u* eſt la même que celle de la peſanteur du corps, on a Z, A :: XS, XS, car la puiſſance Z agit ſur le levier AX, comme elle agiroit ſur le levier XS perpendiculaire à ſa direction, & la peſanteur agit auſſi ſur AX comme elle agiroit ſur le levier XS auſſi perpendiculaire à ſa direction, donc la puiſſance & la peſanteur agiſſant comme ſi elles étoient toutes les deux en S, & ſe contrebalançant elles ſe trouvent égales ; & on trouvera la même choſe en obſervant que l'angle de traction

SQX étant égal à l'angle AXS, l'angle XAS sera son complement, & par conséquent le sinus XS de son complement est égal au sinus XS d'inclinaison.

Quand la direction YX est perpendiculaire au plan incliné, l'angle de traction est droit, & son complement à l'angle droit est zero; donc on a Y, A :: XS, O, c'est-à-dire que Y est infiniment grand par rapport à A, de même que XS par rapport à zero; donc il faudroit une force infinie pour soutenir le corps A avec cette direction.

Quand la direction PA est parallele à l'horizon ou à DB, l'angle de traction APB est égal à l'angle PBD d'inclinaison qui lui est alterne; donc l'angle de son complement est égal à l'angle DCB qui est le complement de l'angle d'inclinaison; & par conséquent on aura P est à A comme le sinus de l'angle CBD au sinus de l'angle BCD, c'est-à-dire comme la hauteur CD du plan incliné est à sa base; car en prenant pour sinus total la droite CB, le sinus de l'angle DBC est CD, & le sinus de l'angle BCD est DB.

On n'a qu'à appliquer aux puissances dont les directions passent par le quart de circonférence OX ce que nous avons dit des puissances dont les directions passent par le quart de cercle OV, puisque les angles de traction des unes sont égaux aux angles de traction des autres, & ensuite appliquer aux puissances qui poussent du côté des deux autres quarts, ce qui convient aux puissances qui tirent du côté de G & de H; d'où l'on conclura en général que les puissances étant supposées égales, celle qui pousse avec une direction parallele au plan incliné, fait moins d'effort que les autres, & que celles qui poussent ou qui tirent avec des directions qui s'éloignent davantage de la direction parallele au plan incliné, font plus d'effort que celles qui tirent ou qui poussent avec des directions qui s'éloignent moins de la direction parallele au plan incliné.

COROLLAIRE II.

180. Si au lieu des puissances qui tirent le corps A on met des poids p, f, g, &c. on trouvera que si chacun de ces poids est en équilibre avec le corps A, le poids f qui tire avec une direction parallele au plan incliné, sera moindre que chacun des autres, que le poids g qui tire avec une direction oblique,

sera moindre qu'un autre poids dont la direction oblique s'éloigneroit davantage de la direction parallele, &c.

PROPOSITION LX.

181. *Si deux corps* A, M (Fig. 66.) *attachés aux extremités d'une corde* AHM *sont mis sur deux plans inégalement ou également inclinés* BC, CE *qui ont la hauteur commune* CD, *& que ces deux corps se tiennent en équilibre, je dis que le corps* A *est au corps* M *comme le plan incliné* BC *au plan incliné* CE.

DEMONSTRATION.

Les corps A, M étant en équilibre par la supposition, leur forces sont par conséquent égales, mais la force du corps A, est la même qu'une force mise en H qui tireroit le corps M selon la direction MH & qui le tiendroit en équilibre, & par la même raison la force du corps M est la même qu'une force mise en H qui tireroit le corps A selon la direction AH, & le tiendroit en équilibre, donc ces deux forces en H seroient égales; appellant donc l'une & l'autre V, nous aurons V, A :: CD, BC, (*N.* 171.) & par conséquent V, CD :: A, BC; par la même raison nous aurons V, M, CD, CE, & par conséquent V, CD :: M, CE; puis donc que la raison V, CD est égale à la raison A, BC, & quelle est aussi égale à la raison M, CE, il s'ensuit que A, BC :: M, CE, & A, M :: BC, CE.

AUTRE DEMONSTRATION.

Supposons que le corps A étant en T, & le corps M en M, on vienne à tirer celui-ci en V, la corde HM sera plus grande de la quantité MV=IE, & le corps T se trouvant alors en A, la corde HT sera moindre de la quantité AT=BL=MV; des points T, V je mene les droites TP, VQ paralleles à l'horizon BE jusqu'à la rencontre des droites AP, MQ perpendiculaires à l'horizon, lesquelles sont les directions des pesanteurs des corps A, M; il est clair que la quantité dont le corps M aura descendu vers le centre de la terre sera MQ, & que la quantité dont le corps A se sera élevé au-dessus de ce centre sera AP, & comme ces deux quantités sont parcouruës dans le même tems, elles exprimeront les vitesses des corps M, A; donc les momens de ces corps seront M×MQ, A×AP; or ces momens sont égaux, puisque

puisque nous supposons que ces corps sont en équilibre, donc M×MQ=A×AP, & par conséquent M, A :: AP, MQ.

Des points d'attouchement L, I, j'abbaisse les perpendiculaires L*p*, I*q* sur les bases, les triangles semblables ATP, LB*p* sont égaux à cause de TA=BL, donc AP=L*p*; de même les triangles semblables MQV, I*q*E sont égaux, à cause de MV=IE, donc MQ=I*q*, donc AP, MQ :: L*p*, I*q*, & par conséquent M, A :: L*p*, I*q*.

Les triangles semblables LB*p*, CBD donnent LB, CB :: L*p*, CD; donc LB×CD=CB×L*p*, les triangles semblables I*q*E, CDE donnent IE, CE :: I*q*, CD, mais IE=MV=AT=BL, donc BL, CE :: I*q*, CD, & par conséquent BL×CD=CE×I*q*; mais nous venons de trouver BL×CD=CB×L*p*, donc CE×I*q* =CB×L*p*, d'où l'on tire L*p*, I*q* :: CE, CB, mais nous avons M, A :: L*p*, I*q*, donc M, A :: CE, CB, c'est-à-dire les corps M, A sont entr'eux comme les plans inclinés.

J'ai donné cette seconde Demonstration pour faire voir l'accord des principes que nous avons donné ci-dessus.

REMARQUE.

182. On peut remarquer en passant un Theorême qui merite attention, quoiqu'il ne regarde point la matiere dont nous parlons, & ce Theorême est tel : *Si deux triangles* BCD, DCE, (Fig. 67.) *ont le sommet commun* C, *& un côté* CD *commun*, *& qu'on prenne sur les côtés* BC, CE *qui vont aboutir au sommet, des parties* BC, EI *égales, desquelles on tire les droites* L*p*, I*q*, *parallelles au côté commun* CD, *ces droites* L*p*, I*q* *seront entr'elles réciproquement comme les côtés* CE, CB, *c'est-à-dire* L*p*, I*q* :: CE, CB; ce qu'on démontrera de même que nous l'avons fait pour les triangles CBD, CED (*Fig.* 62.)

COROLLAIRE.

183. Si les plans inclinés CB, EN (*Fig.* 68.) ne sont pas de même hauteur, il sera toujours vrai de dire que les forces des corps A, M qui sont en équilibre seront égales, & par conséquent la force en H qui soutiendroit M seroit égale à la force en H qui soutiendroit A; je nomme V l'une ou l'autre de ces forces, S le sinus de l'angle d'inclinaison CBD du plan incliné CB, *s* le sinus de l'angle END du plan incliné NE, & R le sinus total.

La force qui soutiendroit A est à ce corps comme le sinus S est au rayon R (*N.* 168.), donc V, A :: S, R & $V = \frac{AS}{R}$; par la même raison, j'ai V, M :: *s*, R, & $V = \frac{Ms}{R}$, donc $\frac{AS}{R} = \frac{Ms}{R}$, ou AS = M*s*, d'où je tire A, M :: *s*, S, c'est-à-dire les corps A, M sont en raison réciproque des sinus des angles d'inclinaison de leur plans inclinés, ce qui est également vrai lorsque les plans inclinés ont une même hauteur.

PROPOSITION LXI.

184. *Si deux corps* A, M (*Fig.* 69.) *attachés aux extremités d'une corde sont sur deux plans inclinés, & qu'ils se tiennent en équilibre avec des directions qui ne sont point paralleles aux plans inclinés, ces deux plans sont entr'eux en raison composée de la raison réciproque des sinus des angles d'inclinaison & de la directe des sinus de complement des angles de traction.*

DEMONSTRATION.

Les forces des corps A, M, étant égales & conçuës comme si elles agissoient en H, je nomme V chacune de ces forces, S le sinus de l'angle d'inclinaison du plan BC, *s* le sinus de l'angle d'inclinaison du plan CE, T le sinus de complement à l'angle droit de l'angle de traction sur le plan BC, & *t* le sinus de complement à l'angle droit de traction sur le plan CE.

Par la Proposition 59. (*N.* 178.) j'ai V, A :: S, T; donc $V = \frac{AS}{T}$, & par la même raison j'ai V, M :: *s*, *t*, donc $V = \frac{Ms}{t}$, & par conséquent $\frac{AS}{T} = \frac{Ms}{t}$ donc A, M :: $\frac{s}{t}$, $\frac{S}{T}$ :: *s*T, *t*S, donc, &c.

COROLLAIRE.

185. Si l'une des directions AH est oblique au plan incliné BC (*Fig.* 70.) & l'autre HM parallele au plan incliné CE, nommant V l'une ou l'autre des puissances mises en H, S le sinus de l'angle d'inclinaison du plan incliné BC, *s* le sinus de l'angle d'inclinaison du plan CE, T le sinus de complement de l'angle de traction HOC, & R le sinus total, j'ai V, A :: S, T; donc $V = \frac{AS}{T}$, de même V, M :: *s*, R, donc V

$= \frac{Mr}{R}$, & par conſéquent $\frac{AS}{T} = \frac{Mr}{R}$, d'où je tire A, M :: $\frac{r}{R}$, $\frac{S}{T}$ :: rT, RS, c'eſt-à-dire le poids A eſt au poids M en raiſon compoſée de la raiſon réciproque des ſinus d'inclinaiſon, & de la raiſon du ſinus de complement de l'angle de traction au ſinus total.

PROPOSITION LXII.

186. *Le mouvement d'un corps qui deſcend librement le long d'un plan incliné eſt un mouvement uniformement acceleré.*

DEMONSTRATION.

La peſanteur abſolue du corps A (*Fig.* 71.) eſt à ſa peſanteur relative comme BC à CD (*N.* 163.) c'eſt-à-dire, que ſi la peſanteur abſolue avoit fait deſcendre au corps A l'eſpace CD dans un tems déterminé, la peſanteur relative lui auroit fait parcourir dans le même tems un eſpace CA qui feroit à l'eſpace CD comme CD eſt à CB; or cette loi eſt toujours la même de quelque grandeur que ſoit l'eſpace que la peſanteur abſolue fait parcourir. Suppoſant donc que la peſanteur abſolue eût fait parcourir au corps A l'eſpace CR à la fin de la premiere minute, il eſt évident ſelon la loi de Galilée, qu'à la fin de la ſeconde minute le corps auroit parcouru un eſpace CD quadruple de CR; or l'eſpace que la peſanteur relative aura fait parcourir à la fin de la premiere minute, & que je ſuppoſe être CP ſera à l'eſpace CR que la peſanteur abſolue aura fait parcourir à la fin de cette minute, comme CD à BC (*N.* 163.) & l'eſpace que la peſanteur relative aura fait parcourir à la fin de la ſeconde minute, & que je ſuppoſe être CA, ſera auſſi à l'eſpace CD que la peſanteur abſolue aura fait parcourir à la fin de la ſeconde minute comme CD à BC, donc nous aurons CP, CR :: CD, CB, & CA, CD :: CD, CB, donc CP, CR :: CA, CD, & par conſéquent CP, CA :: CR, CD; mais CD eſt quadruple de CR, donc CA eſt quadruple de CP; donc les eſpaces CP, CA que la peſanteur relative aura fait parcourir au corps A l'un à la fin d'une minute & l'autre à la fin de deux minutes, ſeront comme 1 à 4, ou comme les quarrés des tems 1 minute, 2 minutes, & par conſéquent le mouvement du corps A le long de CB eſt uniformement acceleré, de même que le mouvement du même corps A lorſqu'il deſcend librement vers le centre de la terre.

COROLLAIRE I.

187. Supposant donc que deux corps égaux chacun à A, vinssent à passer dans le même tems du repos au mouvement, & que le premier fût poussé par une force égale à la pesanteur absolue du corps A, & l'autre par une force égale à la pesanteur relative du même corps A sur le plan incliné BC, ensorte que le mouvement de l'un & de l'autre corps fût uniformement acceleré; il est clair que ces deux corps ne parcouroient jamais dans le même tems des espaces égaux, ce qui semble opposé à ce que nous avons dit dans la Proposition 29 (*N.* 99.), mais il faut prendre garde comme nous l'avons déja fait observer ailleurs (*N.* 136.) que dans cette Proposition nous ne parlons que des corps qui descendent par la force de leur pesanteur sans trouver nul obstacle, auquel cas nous avons fait voir que les pesanteurs étant toujours proportionnelles aux masses, les espaces parcourus par deux corps dans des tems égaux doivent être égaux; mais ici ce n'est plus la même chose, car les forces qui poussent les corps n'étant plus proportionnelles aux masses, puisque les masses étant supposées égales les forces ne le sont pas; il s'ensuit que les espaces parcourus dans les mêmes tems par les deux corps ne doivent plus être égaux, mais qu'ils doivent être proportionnels, à cause qu'ils suivent la même loi d'acceleration.

COROLLAIRE II.

188. Puisque les corps qui descendent librement le long d'un plan incliné se meuvent d'un mouvement uniformement acceleré, on doit appliquer à ces corps tout ce que nous avons dit des corps qui descendent librement vers le centre de la terre sans trouver nul obstacle, & qui suivent la loi de Galilée; ainsi si le corps A commence à descendre au point C. 1°. Les espaces parcourus à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. seront comme les quarrés 1, 4, 9, 16, &c. de ces tems (*N.* 55). 2°. Les espaces parcourus dans des tems égaux, c'est-à-dire les espaces parcourus dans la premiere minute, dans la seconde, dans la troisiéme, &c. seront comme 1, 3, 5, 7, &c. (*N.* 59). 3°. Les vitesses acquises à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. étant entr'elles comme ces tems, les espaces parcourus seront comme les quarrés de ces vitesses (*N.* 57). 4°. Enfin l'espace parcouru par le corps A dans un tems déterminé est à l'espace qu'il parcourroit d'un

mouvement uniforme avec la vitesse acquise à la fin de ce tems comme 1 est à 2 (*N. 63*).

COROLLAIRE III.

189. *La vitesse qu'un corps* A *qui descend le long d'un plan incliné* BC, *a acquise à la fin d'un tems déterminé est à la vitesse qu'il auroit acquise à la fin de ce tems s'il descendoit sans obstacle vers le centre de la terre comme* CD *est à* CB.

Supposons que le corps A poussé par sa pesanteur absolue eût parcouru à la fin de deux minutes un espace perpendiculaire à l'horison & égal à CD, l'espace AC que ce même corps poussé par sa pesanteur relative, auroit parcouru à la fin du même tems, seroit donc à CD comme CD à BC ; or l'espace que le corps A parcourroit dans deux minutes avec un mouvement uniforme & une vitesse égale à la vitesse acquise à la fin de l'espace DC, seroit double de l'espace DC, & par conséquent il seroit 2DC (*N. 63*), & par la même raison l'espace que le corps A parcourroit dans deux minutes avec une vitesse uniforme égale à la vitesse acquise à la fin de l'espace CA seroit 2CA, donc ces deux espaces 2DC, 2CA, seroient encore entr'eux comme DC à CA ; mais dans le mouvement uniforme les vitesses sont comme les espaces parcourus dans des tems égaux, donc les vitesses des deux mouvemens uniformes sont entr'elles comme 2DC, 2CA, ou comme DC, CA ; mais les vitesses de ces mouvemens uniformes sont les mêmes que les vitesses acquises d'un mouvement acceleré à la fin des espaces DC, CA, donc les vitesses acquises à la fin de ces espaces sont entr'elles comme DC, CA ; ainsi la vitesse acquise à la fin d'un certain tems par le corps A qui descend le long du plan incliné, est à la vitesse qu'il auroit acquise à la fin du même tems s'il descendoit librement vers le centre de la terre, comme la hauteur CD du plan incliné est à la longueur BC de ce plan.

COROLLAIRE IV.

190. *La vitesse que la pesanteur relative du corps* A *lui fait acquerir à la fin d'un tems déterminé, est à celle que sa pesanteur absolue lui feroit acquerir dans le même tems, comme le sinus de l'angle* CBD *d'inclinaison est au sinus total ;* ces deux vitesses sont comme CD, BC, ou comme $\frac{1}{2}$CD, $\frac{1}{2}$BC, mais dans le triangle CBD le si-

nus de l'angle CBD eſt $\frac{1}{2}$ CD, & le ſinus de l'angle droit CBD eſt $\frac{1}{2}$ BC, donc, &c.

COROLLAIRE V.

191. Connoiſſant l'eſpace qu'un corps A, qui deſcend le long d'un plan incliné, parcourroit dans un certain tems s'il deſcendoit ſans obſtacle le long du centre de la terre, on pourra toujours connoître l'eſpace qu'il doit parcourir dans un même tems le long de BC, en cette ſorte.

Suppoſons que le corps étant en C commence à deſcendre librement vers le centre de la terre, & qu'à la fin d'une minute il ait parcouru l'eſpace CD, donc l'eſpace que la peſanteur relative doit lui faire parcourir dans le même tems, doit être à CD comme CD eſt à CB, c'eſt pourquoi du point D j'abaiſſe DA perpendicnlaire ſur CB, & l'eſpace CA eſt l'eſpace cherché, car les triangles rectangles ACD, BCD étant ſemblables, j'ai AC, CD : : CD, CB.

CORROLLAIRE VI.

192. Donc l'eſpace AC parcouru par le corps A ſur le plan incliné, eſt à l'eſpace AD, que le méme corps parcourroit dans le même tems en deſcendant librement vers le centre de la terre, comme la hauteur du plan incliné à ſa longueur, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus total

COROLLAIRE VII.

193. Connoiſſant l'eſpace AC (*Fig.* 72.) qu'un corps A parcourroit dans un tems déterminé en deſcendant librement vers le centre de la terre, on connoîtra les eſpaces qu'il parcourroit dans le même tems ſur chacun des plans diverſement inclinés, AH, AR, AS, AI, &c. en menant du point C des perpendiculaires CD, CE, CO, CB, &c. ſur les plans inclinés, & les droites AD, AE, AO, AB, &c. ſeront les eſpaces parcourus ſur ces plans dans des tems égaux; car par rapport au plan HA les triangles ſemblables DAC, ACH donneront DA, AC : : AC, AH, de même par rapport au plan RA les triangles ſemblables EAC, ACR donneront EA, AC : : AC, AR, & ainſi des autres; puis donc que chacun des eſpaces AD, AE, AO, &c. que la peſanteur relative fait parcourir, eſt à l'eſpace que l'abſolue fait

parcourir, comme la hauteur de chaque plan est à sa longueur, il s'ensuit que ces espaces sont parcourus dans des tems égaux.

COROLLAIRE VIII.

194. Les vitesses acquises à la fin des espaces AD, AE, AO, &c. sont entr'elles comme ces espaces, car chacune de ces vitesses est à la vitesse acquise à la fin de l'espace AC, comme la hauteur AC est à la longueur du plan incliné (*N*. 189); or les espaces sont à l'espace AC dans le même rapport (*N*. 192), donc, &c.

COROLLAIRE IX.

195. Les espaces AD, AE, AO, &c. sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison de leur plan; car appellant le sinus total R, S le sinus de l'angle d'inclinaison AHC, & *s* le sinus de l'angle d'inclinaison ARC, nous aurons AD, AC :: S, R (*N*. 192.) & AE, AC :: *s*, R, donc puisque dans ces deux proportions les deux conséquens sont les mêmes, il s'ensuit que AD, S :: AE, *s*, & l'on prouvera la même chose des autres espaces.

Les vitesses acquises à la fin de ces espaces étant comme ces espaces, elles sont par conséquent comme les sinus d'inclinaison.

COROLLAIRE X.

196. Si sur l'espace AC pris pour diametre on décrit un cercle, sa circonférence passera par les extrémités D, E, O, B, &c. des espaces AD, AE, AO, &c. car les triangles ADC, AEC, AOC, ABC étant rectangles, & le diametre AC étant leur hypotenuse commune, les sommets de leurs angles droits seront tous à la circonférence; or de-là on tire ce théoreme.

Si le diametre AC *d'un cercle est perpendiculaire à l'horison, & que du sommet* A *on tire tant des cordes* AD, AE, AO, AB, *&c. qu'on voudra, un corps* A *qui descendroit successivement sur chacune de ces cordes, parcourroit chacune d'elles dans un tems égal au tems qu'il employeroit à parcourir le diametre* AC. C'est ce que nous venons de voir.

Et si du point C *on tire tant de cordes* CD, CE, CO, CB, *&c. qu'on voudra, le même corps qui descendroit successivement des points* D, E, O, B *le long de ces cordes parcourroit chacune d'elles dans un*

tems égal à celui qu'il employeroit à parcourir le diametre AC.

Pour prouver cette derniere partie, je mene du sommet A la tangente AT, & du point C la tangente CH, je prolonge CD jusqu'en T, & du point T je mene T*h* parallele à AC; ainsi CT est un plan incliné dont la hauteur est T*h* ou AC. Supposant donc que le corps A soit mis en D, & que de-là il descende l'espace DC, si je veux trouver l'espace qu'il auroit parcouru dans le même tems, s'il étoit tombé librement vers le centre de la terre, j'éleve une perpendiculaire sur le point D, laquelle par conséquent va aboutir en A, & je dis que l'espace AC est égal à l'espace que le corps auroit parcouru librement vers le centre de la terre, dans le même tems qu'il a parcouru DC, car l'espace DC doit être à l'espace que le corps auroit parcouru en tombant librement comme T*h* à CT, ou comme AC = T*h* est à TC; or les triangles rectangles DCA, CAT étant semblables, AC ou T*h*, CT :: CD, AC, donc AC est l'espace que le corps A tombant librement doit parcourir dans le même tems qu'il parcourt l'espace AD.

Il faut observer que le point D doit être le commencement du mouvement de D en C, c'est-à-dire que le corps A commence en D à passer du repos en mouvement, & de même que le point A du mouvement AC soit le point où le corps commence à passer du repos au mouvement, ce que l'on doit toujours entendre de même dans les comparaisons que l'on fait de ces sortes de mouvemens.

Il n'est pas nécessaire que le corps qui parcourt successivement les espaces AD, AE, AO, AB, &c. ou les espaces DC, EC, OC, BC &c. soit toujours le même corps, & quand on mettroit différens corps de différentes masses, la même chose arriveroit, par exemple supposé que le corps qui parcourt AD soit de deux ℔, & le corps qui parcourt AC d'une livre, il sera toujours vrai que le corps qui parcourt AC n'employera pas plus de tems à parcourir cet espace que n'en employe celui qui parcourt AD, car si le corps qui parcourt AC étoit de deux livres, ils parcourroient tous les deux dans le même tems leur espace AC, AD; mais un corps d'une livre qui parcourt AC n'employe ni plus ni moins de tems, qu'un corps de deux livres (*N.* 99), donc le corps d'une livre parcourt l'espace AC dans le même tems qu'un corps de deux livres parcourt l'espace AD, & ainsi des autres.

PROPOSITION

PROPOSITION LXIII.

197. *Si un corps descend le long d'un plan incliné* AH (Fig. 72), *la vitesse qu'il a acquise lorsqu'il est arrivé à la ligne horizontale* HC, *est égale à la vitesse que ce même corps auroit acquise à la fin de la hauteur* AC *en descendant librement vers le centre de la terre.*

DEMONSTRATION.

Pour abreger le discours & rendre en même tems plus clair ce que nous allons dire, nous nommerons *u*CA la vitesse acquise à la fin de l'espace AC, *u*AD la vitesse acquise à la fin de l'espace AD, & ainsi des autres vitesses acquises ; cela posé.

Du point C je mene la perpendiculaire CD sur le plan incliné AH, & j'ai *u*DA, *u*AC : : AC, AH, & selon la loi de Galilée, j'ai *u*DA, *u*AH : : $\sqrt{AD}$, $\sqrt{AH}$; mais à cause des triangles semblables DAC, CHA, j'ai : : DA, AC, AH, donc DA, AH : : $\overline{DA}^2$, $\overline{AC}^2$, & tirant la racine quarrée de tous les termes, j'ai $\sqrt{DA}$, $\sqrt{AH}$: : DA, AC ; puis donc que *u*DA, *u*AH : : $\sqrt{DA}$, $\sqrt{AH}$, il s'ensuit que *u*DA, *u*AH : : DA, DC, ou *u*DA, *u*AH : : AC, AH ; mais nous avons *u*DA, *u*AC : : AC, AH, donc *u*DA, *u*AH : : *u*DA : : *u*AC, & par conséquent *u*AH = *u*AC.

COROLLAIRE I.

198. Il faudroit dire la même chose de deux corps de différentes masses, dont l'un parcourroit le plan AH dans le même tems que l'autre parcourroit la hauteur AC, car tous les corps qui descendent vers le centre de la terre, parcourant tous les mêmes espaces dans des tems égaux, il est indifférent de mettre lequel on voudra, & par conséquent il est aussi indifférent de mettre le long du plan incliné un corps de telle masse qu'on jugera à propos, ce que je ne repeterai plus.

COROLLAIRE II.

199. Ce que nous venons de démontrer par rapport au plan incliné AH, étant également vrai par rapport aux plans inclinés AR, AS, AI, &c. il s'ensuit que si un corps descend, tantôt par un plan incliné AH, tantôt par un plan incliné AR, &c. les vitesses qu'il aura acquises à la fin de chacun de ces plans seront toujours égales, puisqu'elles seront toujours égales chacune à la

vitesse acquise à la fin de la hauteur commune AC de ces plans.

COROLLAIRE III.

200. *Si un corps* A (Fig. 73.) *descend le long de plusieurs plans inclinés* AM, MQ, QR, *la vitesse acquise en* R *est égale à la vitesse qu'il auroit acquise en tombant le long de la hauteur totale* AV *des plans* AM, MQ, QR.

Du point A je mene AS parallele à l'horizon, & je prolonge le plan QM en N, la vitesse acquise en M le long du plan MA est égale à la vitesse acquise en M le long du plan MN, car ces deux plans ayant la hauteur commune AO, les vitesses acquises en M le long de ces plans sont égales chacune à la vitesse acquise en O par la chute AO (*N.* 197). Supposant donc que le corps arrivé en M continue à se mouvoir jusques en Q, la vitesse acquise en Q le long des plans AM, MQ, sera égale à la vitesse acquise en Q le long du plan QN, ou à la vitesse acquise en P le long de la hauteur AP du plan NQ. Je prolonge le plan RQ en S, & la vitesse acquise en Q le long du plan NQ, est égale à la vitesse acquise en Q le long du plan SQ, à cause que les deux plans NQ, SQ ont la hauteur commune AP; mais la vitesse acquise le long des plans AM, MQ est égale à la vitesse acquise le long des plans NQ, SQ, donc la vitesse acquise le long des plans AM, MQ est égale à la vitesse acquise le long du plan SQ. Supposant donc que le corps continue à se mouvoir de Q en R, il est visible que la vitesse acquise en R le long des plans AM, MQ, QR, sera égale à la vitesse acquise en R le long du plan SR, ou à la vitesse acquise en V le long de la hauteur AV, donc, &c.

COROLLAIRE IV.

201. Les courbes pouvant être considerées comme des polygones d'une infinité de côtés, lesquels sont autant de plans inclinés qui changent à tout moment de direction, il s'ensuit que si un corps S (*Fig.* 74.) descend le long d'une courbe SX, la vitesse acquise en X est égale à la vitesse qu'il auroit acquise en descendant le long de la hauteur SV.

PROPOSITION LXIV.

202. *Le tems qu'un corps* A (Fig. 72.) *employe à parcourir un plan incliné* AH, *est au tems qu'il employeroit à parcourir la hauteur* AC *comme la longueur* AH *est à la hauteur* AC.

DEMONSTRATION.

La vitesse acquise en H est égale à la vitesse acquise en C par la Proposition précédente ; or si le corps A avoit eu une vitesse uniforme égale à la vitesse en H , il auroit parcouru un espace double de AH dans le même tems qu'il a parcouru AH (*N.63.*), donc avec une vitesse uniforme qui n'eût été que la moitié de la vitesse acquise, il auroit parcouru dans le même tems un espace égal à AH ; par la même raison si le corps A avoit eu une vitesse uniforme qui n'eût été que la moitié de la vitesse acquise en C, il auroit parcouru un espace égal à AC dans le même tems qu'il a parcouru AC d'un mouvement acceleré ; mais ces demi-vitesses uniformes sont égales, & dans le mouvement uniforme les vitesses étant égales, les tems sont comme les espaces AH, AC, donc les tems employés à parcourir uniformement les espaces AH, AC, sont entr'eux comme AH, AC ; mais les tems employés à parcourir uniformement ces espaces, sont les mêmes que les tems employés à les parcourir d'un mouvement acceleré, dont les tems employés à parcourir les espaces AH, AC d'un mouvement acceleré sont entr'eux comme AH, AC.

COROLLAIRE.

203. Donc les tems employés à parcourir les plans diversement inclinés AH, AR, AS, AI, &c. qui ont la hauteur commune AC, sont entr'eux comme ces plans, puisque chacun d'eux est au tems employé à parcourir la hauteur AC comme son plan incliné est à la hauteur AC.

PROPOSITION LXV.

204. *Une cycloïde* CDF (Fig. 75.) *étant élevée perpendiculairement à l'horizon dans une situation renversée, ensorte que sa base* CF *qui est en haut soit horisontale, si l'on prend tant de points que l'on voudra* E, M, G, *&c. sur sa circonférence, un corps qui descendra de l'un de ces points quelconque* G *vers* D, *n'employera pas moins de tems à parcourir l'arc* GD, *que s'il parcouroit la demi-cycloïde* FD *en descendant de* F *vers* D.

DEMONSTRATION.

Des points E, G, M, &c. je mene les ordonnées ET, GH, MN, je décris sur AD le cercle générateur, & du point D je mene les cordes DB, DL, DO, &c. aux points B, L, O, &c. ou les ordonnées ET, GH, MN, &c. coupent la demi-circonférence ABLD. Par la proprieté du cercle j'ai TD, DB :: DB, DA, donc $TD \times DA = \overline{DB}^2$, de même HD, DL :: DL, DA, & partant $HD \times DA = \overline{DL}^2$, d'où il suit que $\overline{DB}^2$, $\overline{DL}^2$ :: $TD \times DA$, $HD \times DA$, c'est-à-dire; *dans le cercle les quarrés des cordes* DB, DL, *&c. sont entr'eux comme les rectangles du diametre* DA *par les hauteurs* TD, HD, *&c. des cordes*; & comme ces rectangles $TD \times DA$, $HD \times DA$, ayant une dimension commune DA, sont par conséquent entr'eux dans la raison de leurs dimensions inégales TD, HD, &c. il s'ensuit que l'on a $\overline{DB}^2$, $\overline{DL}^2$ :: TD, HD, c'est-à-dire, *les quarrés des cordes* DB, DL, *&c. sont entr'eux comme leurs hauteurs* TD, HD, *&c.* & partant *les cordes* DB, DL, *&c. sont comme les racines quarrées de leurs hauteurs* TD, HD, *&c.* cela posé.

Si un corps mis en E descend le long de l'arc ED, la vitesse qu'il aura acquise en D sera $\sqrt{TD}$; de même si ce corps mis en G descend le long de l'arc GD, la vitesse acquise en D sera $\sqrt{HD}$; ainsi les vitesses acquises le long des arcs ED, GD, &c. en supposant toujours que le corps passe du repos au mouvement lorsqu'il est mis aux points E, G, &c. sont entr'elles comme les racines des hauteurs correspondantes TD, HD; mais les racines de ces hauteurs sont comme les cordes du cercle correspondantes DB, DL, &c. donc les vitesses acquises à la fin des arcs de cycloïde ED, GD, &c. sont comme les cordes BD, LD, &c. mais par la proprieté de la cycloïde les arcs ED, GD, &c. de cycloïde sont doubles des cordes de cercle correspondantes DB, DL, &c. & les doubles sont entr'eux les simples, donc les vitesses acquises à la fin des arcs de cycloïde ED, GD, &c. sont comme ces arcs, c'est-à-dire les vitesses acquises à la fin des espaces sont comme les espaces, & il faut dire la même chose des vitesses acquises à la fin des arcs quelconques MD, &c.

Je conçois que l'arc ED soit divisé en une infinité de parties

égales dont l'une soit E*e*, & que l'arc MD soit divisé en un même nombre de parties égales, dont l'une soit M*m*, il est évident que les arcs E*e*, M*m* seront entr'eux comme les arcs ED, MD, ou comme les arcs *e*D, *m*D; ainsi les vitesses acquises à la fin des arcs ED, MD étant entr'elles comme les arcs ED, MD, & les vitesses acquises à la fin des arcs *e*D, *m*D étant comme les arcs *e*D, *m*D, il s'ensuit que les vitesses acquises à la fin des arcs E*e*, M*m* seront comme les arcs E*e*, M*m*; or ces arcs étant infiniment petits, les vitesses avec lesquelles ils sont parcourus peuvent passer pour uniformes, & dans le mouvement uniforme les tems sont égaux lorsque les vitesses sont comme les espaces, dont les arcs E*e*, M*m* seront parcourus dans des tems égaux; & comme la même chose arrivera à l'égard de tous les E*e* qui composent l'arc ED, & de tous les M*m* qui composent l'arc MD, il s'ensuit que le tems pendant lequel l'arc ED sera parcouru, doit être égal au tems pendant lequel le corps parcourra l'arc MD.

Et on prouvera la même chose de tout autre arc GD, FD, &c.

Nota. 1°. Que les espaces parcourus ED, MD étant entr'eux comme les vitesses acquises, il s'ensuit nécessairement que les forces acquises sont entr'elles comme les masses multipliées par les vitesses acquises, quand même on voudroit estimer les forces acquises par les produits des masses par les espaces; ainsi ce qui arrive dans la cycloïde est absolument contraire à l'hypotèse des forces vives, & M. Bernoulli n'y a pas bien reflechi lorsqu'il s'est servi de cet exemple pour autoriser son sentiment. Voyez ce que nous en avons dit ci-dessus (*N.* 106).

Nota. 2°. Que dans le demi-cercle les cordes DB, DL, DO, &c. seroient parcourues dans un même tems, comme il a été démontré (*N.* 196.) & que les vitesses avec lesquelles ces cordes seroient parcourues étant entr'elles comme les racines des hauteurs TD, HD, &c. seroient par conséquent comme les cordes ou les espaces parcourus DB, DL, &c. donc les forces acquises à la fin de ces espaces seroient nécessairement comme les masses multipliées par les vitesses, quand même on voudroit estimer ces forces par les produits des masses par les espaces; mais ces forces acquises seroient des forces agissantes & non *mortes*, donc les forces agissantes dans le mouvement d'un corps le long des cordes d'un demi-cercle, ou le long des arcs de cycloïde, sont comme les produits des masses par les vitesses, & non pas

comme les produits des masses par les quarrés des vitesses; l'hypotèse des forces vives se trouve donc démentie dans ces deux cas, de même que dans tous les autres qu'on nous allegue en leur faveur, & par conséquent cette hypotèse est fausse & ne sauroit se soutenir.

PROPOSITION LXVI.

205. *Si deux corps* A, *a*, (Fig. 76.) *descendent l'un le long de deux plans inégalement inclinés* AB, BC, *& l'autre le long de deux plans ab, bc, semblables aux deux premiers & semblablement inclinés, le tems que le corps* A *employera à parcourir les plans* AB, BC *sera au tems que le corps a employera à parcourir les plans ab, bc, comme la racine quarrée de la longueur* ABC *à la racine quarrée de la longueur abc.*

DEMONSTRATION.

Supposons que le rapport de AB à *ab* soit comme *m* est à 1, les rapports de BC à *bc*, de la hauteur AD à la hauteur *ad*; & de BE à *be* seront aussi comme *m* est à 1, puisque les plans AB, BC sont semblables aux plans *ab*, *bc*, & semblablement posés.

La vitesse acquise par le corps A à la fin de l'espace AB est égale à la vitesse que le même corps auroit acquis à la fin de la hauteur AD (*N.* 197.) & par la même raison la vitesse acquise par le corps *b* à la fin de l'espace *ab* est égale à la vitesse que le même corps auroit acquis à la fin de la hauteur *ad*; or les espaces AD, *ad* sont entr'eux comme *m* à 1, donc selon la loi de Galilée, les vitesses acquises à la fin de ces espaces sont comme $\sqrt{m}$ à $\sqrt{1}$, & par conséquent les vitesses acquises à la fin des espaces AB, *ab*, sont comme $\sqrt{m}$, $\sqrt{1}$; or si A & *b* s'étoient mûs avec des vitesses uniformes & égales aux moitiés de leur vitesses $\sqrt{m}$, $\sqrt{1}$, ils auroient parcouru dans les mêmes tems les espaces avec leur vitesses accelerées (*N.* 63.); & dans le mouvement uniforme les tems sont entr'eux en raison composée de la raison directe des espaces & de la raison réciproque des vitesses (*N.* 24.), donc les tems que les corps A, *a* auroient employés à parcourir les espaces AB, *ab* avec une vitesse uniforme, sont entr'eux en raison composée de *m* à 1, & de $\sqrt{1}$, $\sqrt{m}$; donc ils sont comme $m\sqrt{1}$, $\sqrt{m}$, mais ces tems sont les mêmes que ceux avec lesquelles les corps A, *a*, ont parcouru les mêmes espaces AB, *ab*, avec leur vitesses accelerées, donc les tems

employés à parcourir les espaces AB, *ab*, avec les vitesses accelerées sont aussi comme $m\sqrt{1}$ est à $\sqrt{m}$, ou comme m est à $\sqrt{m}$. Et il faut dire la même chose des tems employés à parcourir les espaces BC, *bc*, si le mouvement commençoit en B, *b*.

Mais comme nous supposons qu'il n'y a point de repos aux points B, *b*, il y a donc des vitesses acquises en B & *b*, lesquelles doivent être ajoutées aux vitesses que les corps auroient acquises en C, *c*, si leur mouvement avoit commencé en B, *b*, & il est visible que ces vitesses acquises en B, *b*, restent toujours les mêmes jusqu'en C, *c*, & qu'elles ne font que recevoir les augmentations de vitesses causées par le mouvement des corps de B en *b*, & de C en *c*; or les vitesses acquises en B, *b*, sont $\sqrt{m}$, $\sqrt{1}$, & comme elles sont uniformes jusqu'à la fin des espaces BC, *bc* les tems employés par les corps A, *a* à parcourir BC, *bc* avec ces vitesses uniformes sont donc encore comme m à $\sqrt{m}$, c'est-à-dire en raison composée de la raison directe des espaces m, 1, & de la réciproque des vitesses $\sqrt{1}$, $\sqrt{m}$.

Puis donc que les différens tems employés à parcourir les espaces ABC, *abc*, sont toujours comme m est à $\sqrt{m}$, il s'ensuit que le tems total employé à parcourir l'espace ABC est au tems total employé à parcourir l'espace *abc* comme m est à $\sqrt{m}$; mais $\sqrt{m}$ est moyen proportionnel entre m & 1, ainsi l'on a $:: m, \sqrt{m}, 1$, & par conséquent $m, \sqrt{m} :: \sqrt{m}, 1$; puis donc que les tems sont comme m, $\sqrt{m}$, ils sont aussi comme $\sqrt{m}$, $\sqrt{1}$, c'est-à-dire comme les racines quarrées des droites AB, *ab*, ou des longueurs ABC, *abc*, qui sont en même raison que AB, *ab*, donc, &c.

COROLLAIRE I.

206. Les hauteurs AR, *ar*, sont proportionnelles aux longueurs ABC, *abc*, donc les tems sont aussi entr'eux comme les racines quarrées de ces hauteurs.

COROLLAIRE II.

207. Deux courbes semblables étant composées d'une infinité de petits côtés semblables entr'eux, & qui sont comme autant de petits plans diversement inclinés mais semblablement posés, les tems que deux corps employent à les parcourir, sont donc aussi entr'eux comme les racines quarrées de ces courbes.

PROPOSITION. LXVII.

208. *Si un corps après être descendu par la force de sa pesanteur*

remonte avec la vitesse acquise à la fin de la chûte le long d'un plan incliné, son mouvement est uniformement retardé.

DEMONSTRATION.

Lorsque le corps remonte le long du plan incliné, sa pesanteur relative lui resiste autant qu'elle le pousseroit en le faisant descendre; or si cette pesanteur le faisoit descendre, elle lui communiqueroit à chaque instant des dégrés égaux de vitesse, donc en s'opposant au mouvement du corps contraire à sa direction, elle lui ôte à chaque instant un dégré de vitesse, & par conséquent le mouvement du corps est uniformement retardé.

COROLLAIRE I.

209. Et comme lorsque la pesanteur relative fait descendre le corps, les espaces parcourus dans des tems égaux sont comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. il s'ensuit que lorsque la pesanteur relative s'oppose au mouvement contraire à sa direction, le corps parcourt dans des tems égaux des espaces qui sont les mêmes nombres impairs pris en rétrogradant, c'est-à-dire comme 7, 5, 3, 1.

COROLLAIRE II.

210. De même comme le corps en descendant ne parcourt que la moitié de l'espace qu'il parcourroit d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise à la fin du dernier instant, de même aussi le corps en remontant ne parcourt que la moitié de l'espace qu'il parcourroit d'un mouvement uniforme avec la même vitesse acquise.

COROLLAIRE III.

211. Donc un corps qui remonte avec sa vitesse acquise à la fin de sa descente, remonte autant qu'il étoit descendu; ce qui est également vrai d'un corps qui remonte verticalement après être descendu verticalement.

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Du mouvement des Corps qui montent ou qui descendent le long des lignes courbes.

ON peut imaginer une infinité de différentes courbes, le long desquelles un corps grave descende selon telle loi que l'on voudra. J'en rapporterai quelques-unes dans ce Chapitre, & ce que j'en dirai fera voir de quelle maniere on doit résoudre les questions qu'on peut faire sur ce sujet.

PROPOSITION LXVIII.

212. *Trouver une courbe* GMB (Fig. 77.) *de telle nature qu'un corps qui viendra à la parcourir s'approche de l'horizon d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire que si l'on suppose que dans le premier instant le corps ait parcouru l'arc* GO, *& dans le second l'arc* OM, *les parties* GQ, QP *prises sur la ligne* AC *perpendiculaire à l'horizon* CB *soient égales entr'elles.*

SOLUTION.

Je mene les ordonnées PM, *pm* infiniment proches, & supposant que la hauteur dont le corps doit tomber soit la droite AC, je nomme $AP = x$, $PM = y$; donc $Pp = dx$, $mR = dy$, & M*m* pouvant être regardé comme une ligne droite qui est l'hypotenuse du triangle rectangle MR*m* est par conséquent $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Par la condition du Problême le tems de la descente le long de GM est au tems de la descente le long de M*m* comme AP est à P*p*, ainsi supposant que le tems de la descente le long de GM soit exprimé par AP, le tems de la descente le long de M*m* sera $Pp = dx$; le corps tombant de A en G & de G en M d'un mouvement uniformement acceleré a acquis une vitesse égale à la vitesse qu'il auroit acquise en P en descendant de A en P d'un mouvement uniformement acceleré (*N.* 200.), d'où il suit que cette vitesse est $\sqrt{x}$; or le petit arc M*m* étant infiniment petit, la vitesse pendant le mouvement de M en *m* peut être

regardée comme uniforme; mais dans le mouvement uniforme les espaces sont entr'eux comme les produits des tems par les vitesses (*N.* 17.) donc l'espace $Mm = dx\sqrt{x}$, mais nous avons deja $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $dx\sqrt{x} = \sqrt{dx^2+dy^2}$, & élevant tout au quarré, puis retranchant dx^2 de part & d'autre, puis tirant la racine quarrée, j'ai comme on voit par le calcul ci-joint $dx\sqrt{x-1} = dy$.

Pour tirer l'intégrale de cette Equation, je suppose l'indéterminée u égale à $x-1$, ainsi j'ai $u = x - 1$, donc $du = dx$, & mettant la valeur de $x-1$, & de dx l'équation différentielle de $dx\sqrt{x-1} = dy$, j'ai une autre équation dont l'intégrale étant élevée au quarré, donne $u^3 = \frac{9}{4}y^2$ qui est une Parabole dont le quarré de l'ordonnée y multiplié par $\frac{9}{4}$ est égal au cube de l'abscisse u.

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$xdx^2 = dx^2 + dy^2$$
$$xdx^2 - dx^2 = dy^2$$
$$dx\sqrt{x-1} = dy$$
$$u = x - 1$$
$$du = dx$$
$$du\sqrt{u} = dy, \text{ \& } u^{\frac{1}{2}}du = dy$$
$$\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = y$$
$$\tfrac{4}{9}u^3 = y^2, \text{ ou } u^3 = \tfrac{9}{4}y^2$$

Or la hauteur $AP = x$, & $u = x - 1$; donc le sommet de la Parabole est plus bas que le point A; ainsi si l'on veut que le corps descende le long de la courbe de la façon qu'il est proposé, il faut qu'il commence à tomber du point A.

Mais puisque l'abscisse $GP = u = x - 1$, & que $AP = x$, donc $AP - GP = x - x + 1 = 1 = AG$, & par conséquent le Parametre doit être $\frac{9}{4}AG$; nommant donc le Parametre $= p$, nous aurons $p = \frac{9}{4}AG$, ou $\frac{4}{9}p = AG$, c'est-à-dire que si avec un Parametre quelconque p, on décrit la parabole $u^3 = py^2$, la distance AG du point A d'où le corps doit descendre au sommet G de cette parabole doit être $\frac{4}{9}p$.

La courbe dont nous venons de parler est appellée *Isochrone* par quelques Auteurs.

REMARQUE.

213. Dans la solution de ce Problême nous avons supposé qu les corps graves descendent vers le centre de la terre selon loi de Galilée, & qu'en quelque point de la courbe que le cor vint à descendre librement, sa direction seroit toujours par lele à la droite AC qui est perpendiculaire à l'horizon; or la p

miere de ces ſuppoſitions n'eſt vraye qu'à l'égard des corps qui ne ſont pas extrémement éloignés de la ſurface de la terre, comme il a été dit en parlant de cette loi, & la ſeconde priſe dans la rigueur eſt abſolument fauſſe; car puiſque les corps tendent tous vers le centre de la terre, leur directions ſe rencontrent donc dans ce centre, & par conſéquent elle ne ſont point paralleles. Cependant comme les corps qu'on conſidere dans la Méchanique ne tombent point ſur la ſurface de la terre d'une hauteur extremement grande, & que les diſtances qu'ils ont entr'eux ſont ordinairement très mediocres, au lieu que la diſtance de la ſurface de la terre à ſon centre eſt très grande, il eſt sûr que les directions de ces corps peuvent paſſer pour paralleles à cauſe de l'angle extremement petit qu'elles ſont au centre de la terre. Puis donc que nos deux ſuppoſitions conviennent à l'objet de la Méchanique, nous les ſuivrons dans le reſte de ce Chapitre, mais ſur la fin nous réſoudrons ce même Problême en prenant d'autres loix d'acceleration & des directions non paralleles, & ce que nous en dirons ſuffira pour faire voir comment on doit réſoudre ces ſortes de queſtions.

PROPOSITION LXIX.

214. *Trouver une courbe de telle nature que ſi un corps vient à la parcourir, les tems qu'il employe à parcourir ſes différens arcs* GO, GM (Fig. 78.) *ſoient entr'eux comme telles puiſſances ou telles racines que l'on voudra des hauteurs correſpondantes* AQ, AP.

SOLUTION.

Soit AG la hauteur déterminée d'où le corps doit tomber, je mene les ordonnées PM, *pm*, infiniment proches, & nommant $AP = x$, $PM = y$, j'ai $Pp = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & ſuppoſant que l'expoſant de la puiſſance des hauteurs AQ, AP, &c. Soit $= 2$ je cherche la ſolution en cette ſorte.

Par la ſuppoſition le tems de la deſcente le long de GO eſt au tems de la deſcente le long de GM comme $\overline{AQ}^2$ eſt à $\overline{AP}^2 = x^2$, ainſi ſuppoſant que le tems de la deſcente le long de GO ſoit exprimé par $\overline{AQ}^2$, le tems de la deſcente le long de GM ſera $= x^2$, or le tems de la deſcente le long de M*m* étant la différence du tems employé le long de G*m* & du tems employé le long de GM, cette différence eſt égale à la différence du quarré de AP au quarré

de Ap ; mais le quarré de AP eſt $=x^2$, & Ap étant $x+dx$ ſon quarré eſt $x^2+2xdx+dx^2$, & par conſéquent la différence des quarrez eſt $2xdx+dx^2$, ou ſimplement $2xdx$, à cauſe que dx^2 eſt infiniment petit par rapport à $2xdx$, & peut n'être compté pour rien, ainſi le tems employé le long de Mm eſt $=2xdx$; or la viteſſe acquiſe en M eſt égale à la viteſſe que le corps auroit acquiſe en P en deſcendant le long de AP d'un mouvement acceleré (*N.* 200.) & ſelon la loi de Galilée, cette viteſſe eſt $\sqrt{AP}=\sqrt{x}$, donc la viteſſe en M eſt $=\sqrt{x}$; mais l'arc Mm étant infiniment petit, la viteſſe du corps le long de cet arc peut paſſer pour uniforme, & dans le mouvement uniforme, l'eſpace Mm eſt égal au produit du tems par la viteſſe, donc M$m=$ $2xdx\sqrt{x}$; mais nous avons M$m=\sqrt{dx^2+dy^2}$, donc $2xdx\sqrt{x}$ $=\sqrt{dx^2+dy^2}$, & élevant tout au quarré, puis retranchant dx^2 de part & d'autre, enſuite tirant la racine quarrée, & enfin tirant dx^2 hors du ſigne radical, j'ai comme on voit ici $dx\sqrt{4x^5-1}=dy$; donc $\int dx\sqrt{4x^5-1}=y$.

$$2xdx\sqrt{x}=\sqrt{dx^2+dy^2}$$
$$4x^5dx^2=dx^2+dy^2$$
$$4x^5dx-dx^2=dy^2$$
$$\sqrt{4x^5dx^2-dx^2}=dy$$
$$dx\sqrt{4x^5-1}=dy$$
$$\int dx\sqrt{4x^5-1}=y$$

On peut tirer l'integrale du premier membre, en le réduiſant en une ſerie infinie ſelon les regles que nous avons données dans le *Calcul Differentiel & Intégral*, ou bien en ſuppoſant que ce premier membre multiplié par une grandeur connue repreſente l'aire d'une courbe connue, parce qu'on peut toujours en approcher de bien près ſelon les regles de la Geometrie ordinaire.

Je multiplie d'abord ce premier membre par une grandeur arbitraire a, & l'on en va voir la raiſon ; ainſi j'ai $\int adx\sqrt{4x^5-1}$ pour l'aire de la courbe ; c'eſt pourquoi cette aire étant ſuppoſée connue, je n'aurai qu'à la diviſer par a, & j'aurai la valeur de y. L'aire de la courbe étant donc $\int adx\sqrt{4x^5-1}$, ſon élement eſt par conſéquent $adx\sqrt{4x^5-1}$, & ſuppoſant que les x repreſentent les abſciſſes de cette courbe, & qu'ils ſoient les mêmes que ceux de la courbe du Problême, ſi je diviſe cet élement par dx, le quotient $a\sqrt{4x^5-1}$ ſera l'ordonnée correſpondante ; nommant donc cette ordonnée z, j'ai $z=a\sqrt{4x^5-1}$.

Pour construire cette courbe je prens une ligne droite AF (*Fig.* 79.) égale à AC, que je divise en plusieurs parties égales entr'elles, & à la droite a, que je regarde comme l'unité, ensuite je suppose d'abord $z=0$, ce qui donne $a\sqrt{4x^5-1}=0$, & divisant par a puis élevant au quarré, j'ai $4x^5-1=0$; donc $4x^5=1$, $x^5=\frac{1}{4}$, & $x=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire que quand l'ordonnée $z=0$ le sommet de la courbe se trouve éloigné de A d'une quantité $AV=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$.

Je suppose $z=\infty$, c'est-à-dire z infiniment grande, ce qui donne $a\sqrt{4x^5-1}=\infty$; donc divisant par a, qui est une grandeur finie, j'ai encore $\sqrt{4x^5-1}=\infty$, & élevant au quarré puis donnant 1 qui est une grandeur finie, j'ai $4x^5=\infty$; enfin divisant par 4, & tirant la racine cinquiéme, j'ai encore $x=\infty$, car une grandeur étant infinie toutes ses racines le sont aussi, autrement la grandeur n'étant autre chose que le produit de sa racine multipliée par elle-même autant qu'il le faut pour être élevée à la puissance, il s'ensuivroit que le fini produiroit l'infini; puis donc que x est infini quand z est infini, la courbe n'a point d'asymptote.

Pour trouver les autres points de la courbe, je suppose $x=1$, ce qui donne $z=1\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$; ainsi quand l'abscisse $AB=1$, l'ordonnée $BX=\sqrt{2}$.

Je suppose $x=2$, ce qui donne $z=1\sqrt{4\times 32-1}=\sqrt{128-1}=\sqrt{127}$, ainsi quand l'abscisse $AC=2$ l'ordonnée $CL=\sqrt{127}$.

Je cherche de la même façon les ordonnées de la courbe correspondante aux abscisses AD, &c. & partageant ensuite chacune des parties égales AB, BC, CD, en deux parties égales, je cherche les ordonnées correspondantes aux points de division en supposant $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{5}{2}$, &c. & je continue de la même façon en coupant ensuite chacune de ces nouvelles parties en deux parties égales, &c.

Pour voir si la courbe passe de l'autre côté de l'axe, & vers quel endroit elle tourne, je suppose $z=-1$, ce qui donne $-1=a\sqrt{4x^5-1}$, & divisant par $a=1$, puis élevant tout au quarré j'ai $1=4x^5-1$, donc $\frac{1}{2}=x^5$, & $x=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$; ainsi quand $z=-1$, c'est-à dire, quand l'ordonnée de l'autre côté de l'axe est égale à 1, l'abscisse est $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$.

Je suppose $z=-2$, ce qui donne $-2=a\sqrt{4x^5-1}$, divisant donc par $a=1$, puis élevant tout au quarré, j'ai $4=4x^5$

— 1 ; donc $5=4x^5$, $\frac{5}{4}=x^5$, & $\sqrt[5]{\frac{5}{4}}=x$, ce qui fait voir que quand l'ordonnée eſt — 2 l'abſciſſe eſt $\sqrt[5]{\frac{5}{4}}$.

Et continuant de la même façon, je trouve autant de points de la courbe que je veux, & je vois que cette courbe prend ſa route vers K.

Maintenant pour décrire la courbe du Problême par le moyen de la courbe trouvée, je prens la hauteur donnée AC (*Fig.* 78.), que j'ai faite égale à AF (*Fig.* 79.) & la diviſant de la même façon, & ſuppoſant la quadrature de l'eſpace FVM, & de ſes parties VBX, VCL, &c. connue ; je fais ſur la droite AB $=a$ un rectangle ABZY égal à l'eſpace correſpondant VBX, & j'ai ABZV $=\int adx\sqrt{4x^5-1}$, & diviſant par AB $=a$, j'ai BZ $=\int dx\sqrt{4x^5-1}=y$, & par conſéquent BZ eſt une ordonnée de de la courbe.

Je fais de même ſur BC $=a$, un rectangle Bb égal à l'eſpace CAL, ce qui donne BC$ba=\int adx\sqrt{4x^5-1}$, & diviſant par a j'ai C$b=\int dx\sqrt{4x^5-1}=y$, donc Cb eſt une ordonnée de la courbe, & continuant de la même façon ſur toutes les diviſions de la ligne AF, je décris la courbe VZbt demandée, & ſi je voulois la décrire de l'autre côté de l'axe, j'agirois de la même façon en prenant les diviſions que les ordonnées de ce côté font ſur l'axe.

PROPOSITION LXX.

215. *Trouver une courbe* ABC (Fig. 80.) *de telle nature que ſi un corps grave vient à la parcourir, il ſe trouve toujours que les diſtances de ce corps à un point fixe* D, *ſoient proportionnelles aux tems qu'il employe à parcourir les arcs à l'extrémité deſquels il ſe trouve ; c'eſt-à-dire, que quand il aura parcouru les arcs* AB, AM, *ſes diſtances* BD, MD, *ſoient entr'elles comme les tems employés à parcourir ces arcs.*

SOLUTION.

Soit A le point d'où le corps doit commencer à deſcendre, & D le point fixe donné ſur la droite AH ; du point D pris pour centre & de l'intervale DA je décris un demi-cercle AF, je mene les ordonnées PM, pm infiniment proches, je tire du centre D les droites DM, Dm, & des points N, n les droites NQ, nq paralleles aux ordonnées PM, pm ; du centre D je décris le petit arc MR, du point n je mene nO perpendiculaire à NQ, enfin au point N je mene la tangente NT.

Je nomme DN = DA = DF = a, DQ = z, DM = t; donc mR = dt, Qq = nO = dz, & QN = $\sqrt{\overline{DP}^2 - \overline{DQ}^2} = \sqrt{a^2 - z^2}$.

La droite TN étant tangente, le triangle TND eſt rectangle & ſemblable aux triangles QND & QNT, leſquels ſont auſſi ſemblables au triangle nON, comparant donc enſemble les triangles QND, nON, j'ai NQ, DN :: nO, Nn ; donc $\sqrt{a^2 - z^2}$, a :: dz, $\frac{adz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ = Nn.

Or les ſecteurs ſemblables DNn, DMR donnent DN, Nn :: DM, MR, donc a, $\frac{adz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ :: t, $\frac{tdz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ = MR ; donc $\overline{MR}^2 = \frac{t^2 dz^2}{a^2 - z^2}$, mais $\overline{mR}^2 = dt^2$, donc dans le triangle rectangle MmR, j'ai $\overline{Mm}^2 = \frac{t^2 dz^2}{a^2 - z^2} + dt^2 = \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2}$.

Pour trouver une autre valeur de $\overline{Mm}^2$, j'obſerve que l'arc Mm étant infiniment petit, le mouvement du corps ſur cet arc peut paſſer pour uniforme ; or dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus ſont comme les produits des tems par la viteſſe (*N.* 17.) Prenant donc la viteſſe acquiſe en M qui eſt $\sqrt{AP}$ (*N.* 200.) & le tems employé à parcourir Mm qui eſt dt, j'ai l'eſpace Mm = $dt\sqrt{AP}$; or les triangles ſemblables QND, PMD donnent DN, DQ :: DM, DP, donc a, z :: t, $\frac{zt}{a}$ = DP, & par conſéquent AP = AD + DP = $a + \frac{zt}{a} = \frac{a^2 + zt}{a}$, M$m$ = $dt\sqrt{\frac{a^2+zt}{a}}$ & $\overline{Mm}^2 = \frac{a^2 dt^2 + ztdt^2}{a}$, ou bien en prenant a pour l'unité, j'ai $\overline{Mm}^2 = \frac{a^2 dt^2 + ztdt^2}{a^2}$; or j'ai trouvé $\overline{Mm}^2 = \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2}$, donc j'ai

$$\frac{a^2 dt^2 + ztdt^2}{a^2} = \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2}$$

$$a^4 dt^2 - a^2 z^2 dt^2 + a^2 ztdt^2 - z^3 tdt^2 = a^2 t^2 dz^2 + a^4 dt^2 - a^2 z^2 dt^2$$

$$a^2 ztdt^2 - z^3 tdt^2 = a^2 t^2 dz^2$$

$$dt \times \sqrt{a^2 zt - z^3 t} = atdz$$

$$dt \times \sqrt{a^2 z - z^3} = adz\sqrt{t}$$

$$dt \times \sqrt{a^3 z - az^3} = adz\sqrt{at}$$

$a^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{adz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$

$2a^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \int \frac{adz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$

$2a^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \int \frac{a^2dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$

Et réduiſant tout au même dénominateur, puis corrigeant l'expreſſion & tirant la racine quarrée ; enſuite tirant hors du ſigne dt^2, puis diviſant par $\sqrt{t}$, & multipliant par $\sqrt{a}$, enſuite diviſant tout par $\sqrt{at}$, & par $\sqrt{a^3z - az^3}$, enfin tirant l'intégrale, & multipliant tout par a, j'ai comme on voit ici $2a^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \int \frac{a^2dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$.

Il ne s'agit donc que de pouvoir tirer l'intégrale du ſecond membre de cette équation pour avoir la courbe demandée, car de tous les points de la demi-circonférence ANB menant par le centre D des indéterminées DB, DM, Dm, &c. je pourrai déterminer leur extrémités B, M, m, &c. ſi je trouve cette intégrale, puiſque cette intégrale me donnera une équation dans laquelle je pourrai toujours trouver la valeur de t correſpondante aux arcs Ab, AN, An, &c. de la demi-circonférence.

Pour cela, je n'ai qu'à réduire $\int \frac{a^2dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$ en une ſerie infinie ſelon les regles que j'ai données dans le *Calcul Différentiel & Integral*, &c. ou bien je n'ai qu'à ſuppoſer la quadrature d'une courbe qu'il s'agit d'abord de déterminer en cette ſorte.

Je multiplie $\int \frac{a^2dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$ par a, ce qui donne $\int \frac{a^3dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$ que je regarde comme l'aire de la courbe dont j'ai beſoin pour trouver la courbe du Problême, ainſi cette aire & ſes parties étant connues ou ſuppoſées connues, je n'aurai qu'à diviſer par a, & j'aurai la valeur de $2a^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}$, d'où je tirerai facilement la valeur de t.

Puis donc que $\int \frac{a^3dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$ eſt l'aire d'une courbe, il s'enſuit que $\frac{a^3dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$ eſt ſon élement, ainſi prenant les z pour les abſciſſes de cette courbe, & diviſant l'élement par dz, le quotient $\frac{a^3}{\sqrt{a^3z - az^3}}$ ſera l'expreſſion des ordonnées. Nommant donc chaque ordonnée u, nous aurons $u = \frac{a^3}{\sqrt{a^3z - az^3}}$.

Pour

Pour décrire cette courbe, je prens une droite AH (*Fig.* 81.) égale à la droite donnée AH, sur laquelle je prens AD égale à la distance AD du point donné D au point A, je fais DF $= DA = a$, & je divise DF d'abord en deux parties, puis en 4, &c. & je fais la même chose sur DA, & comme les abscisses de la courbe que je cherche sont les z, c'est-à-dire les abscisses prises de D vers F, les abscisses prises de D vers A seront les $-z$; je commence par les $+z$.

Je suppose donc d'abord $u = \infty$, ce qui donne $\frac{a^3}{\sqrt{a^3z - az^3}} = \infty$, mais quand une fraction est d'une valeur infinie, son dénominateur est égal à zero, donc $\sqrt{a^3z - az^3} = 0$, & élevant tout au quarré, puis donnant az^3 de part & d'autre, j'ai $a^3z = az^3$, & divisant par a puis par z, j'ai $aa = zz$, & par conséquent $z = a$, ce qui me fait voir que quand l'abscisse $AF = a$, l'ordonnée u ou Ff est infinie, & par conséquent cette ordonnée est l'asymptote de la courbe cherchée.

Je suppose $z = 0$, ce qui donne $u = \frac{a^3}{0} = \infty$, donc quand l'abscisse est nulle, l'ordonnée Dd est infinie, & par conséquent elle est encore asymptote de la courbe que je cherche; ainsi cette courbe est renfermée entre les deux lignes Ff, Dd.

Je suppose $z = \frac{1}{2}a$, ou $z = \frac{1}{2}$, en faisant $a = 1$, & j'ai $u = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}}$, donc quand $z = \frac{1}{2}DF$, l'ordonnée est $= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}a}}$.

Je suppose de même $z = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{5}$, &c. & $z = \frac{3}{4}$, $z = \frac{3}{5}$, &c. & je trouve autant de points de la courbe, & aussi près que je veux; faisant donc passer par tous ces points une courbe, j'ai MNP qui est la courbe cherchée.

Pour trouver l'ordonnée la moins longue de cette courbe, je prens la différence de l'équation $u = \frac{a^3}{\sqrt{a^3z - az^3}}$, laquelle est $du = -\frac{1}{2}a^3 \times \overline{a^3dz - 3az^2dz} \times \overline{a^3z - az^3}^{-\frac{3}{2}}$, & selon les regles des plus grandes & des moindres quantités que j'ai données dans le *Calcul Différentiel & Intégral*, &c. je fais $du = 0$, ce qui donne $-\frac{1}{2}a^3 \times \overline{a^3dz - 3az^2dz} \times \overline{a^3z - az^3}^{-\frac{3}{2}} = 0$; divisant donc par $-\frac{1}{2}a^3 \times \overline{a^3z - az^3}^{-\frac{3}{2}}$, & donnant de part & d'autre $3az^2dz$, puis divisant par dz, j'ai $a^3 = 3az^2$, & divisant par $3a$, puis tirant la racine quarrée j'ai $z = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$, c'est-à-dire que

quand l'abſciſſe eſt $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$, l'ordonnée correſpondante eſt la moindre ordonnée de la courbe cherchée.

Pour voir s'il n'y auroit pas une autre courbe dans l'angle AD*d* dans lequel les abſciſſes ſont $-z$, je ſuppoſe $-z=a=1$, ou $z=-1$, ce qui donne $u=\frac{1}{\sqrt{-1-1}}=\frac{1}{\sqrt{-2}}$, & comme $\sqrt{-2}$ eſt une grandeur imaginaire, je trouve que l'abſciſſe ne ſçauroit être -1.

Je ſuppoſe de même $-z=\frac{1}{2}$, ou $z=-\frac{1}{2}$, ce qui donne $u=\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}=\frac{1}{\sqrt{-\frac{5}{8}}}$, & comme cette valeur eſt encore imaginaire, & que je trouve toujours des ſemblables valeurs en ſuppoſant $z=-\frac{1}{4}$, $z=-\frac{1}{5}$, &c. je vois par-là qu'il n'y a point de courbe dans l'angle AD*d*, & il ne ſçauroit y en avoir non plus dans l'angle AD3, à cauſe que les abſciſſes ſeroient les $-z$.

Pour voir s'il n'y a pas une autre courbe dans l'angle 3DH où les ordonnées ſont les $-u$, je fais d'abord $-u=\infty$, ce qui donne $-\frac{a^3}{\sqrt{a^3z-az^3}}=\infty$; or quand une fraction eſt d'une valeur infinie, ſon dénominateur eſt égal à zero, donc $\sqrt{a^3z-az^3}=0$, & élevant tout au quarré, puis donnant de part & d'autre az^3, j'ai $a^3z=az^3$, & diviſant par a, enſuite par z, j'ai $a^2=z^2$, & $z=a$, ce qui me fait voir que la droite F*f* étant continue de l'autre côté de l'axe eſt l'aſymptote de la courbe qui eſt de ce côté là.

Je ſuppoſe $z=0$, ce qui donne $-\frac{a^3}{\sqrt{a^3z-az^3}}=-\frac{a^3}{0}=-u$; ainſi quand l'abſciſſe eſt nulle, l'ordonnée D3 eſt auſſi infinie, & par conſéquent elle eſt l'aſymptote de la courbe de ce côté là.

Je ſuppoſe $z=\frac{1}{2}$, ce qui donne $-u=-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}}$, ainſi quand z eſt $=\frac{1}{2}$, l'ordonnée dans l'angle 3DH eſt $\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}}$, de même que l'ordonnée dans l'angle *d*DH.

Et comme en faiſant $z=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{4}$, &c. je trouve que les ordonnées dans l'angle 3DH ſont toujours les mêmes que les ordonnées dans l'angle *d*DH, je vois que les deux courbes ſont égales & poſées de la même façon dans chacun de ces angles, ainſi la premiere étant décrite la ſeconde ſe décrit facilement.

Maintenant pour trouver la courbe que le Problême demande par le moyen de cette courbe, dont je ſuppoſe que la quadrature eſt connue de même que celle de ſes parties; je fais ſur la ligne

$AD = a$ un rectangle $Aa4D$ égal à la partie DQNMd de l'aire de la courbe, ainsi j'ai $Aa4D = \int \frac{a^3 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$, & divisant ce rectangle par AD, j'ai $D4 = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}} = 2a^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}$, ainsi qu'on a vû ci-dessus; je fais le quarré de D4, ce qui donne $\overline{D4}^2 = 4at$, c'est-à-dire, le quarré de D4 est égal à un rectangle dont l'un des côtés seroit $= 4a = 4AD$, & l'autre seroit $= t$; je fais donc sur le côté 4AD un rectangle égal à $\overline{D4}^2$, & l'autre côté de ce rectangle est par conséquent $= t$. Du point D par le point n ou le demi-cercle AnF coupe QN, je mene l'indéfinie DZ & prenant sur DZ la partie DX égale à la valeur de t que je viens de trouver, le point X est un point de la courbe que le Problême demande.

Je fais la même chose à l'égard des autres parties de l'aire DdMNPfF coupées du côté de Dd par les ordonnées menées des points de division de la droite DF, & je trouve autant de points que je veux de la courbe demandée; & comme en D il n'y a plus d'aire, il s'ensuit que la courbe DXV qu'on demande passe par le point donné D, & non pas par le point A (*Fig.* 80), & que le corps qui doit la parcourir pour faire l'effet qu'on demande, doit auparavant descendre de la hauteur AD.

On voit bien que la courbe DXV passant dans l'angle 3DH, est posée dans cet angle, de même qu'elle seroit posée dans l'angle dDH.

La courbe que nous venons de décrire est appellée par quelques Auteurs *Courbe Isocrone Paracentrique*.

Au reste pour sçavoir si l'espace dDFfPNM peut se quarrer, il n'y a qu'à faire attention à son équation $u = \frac{a^3}{\sqrt{a^3 z - az^3}} = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - z^2} \times \sqrt{az}}$, car nous verrons que le second membre est formé par deux analogies dont l'une est $\sqrt{az}, a :: a, \frac{a^2}{\sqrt{az}}$, & la seconde est $\sqrt{a^2 - z^2}, \frac{a^2}{\sqrt{az}} :: a, \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - z^2} \times \sqrt{az}}$; or $\sqrt{az}$ est l'ordonnée d'une parabole quarrée dont l'abscisse seroit z, & le parametre $= a$, car nommant l'ordonnée $= m$, on auroit $m^2 = az$, & $m = \sqrt{az}$; de même $\frac{a^2}{\sqrt{az}}$ étant une troisiéme proportionnelle à $\sqrt{az}$ & à a, est par conséquent l'élement d'un espace asymptoti-

que d'une hyperbole du second genre, ainsi que nous l'avons démontré dans *la Mesure des Surfaces & des Solides*, où j'ai fait voir que si l'on prend des troisiémes proportionnelles aux élemens d'une parabole & à ceux d'un rectangle, lesquels sont tous égaux entr'eux, ces troisiémes proportionnelles forment un espace hyperbolique entre les asymptotes. Enfin $\sqrt{a^2 - z^2}$ est l'ordonnée d'un quart de cercle dont le rayon $= a$, & dont l'abscisse est prise du centre; ainsi puisque nous avons $\sqrt{a^2 - z^2}, \frac{a^2}{\sqrt{az}} :: a, \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - z^2} \times \sqrt{az}}$, il s'ensuit que les élemens de l'espace dDFfPNM sont aux élemens d'un quarré dont le côté seroit $= a$, comme les élemens d'un espace hyperbolique du second genre qui auroit pour hauteur la droite $= a$, sont aux élemens d'un quart de cercle, dont le rayon est $= a$; or le rapport des élemens de l'espace hyperbolique aux élemens du quart de cercle est inconnu, donc le rapport des élemens de l'espace dDFfPNM aux élemens du quarré de a est aussi inconnu, & par conséquent il n'est guere possible de trouver la quadrature de cet espace.

Mais à quoi sert donc cet appareil de construction que j'ai fait pour la solution du Problême? Si on le demande, voici la réponse? Cet appareil ne sert à rien pour la question présente, & l'on auroit même mieux fait de la resoudre en reduisant l'équation $\frac{\int a^2 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}} = y$, est une serie infinie, mais comme il arrive souvent que ces sortes de constructions sont très-utiles en bien d'occasions, & que d'ailleurs elles conservent cet esprit geométrique que les series ne donnent pas, attendu qu'elles appartiennent purement au calcul; j'ai été bien aise de rapporter cette construction pour faire voir jusqu'où on pouvoit pousser la Geométrie dans ces sortes de Problêmes.

PROPOSITION LXXI.

216. *Trouver le tems qu'un corps employe à parcourir la concavité d'une courbe.*

SOLUTION.

Soit AP (*Fig.* 82.) la hauteur de la descente le long de l'arc AM, je mene pm infiniment proche de PM, & nommant AP $= x$, PM $= y$, j'ai P$p = dx$, mR $= dy$ & M$m = \sqrt{dx^2 + dy^2}$;

je nomme t le tems de la descente le long de l'arc AM, ainsi dt sera le tems de la descente le long de l'arc infiniment petit Mm.

Maintenant la vitesse acquise en M étant la même que la vitesse acquise en P est $\sqrt{x}$; or l'arc Mm étant infiniment petit, la vitesse acquise en M peut passer pour uniforme le long de l'arc Mm, & dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru est comme le tems multiplié par la vitesse (*N.* 17.) donc $Mm = dt\sqrt{x}$, mais nous avons $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $dt\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$.

Pour trouver l'integrale de dt, il faut chercher une valeur de dy en dx par le moyen de l'équation de la courbe dont il s'agit, en cette sorte.

Soit la courbe AM une parabole dont le parametre $= a = 1$, son équation sera par conséquent $xx = ay$, donc $2xdx = ady$ & $dy = \frac{2xdx}{a}$; $dy^2 = \frac{4x^2dx^2}{a^2}$, mettant donc cette valeur de dy^2 dans $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$, j'ai $dt = \frac{\sqrt{dx^2}}{\sqrt{x}} + \frac{4x^2dx^2}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2dx^2 + 4x^2dx^2}}{\sqrt{a^2x}}$ $= \frac{dx\sqrt{a^2 + 4x^2}}{\sqrt{a^2x}}$, donc $t = \int \frac{dx\sqrt{a^2 + 4x^2}}{\sqrt{a^2x}}$.

Il ne s'agit donc que de tirer l'integrale du second membre de cette équation, ce qu'on peut faire, ou en le reduisant en une serie infinie, ou en employant la méthode dont je me suis servi dans la Proposition précédente; mais comme l'un & l'autre de ces moyens sont très-longs, voyons si l'équation ne nous fournira pas quelque voye plus courte & plus facile.

J'observe donc qu'en prenant a pour l'unité, l'équation se reduit à $t = \int \frac{dx\sqrt{1 + 4x^2}}{\sqrt{x}}$; or en multipliant $\int \frac{dx\sqrt{1 + 4x^2}}{\sqrt{x}}$ par 1, & regardant ensuite le produit comme l'aire d'une courbe dont la quadrature étant divisée par 1, nous fera trouver ce que nous cherchons, ainsi que j'ai dit dans la Proposition précédente, il est sûr que l'élement de cette courbe est $\frac{dx\sqrt{1 + 4x^2}}{\sqrt{x}}$, & son ordonnée $\frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{\sqrt{x}}$; & cette expression est le quatriéme terme de cette proportion $\sqrt{x}, 1 :: \sqrt{1 + 4x^2}, \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{\sqrt{x}}$.

Maintenant le premier terme $\sqrt{x}$ de cette proportion est l'or-

donnée TS (*Fig.* 83.) dune parabole OST dont le parametre $= a$ $= 1$, car par la nature de cette parabole on a $\overline{TS}^2 = ax = x$, & par conſéquent $TS = \sqrt{ax} = \sqrt{x}$; de même le troiſiéme terme $\sqrt{1+4x^2}$ eſt l'ordonnée PX au ſecond axe d'une hyperbole équilatere OX, dont l'axe eſt $= 2a = 2$, en ſuppoſant que l'abſciſſe HP priſe du centre H ſoit toujours $2x$, c'eſt-à-dire double de l'abſciſſe $OT = x$ de la parabole OS, car par la proprieté de cette hyperbole on a $\overline{PX}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{HO}^2 = \overline{4x^2+1}$, & par conſéquent $PX = \sqrt{1+4x^2}$; puis donc que l'ordonnée $\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}}$ de la courbe que je cherche eſt quatriéme proportionnelle à $\sqrt{x}$, 1, $\sqrt{1+4x^2}$, ſi je prens une quatriéme proportionnelle TN à TS, OH, XP, le point N ſera un point de la courbe cherchée & je trouverai tous les autres points de cette courbe de la même façon.

Il eſt viſible que cette courbe a pour aſymptote la tangente O*o* au ſommet de la parabole, car en ce point l'ordonnée de la parabole eſt zero, & l'ordonnée à l'hyperbole eſt HO, donc la proportion devient alors *o*, HO, HO, $\frac{\overline{HO}^2}{o} = \infty$, & par conſéquent l'ordonnée O*o* eſt infinie.

Pour trouver donc par le moyen de cette courbe le tems t de la deſcente du corps grave le long de la concavité de la parabole AM (*Fig.* 82.) je coupe ſur l'axe de la courbe la partie OT (*Fig.* 83.) égale à la hauteur AP (*Fig.* 82.) je fais ſur HO (*Fig.* 83.) un rectangle HO*oh* égal à l'aire OTN*uo*, ce qui donne HO*oh* $= \int \frac{dx\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}} = \int \frac{adx\sqrt{a^2+4x^2}}{\sqrt{a^2x}}$, & diviſant par $HO = 1 = a$, j'ai $Oo = \int \frac{dx\sqrt{a^2+4x^2}}{\sqrt{a^2x}} = t$, c'eſt-à-dire O*o* exprime le rapport du tems de la deſcente le long de AM, & je trouverois de même les tems de la deſcente le long des arcs AX, AV (*Fig.* 82.) en menant les ordonnées *x*X, *u*V, puis tranſportant les hauteurs A*x*, A*u*, ſur OT (*Fig.* 83.) de O en *x*, & de O en *y*, puis menant les ordonnées *x*E, *y*F, & faiſant enſuite ſur HO des rectangles égaux aux aires O*x*E*uo*, O*y*F*uo*, je diviſerois chacun de ces rectangles par HO, & les quotiens O4, O3, &c. marqueroient les rapports des tems pendant la deſcente le long des arcs AX, AV, &c. (*Fig.* 82.) de ſorte que l'un de ces tems étant connu par l'expérience ou autrement, tous les autres ſeront auſſi connus puiſqu'on connoît leurs rapports.

Soit la courbe AN (*Fig.* 84.) un quart de circonférence dont le rayon NO égal à la hauteur $An = a$; soit $AP = OL = x$, donc $Pp = Ll = RM = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; or par la propriété du cercle, j'ai $\overline{ML}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OL}^2 = \overline{An}^2 - \overline{AP}^2 = a^2 - x^2$, donc $ML = \sqrt{a^2 - x^2}$; je tire le rayon $MO = An = a$, & la tangente MS; l'angle OMS est droit de même que l'angle MLO du triangle rectangle MLO, ainsi l'angle OMS est égal aux deux angles LMO, LOM pris ensemble, ôtant donc de part & d'autre l'angle LMO, il reste l'angle LMS ou RmM, son alterne égal à l'angle LOM, donc les deux triangles rectangles LMO, mRM ayant un angle aigu égal à un angle aigu sont semblables, & par conséquent LM, MO :: MR, mM, ou $\sqrt{a^2 - x^2}$, a, dx, $\frac{adx}{\sqrt{x^2 - x^2}} = Mm$; mais le tems de la descente le long de Mm, c'est-à-dire, dt est égal à $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$, mettant donc au lieu de $\sqrt{dx^2 + dy^2} = Mm$, sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, j'ai $dt = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2} \times \sqrt{x}}$, & en supposant $a = 1$, j'ai $dt = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2} \times \sqrt{ax}} = \frac{adx}{\sqrt{a^3 x - x^3}}$, & par conséquent $t = \int \frac{adx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$.

Ainsi il ne s'agit que de trouver l'integrale de $\int \frac{adx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ pour avoir la valeur de t; or cette integrale est la même que nous avons cherchée dans la Proposition 70. (*N.* 215.), ainsi on la trouvera de la même façon.

Ou bien comme après avoir multiplié par a ce qui donne $\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ ou $\int \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ à cause de $a = 1$, nous avons fait observer que l'élement $\frac{a^3}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ étoit le quatriéme terme d'une proportion $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{a^2}{\sqrt{ax}}$ :: a $\frac{a^3}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$, & que le premier terme est l'élement d'un quart de cercle, dont le rayon $= a$, & le second l'élement d'un espace hyperbolique du second genre dont la hauteur seroit $= a$, il s'ensuit qu'en prenant des quatriémes proportionnelles aux élemens du quart de cercle, à ceux de l'espace hyperbolique, & à ceux d'un quarré aa, ces quatriémes propor-

tionnelles formeront l'aire $\int \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$, ainſi on aura la courbe dont la quadrature donnera ce qu'on cherche, & on achevera le reſte comme ci-deſſus.

Soit l'arc AM (*Fig.* 85.) un arc de demi-cycloïde AMD, dont le demi-cercle générateur eſt aQD; je nomme DN $=$ HP $= x$, & aD $=$ AH $= a$, donc aN $=$ AP $= a - x$; or par la proprieté du cercle j'ai $\overline{QN}^2 = a\text{N} \times \text{ND}$, donc $\overline{QN}^2 = ax - xx$, de même, j'ai DN, QD :: QD, Da ou DN $\times$ D$a = \overline{QD}^2$, donc $ax = \overline{QD}^2$, & QD $= \sqrt{ax}$; or par la proprieté de la cycloïde la tangente MT au point M eſt parallele à QD, donc les triangles rectangles QND, mRM ſont ſemblables, & donnent ND, QD :: MR, Mm; or MR $=$ Nn $= dx$, donc x, $\sqrt{ax}$ :: dx, $\frac{dx\sqrt{ax}}{x} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} =$ Mm.

Or la viteſſe acquiſe à la fin de AM étant la même que la viteſſe acquiſe à la fin de AP $= a - x$ (*N.* 200.) elle eſt par conſéquent $\sqrt{a-x}$, & comme on peut la regarder comme uniforme pendant la deſcente le long de l'arc infiniment petit Mm, l'eſpace Mm eſt comme le produit de la viteſſe $\sqrt{a-x}$ multipliée par le tems employé à le parcourir, c'eſt-à-dire par dt (*N.* 17.), donc M$m = dt \times \sqrt{a-x}$, mais nous avons M$m = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, donc $\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = dt \times \sqrt{a-x}$, d'où je tire $dt = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{ax-xx}}$, & multipliant le numerateur & le dénominateur par a, j'ai $dt = \frac{adx\sqrt{a}}{a\sqrt{ax-x^2}} = \frac{\sqrt{a} \times adx}{a \times \sqrt{ax-x^2}}$, & par conſéquent $t = \frac{\sqrt{a}}{a} \times \int \frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

Mais $\int \frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}}$ eſt double de l'arc aQ; car menant la droite QV au centre V, & la tangente QS l'angle droit SQV vaut les deux angles aigus NQV, NVQ du triangle rectangle NVQ; ôtant donc de part & d'autre l'angle NQV, il reſte l'angle aigu SQN, ou Qqr ſon alterne égal à l'angle aigu NVQ; ainſi les deux triangles rectangles QNV, Qrq étant ſemblables, donnent QN, QV :: Qr, Qq, ou $\sqrt{ax-x^2}$, $\frac{1}{2}a$ :: dx, $\frac{adx}{2\sqrt{ax-x^2}} =$ Qq, donc aQ $= \int \frac{adx}{2\sqrt{ax-x^2}}$, & par conſéquent $2a$Q $= \int \frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

De

De même $\sqrt{a} = \sqrt{aD}$, & $a = aD$; donc $t = \frac{\sqrt{a}}{a} \times \int \frac{adx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{\sqrt{aD}}{aD} \times 2aQ = \frac{2\sqrt{aD}}{aD}\, aQ$; or $2\sqrt{aD} = \frac{2\sqrt{aD} \times \sqrt{aD}}{\sqrt{aD}} = \frac{2aD}{\sqrt{aD}} = \frac{aD}{\frac{1}{2}\sqrt{aD}}$, & $\frac{1}{2}\sqrt{aD}$ eſt la moitié de la viteſſe acquiſe à la fin de aD, c'eſt-à-dire acquiſe en D, & ſi le mouvement étoit uniforme, le corps parcoureroit avec la viteſſe acquiſe $\frac{1}{2}\sqrt{aD}$ le diametre aD dans un tems égal à celui qu'il employeroit à le parcourir avec ſon mouvement acceleré; nommant donc ce tems T, nous aurions l'eſpace $aD = T \times \frac{1}{2}\sqrt{aD}$ (*N.* 17.), & par conſéquent $T = \frac{aD}{\frac{1}{2}\sqrt{aD}} = 2\sqrt{aD}$; puis donc que nous avons $t = \frac{2\sqrt{aD}}{aD} \times aQ$, ce qui donne $t, 2\sqrt{aD} :: aQ, aD$, il s'enſuit que le tems employé à parcourir l'arc AM eſt au tems que le corps employeroit à parcourir le diametre du cercle générateur comme l'arc aQ eſt au même diametre.

Quand aQ devient égal à la demi-circonférence aQD, on a $t = \frac{2\sqrt{aD}}{aD} \times aQD$, c'eſt-à-dire le tems employé à parcourir la demi-cycloïde eſt au tems employé à parcourir le diametre comme la demi-circonférence du cercle générateur au diametre.

PROPOSITION LXXII.

217. *Trouver le tems qu'un corps employe à parcourir la convexité d'une courbe.*

SOLUTION.

Soit AP (*Fig.* 86.) la hauteur de la deſcente le long de l'arc AM; je nomme $AP = x$, $PM = y$, & menant l'ordonnée infiniment proche pm, j'ai $Pp = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. La viteſſe acquiſe en M ou en P eſt donc $\sqrt{x}$, & cette viteſſe pouvant être regardée comme uniforme pendant la deſcente de l'arc infiniment petit Mm, cet arc eſt par conſéquent le produit de la viteſſe $\sqrt{x}$ par le tems employé à le parcourir; ainſi nommant t le tems employé à parcourir AM, nous aurons dt pour le tems employé à parcourir Mm, & par conſéquent $Mm = dt\sqrt{x}$, mais $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$, & $t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$.

Pour trouver cet intégrale, il faut d'abord prendre dans l'é-

quation de la courbe dont il s'agit, la valeur de dy en dx en cette ſorte.

Soit AM une parabole dont le parametre $= a$, ſon équation ſera $y^2 = ax$, donc $2ydy = adx$, $dy = \frac{adx}{2y}$, & $dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4yy}$; Or $yy = ax$, & $4yy = 4ax$, donc $dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4ax}$; ainſi mettant cette valeur de dy^2 dans celle de t, j'ai $t = \int \frac{\sqrt{4axdx^2 + a^2dx^2}}{\sqrt{4ax} \times \sqrt{x}} = \int \frac{dx\sqrt{4ax + a^2}}{\sqrt{4ax} \times \sqrt{x}} = \int \frac{dx\sqrt{4ax + a^2}}{2x\sqrt{a}} = \int \frac{dx\sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}}$.

Pour trouver l'intégrale du ſecond membre je le multiplie par a, ce qui donne $\int \frac{adx\sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}}$, & je regarde ce produit comme l'aire d'une courbe, laquelle étant décrite, & ſon eſpace étant diviſé par a, le quotient ſera la valeur de t.

Or puiſque a eſt pris pour l'unité l'aire de la courbe que je cherche ſe réduit à $\int \frac{dx\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x}$; ainſi ſon élement eſt $\frac{dx\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x}$, & ſon ordonnée $\frac{\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x} = u$.

Je ſuppoſe d'abord $u = 0$, ce qui donne $\frac{\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x} = 0$; Or quand une fraction eſt égale à zero, ſon dénominateur eſt infiniment grand, donc $x = \infty$; ainſi prenant le ſommet A de la parabole donnée pour l'origine des abſciſſes de la courbe que je cherche, je vois que le diametre AP étant plongé à l'infini vers E ſera l'aſymptote de la courbe.

Je ſuppoſe $u = \infty$, ce qui donne $\frac{\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x} = \infty$; or quand une fraction eſt infinie, ſon dénominateur eſt infiniment petit; donc $x = 0$; d'où il ſuit que la tangente AH au ſommet A de la parabole, ſera auſſi aſymptote de la courbe, puiſqu'en a nous avons $x = 0$, & $u = \infty$.

Je porte le parametre a de la parabole ſur AE pluſieurs fois de A en B, de B en C, &c. & ſuppoſant $x = \text{B} = a = 1$, j'ai $u = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}}{1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; ainſi menant l'ordonnée Bb que je fais $= \frac{1}{2}\sqrt{5}$, le point b eſt un point de la courbe.

Je ſuppoſe $x = \text{AC} = 2$, ce qui donne $u = \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{4}}}{2}$, ou $u^2 =$

$\frac{2+\frac{1}{4}}{4} = \frac{9}{16}$, donc $u = \frac{3}{4}$; faisant donc $Cc = \frac{3}{4}$, le point c est un point de la courbe.

Je suppose $x = 3$, ce qui donne $u = \frac{\sqrt{3+\frac{1}{4}}}{3}$, ou $u^2 = \frac{3+\frac{1}{4}}{9}$ $= \frac{13}{36}$, donc $u = \sqrt{\frac{13}{36}}$; faisant donc $Ee = \sqrt{\frac{13}{36}}$, le point e est un point de la courbe.

Je coupe les droites AB, BC, CE, &c. chacune en deux parties égales, & faisant successivement $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{2}$, &c. je trouve autant d'autres points de la courbe, & continuant de même, j'en trouverois autant que je voudrois & aussi près que je jugerois à propos.

J'aurois pû trouver la même courbe d'une autre façon ; car l'équation étant $u = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}$, j'observe que le second membre est le quatriéme terme d'une proportion x, $\sqrt{x+\frac{1}{4}} :: 1, \frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}$, or le premier terme x est l'abscisse de la parabole donnée, le troisiéme 1 est son parametre, & le second $\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ est l'ordonnée XP d'une parabole VX dont le Parametre est aussi $= 1$, mais dont le sommet V est éloigné du sommet A d'une quantité AV $= \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}$; car il est visible que $VP = AP + AV = x + \frac{1}{4}$; or par la proprieté de la parabole nous avons $\overline{PX}^2 = \overline{AP+AV} \times a$ $= ax + \frac{1}{4}a = x + \frac{1}{4}$, donc $PX = \sqrt{x+\frac{1}{4}}$; ainsi prenant une quatriéme proportionnelle à AP au parametre & à l'ordonnée PX, cette quatriéme proportionnelle PQ étant portée sur PM, le point Q sera un point de la courbe, & continuant à prendre des quatriémes proportionnelles aux abscisses de la Parabole AM, au parametre & aux ordonnées de la parabole VX correspondantes aux abscisses de la parabole AM, & portant ces quatriémes proportionnelles sur les ordonnées correspondantes de la parabole AM, on trouvera tous les points de la courbe cherchée.

Il est visible que cette courbe sera la même que la courbe $ecQbu$ que nous venons de décrire, car l'abscisse de la parabole AM étant nulle en A, & l'ordonnée correspondante Aa de la parabole VX n'étant pas nulle, on aura o, a :: Aa, $\frac{a \times Aa}{o} =$ AH, & par conséquent AH sera infinie, de même les ordonnées de la parabole AMqui sont au-dessous de AB $= a$, deviennent tou-

jours moindres de plus en plus par rapport à leurs abſciſſes ; car c'eſt là une proprieté de la parabole qui eſt aiſée à découvrir, comme on verra bientôt ; or les ordonnées correſpondantes de la parabole VX, quoique plus grandes que celles de la parabole AM, deviendront enfin moindres que les abſciſſes correſpondantes de AM, à cauſe que les abſciſſes de AM ne ſont jamais moindres que les abſciſſes de VX que d'une quantité conſtante qui eſt $\frac{1}{4}a$; ainſi les abſciſſes de AM deviendront de plus en plus grandes par rapport aux ordonnées de VX, de ſorte qu'à l'infini, l'ordonnée quoi qu'infiniment grande en elle-même, ſera cependant infiniment petite par rapport à l'abſciſſe ; ainſi la proportion $x, a :: \sqrt{x+\frac{1}{4}}, \frac{a\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}$ ou $x, \sqrt{x+\frac{1}{4}} :: 1, \frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}$ ſe changera $x, o :: 1, \frac{o \times 1}{x}$, & par conſéquent $\frac{o \times 1}{x}$, c'eſt-à-dire ; l'ordonnée de la courbe ſera infiniment petite, & comme cela n'arrivera qu'à l'infini, il s'enſuit que l'axe AE eſt l'aſymptote de la courbe, de même que nous l'avons trouvé par l'autre méthode.

Maintenant pour trouver le tems de la deſcente d'un corps grave le long de l'arc AM, en ſuppoſant la quadrature de la courbe que nous venons de trouver, je fais ſur le parametre AB de la parabole un rectangle ABIL égal à l'aire PQuHA, ce qui donne ABIS$=\int\frac{adx\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}=\int\frac{adx\sqrt{ax+\frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}}$, & diviſant par a j'ai AI $=\int\frac{dx\sqrt{ax+\frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}}=t$, & par conſéquent AI exprime le tems de la deſcente le long de l'arc AM, & je trouverois de la même façon le rapport des tems le long des autres arcs.

Soit la courbe AM (*Fig.* 87.) un arc de cycloïde dont le demi-cercle générateur eſt ANB ; je nomme AB$=a$, AP$=x$, donc BP$=a-x$, & Pp=Nr=MR$=dx$; or par la proprieté du cercle, j'ai NP$=\sqrt{\text{AP}\times\text{PB}}$, donc NP$=\sqrt{ax-x^2}$, & parce que AP, AN :: AN, AB, j'ai $\overline{\text{AN}}^2=\text{AP}\times\text{AB}=ax$, donc AN$=\sqrt{ax}$; je mene du point M la tangente ST à la cycloïde, & par la proprieté de cette courbe ST eſt parallele à AN ; donc les triangles rectangles PAN, RMm ſont ſemblables, & donnent AP, AN :: MR, Mm ou $x, \sqrt{ax} :: dx, \frac{dx\sqrt{ax}}{x}$ = Mm.

Or la viteſſe en M étant la même que la viteſſe en P eſt $\sqrt{x}$, &

cette viteſſe pouvant être regardée comme uniforme pendant la deſcente le long de l'arc Mm, cet arc eſt donc M$m = dt\sqrt{x}$ $= \frac{dx\sqrt{ax}}{x}$, d'où je tire $dt = \frac{dx\sqrt{ax}}{x\sqrt{x}}$, & ſuppoſant $a = 1$, j'ai $dt = \frac{dx}{x}$, ainſi $t = \int \frac{dx}{x}$.

Pour trouver l'integrale du ſecond membre, je décris une hyperbole équilatere SOZ (*Fig.* 88.) dont la puiſſance O$o = a$, & prenant ſur l'aſymptote AH une abſciſſe AP égale à AP (*Fig.* 87.), je mene l'ordonnée PS (*Fig.* 88.), ainſi j'ai AP × PS $= \overline{\text{O}o}^2$, donc PS $= \frac{\overline{\text{O}o}^2}{\text{AP}} = \frac{aa}{x}$, je mene l'ordonnée infiniment proche ps, ce qui donne P$p = dx$, donc PS$sp = \frac{aadx}{x}$, ainſi l'eſpace hyperbolique AVuPS $= \int \frac{aadx}{x}$ ou $\int \frac{dx}{x}$, & diviſant par $a = 1$, j'ai $\int \frac{dx}{x} = t$.

Si je diviſe la hauteur AB en petites parties (*Fig.* 87.), & que des points de diviſion je mene des ordonnées à la cycloïde, j'aurai différens arcs At, AM, AV, &c. & tranſportant leurs abſciſſes ſur Ao (*Fig.* 88.) j'aurai autant d'eſpaces hyperboliques ARruV, APSuV, AQquV, &c. leſquels diviſés par $a = 1$ ſeront comme les tems des deſcentes le long des différens arcs de la cycloïde ; or que ces eſpaces ſoient diviſés par la même quantité ou qu'ils ne le ſoient pas, ils ſont toujours en même raiſon, donc ces eſpaces ſeront comme les tems des deſcentes, mais ces eſpaces ſont les logarithmes des abſciſſes AR, AP, AQ, &c. ainſi que nous l'avons démontré dans le *Calcul différentiel & integral*, donc les tems des deſcentes le long des différens arcs de la cycloïde, ſont entr'eux comme les logarithmes des hauteurs de ces arcs.

REMARQUE.

218. J'ai dit que dans une parabole (*Fig.* 89.) les ordonnées qui étoient au-deſſous de l'abſciſſe AD égale au parametre devenoient moindres de plus en plus à l'égard de leurs abſciſſes, & que cela étoit facile à prouver ; mais ſi quelqu'un en ſouhaite la demonſtration, la voici.

Du ſommet A je mene la tangente AO, & je diviſe l'angle droit FAO en deux parties égales par la droite AI ; du point I où cette droite coupe la parabole, je mene l'ordonnée DI qui fait avec

l'abſciſſe AD, & la droite AI un triangle rectangle AID iſoſcele; car l'angle DAI étant demi-droit, par la conſtruction l'angle DIA doit être auſſi demi-droit; ainſi DA = DI, & $\overline{DA}^2 = \overline{DI}^2$, mais par la proprieté de la parabole $\overline{DI}^2 = DA \times p$, & nous avons $\overline{DI}^2 = DA \times DA$, donc $DA \times p = DA \times DA$, & par conſéquent $p = DA$, ainſi quand DA eſt égale au parametre l'ordonnée DI eſt égale à l'abſciſſe DA.

Je diviſe le diametre AF en pluſieurs parties moindres que AD, & des points de diviſion je mene des ordonnées dont les unes ſont entre A & D, & les autres en deſſous de D; il eſt viſible que chaque ordonnée qui eſt entre A & D eſt plus grande que ſon abſciſſe, car la droite AI étant une corde de la parabole eſt toute entiere dans la parabole, ainſi les parties B*o*, CP, &c. des ordonnées BG, CH, &c. ſont moindres que ces ordonnées; mais à cauſe des triangles ſemblables ADI, ACP, &c. nous avons AD, DI :: AC, CP, donc à cauſe de AD = DI, nous avons AC = CP; ainſi CP étant moindre que l'ordonnée CH, l'abſciſſe AC eſt par conſéquent moindre que l'ordonnée, & on prouvera la même choſe à l'égard des autres ordonnées qui ſont entre A & D, cependant quoique leurs abſciſſes ſoient toujours moindres que les ordonnées, on prouvera qu'elles deviennent peu à peu plus grandes par rapport à leurs ordonnées juſqu'à l'abſciſſe AD qui eſt égale à ſon ordonnée, car par la proprieté de la parabole les abſciſſes ſont comme les quarrés des ordonnées, & par conſéquent le rapport que les abſciſſes ont entr'elles étant plus grand que celui des ordonnées, il s'enſuit néceſſairement que les abſciſſes deviennent peu à peu plus grandes par rapport aux ordonnées.

Maintenant je prolonge la droite AI à l'infini en R, & ſa partie IR eſt toute hors de la parabole, ce que je prouve ainſi. Je fais AO = AD = DI, & menant la droite OV, cette droite eſt un diametre de la parabole puiſqu'elle eſt parallele à l'axe AD, à cauſe des paralleles égales AO, DI; donc ſa partie IV tombe dans la parabole & dans le triangle ARF, donc FV eſt moindre que FR, E*l* moindre que EQ, &c. or par la proprieté de la parabole $\overline{EL}^2 = AE \times AO = AE \times El$, & $AE \times EQ$, eſt plus grand que $AE \times El$, à cauſe de EQ plus grand que E*l*, donc $AE \times EQ$ eſt plus grand que $\overline{EL}^2$, mais à cauſe des triangles ſemblables

ADI, AEQ, nous avons $AE = EQ$, donc $EQ \times EQ = \overline{EQ}^2$, est plus grand que $\overline{EL}^2$, donc EQ est plus grand que EL, & on prouvera de même que FR est plus grand que FM &c. d'où il suit que la droite IR est toute hors de la parabole, & que les ordonnées EL, FM, &c. étant moindres que les droites EQ, FR, &c. sont aussi moindres que leurs abscisses AE, AF, &c. & de plus ces abscisses deviennent plus grandes de plus en plus par rapport à leurs ordonnées, parce qu'elles sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées, & par conséquent en raison doublée des ordonnées, ce qui fait qu'elles augmentent plus vite que les ordonnées, donc, &c.

PROPOSITION LXXIII.

219. *Deux points* A, M, *étant donnés* (Fig. 90.) *trouver une courbe le long de laquelle un corps grave parvienne de* A *en* M *plus vite que le long de tout autre courbe.*

ce Probleme est par m. fontaine bien simple et par sa methode.

SOLUTION.

Je mene les trois ordonnées infiniment proche PM, *pm*, Q*n*; je tire les perpendiculaires MR, *m*O, & la perpendiculaire *n*S sur *pm* prolongée; je nomme $AP = x$, $PM = y$, donc $Pp = pQ = MR = mO = nS = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; je nomme $RS = b$, ainsi $mS = RS - mR = b - dy$, & $mn = \sqrt{\overline{mS}^2 + \overline{nS}^2} = \sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}$.

L'arc M*m* étant infiniment petit, la vitesse du corps pendant la descente de cet arc peut être prise pour uniforme, & par conséquent elle est la même que la vitesse acquise en M ou en P (*N.* 200.) que je nomme $= c$, de même la vitesse pendant la descente de l'arc *mn* pouvant être prise pour uniforme, est la même que la vitesse acquise à la fin de l'arc A*m* ou de la hauteur A*p*, & je la nomme C, enfin je nomme $= t$ le tems de la descente le long de l'arc AM, ce qui donne *dt* pour le tems de la descente le long de M*m*.

Dans le mouvement uniforme l'espace est comme le produit du tems par la vitesse (*N.* 17.), donc $Mm = cdt$, mais nous avons $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $cdt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c}$; de même l'espace $mn = C \times dt$, or nous avons $mn = \sqrt{bb - 2bdy}$

$\overline{+ dy^2 + dx^2}$, donc $Cdt = \sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}$ & $dt = \frac{\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}{C}$, mais le tems le long de l'arc Mn eſt égal au tems dt de la deſcente le long de Mm, & au tems de la deſcente le long de mn, donc $2dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c} + \frac{\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}{C}$.

Or $2dt$ doit être le moindre tems que le corps grave puiſſe employer à parcourir l'arc Mn, donc en ſuivant les regles que nous avons enſeignées touchant les plus grandes & les moindres quantités, je prens la différence de la derniere équation, laquelle eſt en ſuppoſant les dx conſtantes $2ddt = \frac{dyddy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}} + \frac{dyddy - bddy}{C\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}$; mais ſelon la même regle $2ddt = 0$, donc le ſecond membre de cette équation eſt auſſi égal à zero, & diviſant par ddy, j'ai $\frac{dy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}} + \frac{dy - b}{C\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}} = 0$, d'où je tire $\frac{dy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{b - dy}{C\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}$, ou $\frac{mR}{c \times Mm} = \frac{mS}{C \times mn}$; ainſi j'ai mR, mS, ou $On :: c \times Mm$, $C \times mn$, ou $\frac{mR}{c}$, $\frac{On}{C} :: Mm$, mn, ou enfin $C \times mR$, $c \times On :: Mm$, mn, c'eſt-à-dire, les arcs infiniment petits Mm, mn, ſont en raiſon compoſée de la raiſon droite des différences mR, On des ordonnées correſpondantes & de la raiſon reciproque des viteſſes.

Que ſi nous ſuppoſons $Mm = mn$, c'eſt-à-dire, les $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ conſtantes, nous aurons $C \times mR = c \times On$; donc mR, $On :: c$, C, c'eſt-à-dire en ſuppoſant les arcs infiniment petits égaux entreux, les différences mR, On des ordonnées ſont comme les viteſſes.

Suppoſons donc que les $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ſoient conſtantes, & que le rapport conſtant des dy aux viteſſes ſoit exprimé par Mm, a, & nommant la viteſſe $= u$, nous aurons dy, $u :: \sqrt{dx^2 + dy^2}$, a, donc $ady = u\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & élevant tout au quarré, puis retranchant de part & d'autre u^2dy^2, enſuite diviſant par $a^2 - u^2$, & tirant la racine quarrée du quotient, j'ai $dy = \frac{udx}{\sqrt{a^2 - u^2}}$.

Maintenant u étant la viteſſe acquiſe en M ou en P eſt $\sqrt{x}$, donc

u^2

$u^2 = x$; & mettant ces valeurs de u, & de u^2, dans la valeur de dy, j'ai $dy \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a^2 - x}}$, & multipliant le numerateur & le dénominateur par $\sqrt{x}$; puis prenant a pour l'unité, j'ai $dy = \frac{xdx}{\sqrt{ax - xx}}$.

$dy, u :: \sqrt{dx^2 + dy^2}, a$

$ady = u\sqrt{dx^2 + dy^2}$

$a^2dy^2 = u^2dx^2 + u^2dy^2$

$a^2dy^2 - u^2dy^2 = u^2dx^2$

$dy^2 = \frac{u^2dx^2}{a^2 - u^2}$

$dy = \frac{udx}{\sqrt{a^2 - u^2}}$

$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a^2 - x}}$

$dy = \frac{xdx}{\sqrt{a^2x - x^2}}$

$dy = \frac{xdx}{\sqrt{ax - xx}}$

Or $\frac{xdx}{\sqrt{ax - xx}}$ est la différence entre $\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$ & $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$, car si de la premiere de ces grandeurs on retranche la seconde, le reste est $\frac{2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$, donc j'ai comme on voit une expression de dy dont l'integrale est composée de deux parties $\int\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \int\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$; mais la seconde $-\int\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}} = -\sqrt{ax - xx}$, donc j'ai $y = \int\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \sqrt{ax - xx}$; or $\sqrt{ax - xx}$ est l'ordonnée PN d'un demi-cercle dont le diametre $AV = a$, car puisque $AP = x$, donc $PV = a - x$, & par la proprieté du cercle, j'ai $\overline{PN}^2 = AP \times PV = ax - xx$, donc $PN = \sqrt{ax - xx}$, de même $\int\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$ est l'arc AN, car menant du point N le rayon NZ & la tangente Tt, les triangles NPZ, NLn, sont semblables comme nous l'avons déja démontré plus haut en deux ou trois occasions; donc NP, NZ :: NL, Nn ou $\sqrt{ax - xx}, \frac{1}{2}a :: dx, \frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} = Nn$; or N$n$ est la différence de l'arc AN, donc $\int\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$ est l'arc AN; puis donc que nous avons $y = \int\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \sqrt{ax - xx}$, il s'ensuit que $PM = y = AN - PN$.

$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$

$y = \int\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \int\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$

$y = \int\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \sqrt{ax - x^2}$

Il ne s'agit donc que de trouver la grandeur AV = *a* pour pouvoir décrire la courbe demandée, & c'eſt ce que nous trouverons dans la Propoſition ſuivante, en conſéquence de quelques réflexions que nous allons faire ſur cette courbe.

Prenons une demi-cycloïde (*Fig.* 91.) & que la hauteur AP, de l'arc AM ſoit égale à la hauteur AP de l'arc AM demandée (*Fig.* 90.), la droite MH (*Fig.* 91.) eſt égale à l'arc HB, & la baſe AC = PM + MH + HD = arc BH + arc HC; retranchant donc d'une part MH, & de l'autre l'arc BH = MH, nous aurons PM + HD = arc HC, donc PM = arc HC — HD, c'eſt-à-dire dans la cycloïde les ordonnées PM de la partie extérieure AQBM ſont égales aux arcs correſpondans CH moins les ſinus correſpondans HD; mais dans la courbe que nous cherchons (*Fig.* 90.) les ordonnées PM ſont égales aux arcs correſpondans AN d'un demi-cercle dont le diametre = *a* moins le ſinus correſpondant PN; donc cette courbe eſt une cycloïde, & il ne s'agit que de trouver le diametre = *a*, ce que nous allons faire dans la Propoſition ſuivante.

220. Dans la cycloïde (*Fig.* 91.) nous avons PM = CH — HD, & multipliant tout par la moitié du rayon, ou par $\frac{1}{2}$HO, nous avons PM × $\frac{1}{2}$HO = CH × $\frac{1}{2}$HO — HD × $\frac{1}{2}$HO, mais CH × $\frac{1}{2}$HO, eſt le ſecteur CHO, & HD × $\frac{1}{2}$HO, ou HD × $\frac{1}{2}$CO eſt le triangle CHO, donc PM × $\frac{1}{2}$HO eſt égal au ſecteur CHO moins le triangle CHO, c'eſt-à-dire PM × $\frac{1}{2}$HO eſt égal au ſegment HC, ce qui eſt digne de remarque.

PROPOSITION LXXIV.

221. *Deux points* A, M, (Fig. 92.) *étant donnés ſur un plan perpendiculaire à l'horizon, décrire une demi-cycloïde* AMH *dont la baſe horizontale* AG *paſſe par l'un de ces points* A, *& dont la courbe paſſe par les deux points* A, M.

SOLUTION.

Du point A, j'abbaiſſe AR perpendiculaire à l'horizon, & je mene AG perpendiculaire à AR; ainſi la baſe de la demi-cycloïde demandée ſera ſur AG. Je prens un demi-cercle quelconque BEC, & prenant ſur AG une partie AB égale à la demi-circonférence BEC, je mets le diametre BC perpendiculairement ſur le point B, & je décris une demi-cycloïde CDA, je joins les points donnés A, M, par la droite AM qui coupe la

demi-cycloïde CDA en D, & je fais AD, AM :: BC est à un quatriéme terme GH, lequel est le diametre du demi-cercle générateur de la demi-cycloïde cherchée; faisant donc AG égal à la circonférence de ce demi-cercle, & mettant le diametre perpendiculairement en G, je décris la demi-cycloïde HMA qui passe par les points donnés A, M.

DEMONSTRATION.

Par les points D, M, je mene les droites *Sf*, TI paralleles à AG; par la proprieté de la cycloïde CDA, j'ai DE = CE, & SD = BE — EF (*N.* 219.) ainsi il faut que je démontre que MP = HP, & TM = GP — PI.

A cause des paralleles AG, *Sf*, TI, nous avons AD, AM :: G*f*, ou BF, GI, mais par la construction AD, AM :: BC, GH, donc BF, GI :: BC, GH, ainsi les diametres BC, GH sont coupés proportionnellement en F & en I, or les cercles BEC, GPH étant semblables, & les droites BF, GI proportionnelles aux diametres, il est visible que les droites FC, IH sont aussi proportionnelles de même que les sinus EF, PI, & aussi les arcs BE, GP, de même que les arcs EC, PH.

Maintenant des points C, H, je mene les droites CO, HR paralleles à AG, & prolongeant AM en V, la figure AOCB est semblable à la figure AVHG, car AM, MV :: GI, IH :: BF, FC :: AD, AO; de plus AB, BC :: AG, GH, ainsi abbaissant les perpendiculaires O*o*, V*u* sur AG, on aura A*o*, *o*O, ou BC :: A*u*, *u*V, ou GH, ou A*o*, BC :: A*u*, GH, mais AB, BC :: AG, GH, donc A*o*, AB :: A*u*, AG, & AB — A*o*, AB :: AG — A*u*, AG, c'est-à-dire B*o*, AB :: G*u*, AG, ou CO, AB :: HV, GA; on prouvera de même que FD, AB :: IM, AG, ou FD, IM :: AB, AG :: BC, GH :: EF, PI.

Puis donc que FD, IM :: EF, PI ou FD, EF :: IM, PI, donc DE, EF, MP, PI, ou EF, PI :: DE, MP; mais EF est à PI comme l'arc EC est à l'arc PH, & la droite DE est égal à l'arc EC, donc EF, PI :: DE, ou l'arc EC, MP, ou l'arc PH; ainsi MP étant égal à l'arc PH, le point M est un point de la cycloïde HMA, & par conséquent cette cycloïde passe par les points donnés.

Que si M est un point de la cycloïde, il est visible par la proprieté de cette courbe que nous avons découverte dans la Proposition précédente que TM est égal à l'arc GP moins le sinus PI.

PROPOSITION LXXV.

222. *La hauteur* AD (Fig. 93.) *dont un corps doit descendre étant connue, trouver une courbe* TMN *de telle nature que si le corps parvenoit au point* T *ou au point* M *ou au point* N, *le tems de la descente* AT, *ou* AM, *ou* AN, *&c. fut toujours le même, & le moindre qu'il peut employer.*

SOLUTION.

Tirez AS perpendiculaire à AD, & décrivez des demi-cycloïdes EA, HA, RA, &c. dont les diametres FE, IH, SR, &c. aillent en augmentant insensiblement; plus vous décrirez de demi-cycloïdes, plus vous aurez de points de la courbe cherchée, en observant que les différences des diametres soient fort petites.

Prenez sur la premiere demi-circonférence FE l'arc FG moyen proportionnel entre la hauteur donnée AD, & le diametre FE, & menez GT parallele à AF, le point T où cette parallele coupe la demi-cycloïde, sera un point de la courbe cherchée.

De même prenez sur la seconde demi-circonférence l'arc IO moyen proportionnel entre la hauteur donnée AD & le diametre IH, & menez OM parallele à AI, le point M où cette parallele coupe la demi-cycloïde HA sera un point de la courbe.

Et faisant la même chose à l'égard des autres demi-cycloïdes, vous trouverez les points de la courbe cherchée T*d*.

DEMONSTRATION.

Par la construction nous avons AD, FG :: FG, FE, donc $\overline{FG}^2 = AD \times FE$, & $FG = \sqrt{AD} \times \sqrt{FE}$, & multipliant par $\sqrt{FE}$, nous avons $FG \times \sqrt{FE} = FE \times \sqrt{AD}$, & divisant par FE, nous avons $\frac{\sqrt{FE}}{FE} FG = \sqrt{AD}$, mais (*N.* 216.) nous avons $\frac{\sqrt{FE}}{FE}$ 2FG égal au tems de la descente le long de l'arc AT, donc ce tems $t = \frac{\sqrt{FE}}{FE}, 2FG = 2\sqrt{AD}$.

De même, nous avons par la construction AD, IO :: IO, IH, donc $\overline{IO}^2 = AD \times IH$, & $IO = \sqrt{AD} \times \sqrt{IH}$, & multipliant par $\sqrt{IH}$, puis divisant par IH, nous avons $\frac{\sqrt{IH}}{IH} \times IO = \sqrt{AD}$, ou $\frac{\sqrt{IH}}{IH} \times 2IO = 2\sqrt{AD}$; mais par le même nombre

cité, le tems de la descente le long de l'arc AM est $\frac{\sqrt{IH}}{IH} \times 2IO$, donc ce tems est le même que le précedent, l'un & l'autre étant égaux à $2\sqrt{AD}$, & on prouvera la même chose à l'égard des autres demi-cycloïdes.

$2\sqrt{AD} = \frac{2\sqrt{AD} \times \sqrt{AD}}{\sqrt{AD}} = \frac{2AD}{\sqrt{AD}} = \frac{AD}{\frac{1}{2}\sqrt{AD}}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{AD}$ est la moitié de la vitesse acquise en D, & si le mouvement du corps étoit uniforme, le corps avec la vitesse uniforme $\frac{1}{2}\sqrt{AD}$ parcoureroit l'espace AD dans un tems égal à celui qu'il employe à le parcourir avec son mouvement acceleré, donc l'espace $AD = t \times \frac{\sqrt{AD}}{2}$, & par conséquent $t = \frac{AD}{\frac{1}{2}\sqrt{AD}} = 2\sqrt{AD}$; or les tems employés à parcourir les arcs AT, AM, AN sont tous égaux à $2\sqrt{AD}$, donc ils sont égaux au tems de la descente le long de AD.

Les arcs AT, AM, AN, &c. étant des arcs de cycloïde, le corps va plus vîte de l'une à l'autre de leur extremités, que par toute autre courbe, donc le corps parvient à un point quelconque de la courbe T*d* par le tems le plus court.

REMARQUE.

223. Jamais la courbe T*d* ne touchera ni ne coupera la droite AD, car quand on décriroit une infinité de demi-cycloïdes, elles ne toucheront jamais la droite AD qu'au point A, ainsi les droites GT, OM, LN, &c. dont les extremités déterminent les points T, M, N, &c. de la courbe T*d* ne parviendront jamais au point D.

En second lieu, le diametre de la moindre cycloïde qui peut servir à la description de la courbe ne peut être gueres moindre que $\frac{4}{9}AD$, car $\frac{4}{9}AD$ multiplié par AD donne $\frac{4}{9}\overline{AD}^2$, & tirant la racine quarrée, on a $\frac{2}{3}AD$ pour la moyenne proportionnelle entre AD, & $\frac{4}{9}AD$, mais $\frac{2}{3}AD$, ou $\frac{6}{9}AD$ est à $\frac{4}{9}AD$, comme 6 à 4, ou comme 3 à 2, & la circonférence d'un demi-cercle est à peu près à son diametre comme 3 à 2, donc la moyenne proportionnelle entre AD & le diametre $\frac{4}{9}AD$ est presque égale à la demi-circonférence, or l'arc moyen proportionnel entre AD & le diametre de la cycloïde doit être moindre ou tout au plus égal à la demi-circonférence pour pouvoir déterminer un point de la courbe que nous cherchons; & il est visible qu'à mesure qu'on

prendroit des diametres moindres que $\frac{4}{9}$AD, les arcs moyens proportionnels deviendroient plus grands par rapport à ces diametres, donc, &c.

En troisiéme lieu, la courbe que nous cherchons approche de plus en plus de AD, & ne la touche jamais, donc AD est son asymptote, & la convexité de cette courbe est tournée du côté de AD; & pour prouver cette derniere conséquence, il n'y a qu'à faire attention qu'à mesure que les diametres augmentent les arcs FG, IO, SL, &c. moyens proportionnels entre AD & les diametres deviennent moindres par rapport à ces diametres, qu'ainsi les arcs restans GE, OH, LR, &c. deviennent plus grands, & que par conséquent les droites GT, OM, LN, &c. devenant plus grandes, il faut nécessairement que leur extremités N, M, T, &c. approchent davantage de AD.

PROPOSITION LXXVI.

224. *Un Pont levis* AB *étant donné* (Fig. 94.) *tournant librement autour de* A, *trouver une courbe de telle nature que si un corps* M *mis à l'extremité* M *d'une corde qui tient au pont par l'autre bout, vient à être mis sur un point quelconque de cette courbe, le pont & le corps soient toujours en équilibre.*

SOLUTION.

La direction de la pesanteur absolue du pont étant perpendiculaire à l'horizon est par conséquent parallele à CA, ainsi achevant le parallelogramme BC*c*A, & concevant que la pesanteur absolue soit representée par la droite CA, elle équivaudra à deux forces representées par les droites BC, C*c*, qui ont les directions BC, C*c*, (*N.* 130.) c'est-à-dire que si une puissance faisoit parcourir un espace CA à un corps pendant un certain tems, & que deux autres puissances pendant le même tems pussent faire parcourir au même corps, l'une l'espace BC, l'autre l'espace C*c*, ces deux dernieres jointes ensemble ne feroient pas plus que la premiere toute seule; or la force C*c* étant parallele au pont n'agit point sur lui, donc la force BC toute seule est en équilibre avec le poids M, donc la pesanteur absolue du pont étant representée par AC, la puissance qu'il faudroit mettre au lieu du pont au point B, que nous supposons être le centre de gravité du pont, pour être en équilibre avec le poids M, est representée par la droite BC.

De même la pesanteur absolue de M agit selon une direction perpendiculaire à l'horizon qui est par conséquent parallele à CK, & ce corps agit sur la courbe AN selon la direction MK perpendiculaire à la courbe, & sur le pont selon la direction MC, ainsi achevant le parallelogramme CMK*o*, & supposant que CM exprime l'effort que le corps M fait pour être en équilibre avec le pont, & MK ou C*o* l'effort qu'il fait sur la courbe ; la diagonale CK exprimera la pesanteur absolue de M, puisque CK équivaut aux deux puissances CM, C*o*.

Maintenant supposant que la pesanteur absolue CK soit $=b$, nous aurons CK, b :: CM, CB ; car la force CM étant en équilibre avec la force CB, ces deux forces sont égales de même que $CK=b$; ainsi menant MP perpendiculaire à CK, & nommant $CP=x$, $PM=y$, $BC+CM=a$, le triangle rectangle CMP donne $\overline{CM}^2=\overline{CP}^2+\overline{PM}^2=x^2+y^2$, donc $CM=\sqrt{x^2+y^2}$, & $BC=BC+CM-CM=a-\sqrt{x^2+y^2}$.

Je mene *pm* infiniment proche de PM, & du point M la tangente MT à la courbe CN, & la perpendiculaire MR, ce qui donne les triangles semblables *m*RM, MPT, mais les triangles MPT, KPM, sont aussi semblables, donc *m*RM est semblable à KPM, & parconséquent MR, R*m* :: PM, PK, ou dx, $dy :: y$, $\frac{ydy}{dx}=PK$; donc $CK=CP+PK=x+\frac{ydy}{dx}=\frac{xdx+ydy}{dx}$, donc puisque j'ai CK, b :: CM, CB, j'ai aussi les expressions analytiques qu'on voit ici, & multipliant la premiere raison par dx, puis faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, ensuite divisant par $\sqrt{x^2+y^2}$, enfin tirant l'integrale, j'ai l'équation $bx+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=a\sqrt{x^2+y^2}$ qui est l'équation de la courbe demandée.

$$\frac{xdx+ydy}{dx},\ b :: \sqrt{x^2+y^2},\ a-\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$xdx+ydy,\ bdx :: \sqrt{x^2+y^2},\ a-\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$bdx\sqrt{x^2+y^2}=axdx+aydy-xdx\sqrt{x^2+y^2}-ydy\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$bdx=\frac{axdx+aydy}{\sqrt{x^2+y^2}}-xdx-ydy.$$

$$bx=a\sqrt{x^2+y^2}-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}y^2.$$

$$bx+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2=a\sqrt{x^2+y^2}.$$

Pour conſtruire cette courbe je prolonge CM en D, faiſant MD = BC, & par conſéquent j'ai $CD = BC + CM = a$, du centre C je décris avec le rayon CD un demi-cercle FDE, & je mene une ordonnée DG que je nomme $= z$, donc $\overline{GD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CG}^2$, $a^2 - z^2$, & $GD = \sqrt{a^2 - z^2}$; les triangles ſemblables CGD, CPM donnent CG, CD :: CP, CM, ou $z, a :: x, CM$, donc $z \times CM = ax$, & $x = \frac{z \times CM}{a}$.

Les mêmes triangles donnent CD, DG :: CM, PM, ou a; $\sqrt{aa - zz} :: CM, y$; donc $ay = CM \times \sqrt{aa - zz}$, & $y = \frac{CM\sqrt{aa - zz}}{a}$.

Subſtituant donc dans l'équation les valeurs de x & de y que nous venons de trouver, nous aurons l'équation qu'on voit ici.

$$\frac{bz \times CM}{a} + \frac{z^2 \times \overline{CM}^2}{2a^2} + \frac{a^2 \times \overline{CM}^2 - z^2 \times \overline{CM}^2}{2a^2} = a \times CM$$

Et diviſant par CM, puis ôtant de part & d'autre $\frac{bz}{a}$, & enfin multipliant tout par 2, on aura $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$.

$$\frac{bz}{a} + \frac{z^2 \times CM}{2a^2} + \frac{a^2 \times CM - z^2 \times CM}{2a^2} = a$$

$$\frac{bz}{a} + \frac{a^2 \times CM}{2a^2} = a$$

$$\frac{CM}{2} = a - \frac{2bz}{a}$$

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Il n'y a donc pour décrire la courbe qu'on demande qu'à décrire le demi-cercle EDF avec un rayon CE égal à la longueur BC + CM de la corde attachée au pont & au poids M, puis du centre C mener des rayons CD aux points de la circonférence, & de ces points tirer des ordonnées DG, après quoi prenant une quatriéme proportionnelle au rayon CD ou à la longueur de la corde, au double de la ligne b qui exprime le poids abſolu de M, & à l'ordonnée z, cette quatriéme proportionnelle ſera $\frac{2bz}{a}$, c'eſt pourquoi retranchant cette proportionnelle de la grandeur $2a$ du diametre, on aura $2a - \frac{2bz}{a} = CM$, & par conſéquent le point M ſera un point de la courbe, & faiſant la même choſe ſur les autres rayons, on trouvera tant de points de la courbe que l'on voudra.

Mais comment trouver une ligne qui exprime la peſanteur abſolue

absolue du poids M? le voici : cherchez la longueur qu'il faut donner à la corde, c'est-à-dire, mettez le pont dans une situation horizontale, & mesurez la distance du point B où il doit être attaché au point C qui est un trou dans la muraille par où cette corde doit passer pour être attachée au poids M; supposant donc que cette distance soit six toises, concevez que la pesanteur absolue du pont soit representée par une ligne de six toises, il est visible que si le poids M pese autant que le pont, sa pesanteur absolue sera representée par la ligne de six toises; que s'il ne pese que la moitié de ce que pese le pont, sa pesanteur absolue sera representée par une ligne de trois toises, que s'il pese le double de ce que pese le pont, sa pesanteur absolue sera representée par une ligne de douze toises, &c.

voyés page x

Pour revenir à la courbe, si $a = b$, on aura $CM = 2a - 2z = 2GE$, c'est-à-dire, que si le poids M pese autant que le pont, CM sera double de GE.

Quand CM devient $CN = a$, on a $CM = a = 2a - \frac{2bz}{a}$, & retranchant a de part & d'autre, on aura $a - \frac{2bz}{a} = 0$, donc $a = \frac{2bz}{a}$, d'où je tire $z = \frac{a^2}{2b}$, c'est-à-dire que quand la courbe coupe la circonférence du cercle, l'abscisse z est troisiéme proportionnelle à $2b$ & au rayon CE.

Si on mene une tangente MT à un point quelconque M de la courbe CMN, les triangles semblables MRm, TPM donnent mR, RM :: PM, PT, ou dy, dx :: y, $\frac{ydx}{dy}$ = PT soutangente; or nous avons trouvé ci-dessus l'équation qu'on voit ici.

$$bdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{x^2+y^2}} - xdx - ydy.$$

$$bdx + xdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{x^2+y^2}} - ydy.$$

$$\overline{bdx + xdx} \times \sqrt{x^2+y^2} = axdx + aydy - ydy\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\overline{bdx + xdx} \times \sqrt{x^2+y^2} - axdx = aydy - ydy\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$dx = \frac{aydy - ydy\sqrt{x^2+y^2}}{\overline{b+x}\sqrt{x^2+y^2} - ax}.$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - y^2\sqrt{x^2+y^2}}{\overline{b+x}\sqrt{a^2+y^2} - ax}.$$

Et ajoutant xdx de part & d'autre, puis multipliant par $\sqrt{x^2+y^2}$ puis retranchant $axdx$, & enfin divisant par $\overline{b+x}\sqrt{x^2+y^2}-ax$, je trouve une valeur de dx, laquelle étant substituée dans $\frac{ydx}{dy}$, donne l'expression qu'on voit ici.

Or quand CM devient $CN=a$, on a $\sqrt{x^2+y^2}=a$, mettant donc cette valeur de $\sqrt{x^2+y^2}$ dans l'expression de $\frac{ydx}{dy}$ que nous venons de trouver, nous aurons comme on voit ici une autre expression de $\frac{ydx}{dy}$, laquelle est égale à zero, c'est-à-dire, que quand CM devient égal au rayon du cercle, la soutangente devient nulle, & l'ordonnée est tangente de la courbe en N ; ainsi le point N de la courbe est le point le plus bas ; donc s'il ne s'agit que de trouver la courbe necessaire pour les différentes élevations qu'on veut donner au pont à commencer depuis la position horizontale jusqu'à la verticale ; l'arc CN suffit pour cela.

$$\frac{ydx}{dy}=\frac{ay^2-ay^2}{b+x\sqrt{a^2+y^2}-ax}=0.$$

Quand le pont étant dans une situation horizontale (*Fig.* 95.) la distance BC est égale à toute la longueur de la corde, on a $BC=a$, or s'il arrive alors qu'on ait $b=a$, c'est-à-dire si la pesanteur absolue du poids M est égale à la pesanteur absolue du pont, l'arc CN de la courbe repond aux différentes positions du pont depuis l'horizontale jusqu'à la verticale, car 1°. Le pont étant dans la situation horizontale, le poids est nécessairement en C, & quand le pont est vertical, la corde CN est égale à BC, mais BC est égal au rayon du demi-cercle, donc CN est aussi égal au rayon, & par conséquent le poids M se trouve au point N qui coupe la circonférence; donc ce poids à parcouru tous les points de l'arc CMN, depuis la situation horizontale du pont jusqu'à la verticale.

Quand le pont étant dans une situation horizontale, la distance BC est égale à toute la longueur de la corde, la pesanteur absolue du poids M peut être ou égale ou plus grande que la pesanteur absolue du pont; mais elle ne sauroit être moindre, car dans ce cas le poids M étant nécessairement en C, on a $CM=0$, mais $CM=2a-\frac{2bz}{a}$, donc il faut qu'on ait $2a-\frac{2bz}{a}=0$; or pour que cela soit, il faut que $\frac{2bz}{a}$ soit égal à $\frac{2aa}{a}$, afin qu'on ait $2a$

$-\frac{2aa}{a}=o$; ſuppoſant donc $b=a$, & mettant cette valeur de b dans $2a-\frac{2bz}{a}=o$, on aura $2a-\frac{2az}{a}=o$, ce qui fait voir qu'alors on doit avoir $z=a$; or on a $z=a$ lorſque le rayon ſur lequel on détermine CM eſt le rayon CE, donc b peut être égal à a. En ſecond lieu ſuppoſant b plus grand que a, il eſt viſible qu'afin qu'on ait $\frac{2bz}{a}=\frac{2aa}{a}$, il faut que z ſoit moindre que a; or z peut être moindre que a, donc auſſi b peut être ſuppoſé plus grand que a. En troiſiéme lieu ſuppoſant b moindre que a, il eſt encore viſible qu'afin qu'on ait $\frac{2bz}{a}=\frac{2aa}{a}$, il faut que z ſoit plus grand que a, mais z étant une abſciſſe du demi-cercle, & l'origine de ces abſciſſes commençant au centre, il n'eſt pas poſſible que z ſoit plus grand que a, donc il n'eſt pas poſſible auſſi que b ſoit moindre que a.

Quand le pont étant dans une ſituation horizontale la diſtance BC eſt moindre que la corde BCM, alors l'arc MN répond à toutes les poſitions du pont depuis l'horizontale juſqu'à la verticale, car quand le pont eſt horizontal le poids eſt en M, & quand il eſt dans la verticale, la corde CN eſt égale à la corde BCM, & par conſéquent au rayon du cercle, ainſi le poids ſe trouve au point N où la courbe coupe la circonférence.

Quand le pont étant dans une ſituation horizontale (*Fig.* 95.) la diſtance BC eſt moindre que la corde BCM, la peſanteur abſolue du poids peut être ou égale, ou plus grande, ou moindre que la peſanteur abſolue du pont; car en premier lieu, ſi l'on ſuppoſe que la peſanteur abſolue du poids ſoit ou égale ou plus grande que a, & que le pont ſoit deſcendu plus bas qu'il n'eſt dans la ſituation horizontale, de façon qu'on ait CM=o, on aura auſſi $2a-\frac{2bz}{a}=o$, & par conſéquent il faudra que $\frac{2bz}{a}$ ſoit $=\frac{2aa}{a}$, ainſi on aura z ou égal ou moindre que a, & cela eſt poſſible. En ſecond lieu, ſi on ſuppoſe que la peſanteur abſolue du poids ſoit moindre que a, on ne peut pas ſuppoſer CM=o, parce qu'il faudroit pour cela que $\frac{2bz}{a}=\frac{2aa}{a}$, & que par conſéquent l'abſciſſe z fût plus grande que le rayon, ce qui n'eſt pas poſſible; ainſi dans ce cas la courbe CMN ne paſſera pas par le centre du cercle; mais pourvû que b ſoit plus grand que $\frac{1}{2}a$ on trouvera toujours un point entre le centre C & l'extrémité E du

rayon CE, qui sera le point où la courbe coupera le rayon; car supposant que le rayon qui doit déterminer CM soit le rayon CE, on aura $z = CE = a$, & mettant cette valeur de z dans $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$, on aura $CM = 2a - \frac{2ab}{a} = 2a - 2b$, ainsi le poids M sera en un point K éloigné du centre C de la quantité $2a - 2b$, laquelle sera moindre que $CE = a$, en supposant que b est plus grand que $\frac{1}{2}a$, ce qui fait voir qu'on ne peut faire b moindre que a de la valeur $\frac{1}{2}a$, parce que le poids M qui soutient le pont en équilibre dans ses différentes positions depuis l'horizontale jusqu'à la verticale, doit nécessairement descendre le long de KN jusqu'au point N de la circonférence, ce qui ne sauroit être si CK devenoit aussi grand que CE.

Jusqu'ici nous n'avons décrit que la partie de la courbe qui est nécessaire pour tenir le pont en équilibre dans ses différentes situations; maintenant pour en mieux découvrir les proprietés faisons abstraction du pont & du poids, & considerons la courbe en elle-même comme produite par les parties $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$ qu'on auroit prises sur tous les rayons d'un demi-cercle, en supposant deux droites données a, b, dont la seconde b seroit ou égale, ou moindre, ou plus grande que a, & que les z fussent les abscisses correspondantes aux ordonnées du demi-cercle menées des extrémités des rayons, de sorte que les z, à compter depuis le centre C jusqu'à l'extrémité E du diametre, fussent les $+z$, & à compter depuis C jusqu'à l'autre extrémité F, ils fussent les $-z$.

Supposant $CM = 0$, nous avons $2a - \frac{2bz}{a} = 0$, donc $2a = \frac{2bz}{a}$ ou $a = \frac{bz}{a}$, & par conséquent $aa = bz$, donc $z, a :: a, b$; ainsi supposant $a = b$, nous avons $z = a$, & par conséquent le rayon CE (*Fig.* 96.) détermine alors le $CM = 0$; or comme en faisant la même construction sur les rayons du demi-cercle FnE, la courbe se trouveroit semblablement posée dans l'un & l'autre demi-cercle; il est visible que cette courbe est rebroussante en C, & que le rayon CE est sa tangente.

Mais si l'on suppose b plus grand que a, on aura aussi a plus grand que z, lorsque $CM = 0$, ainsi supposant $z = CL$ (*Fig.* 97.) je mene l'ordonnée LO, & le rayon CO est celui qui détermine $CM = 0$; or les autres rayons entre CO, CE donneront d'au-

tres CM qui ne seront pas égaux à zero, & qu'il faudra prendre sur les prolongemens de ces rayons dans l'autre demi-cercle; donc dans ce cas la courbe coupe le diametre FE, & pour déterminer le CM que le rayon CE donnera comme alors on a $z = a$, je mets cette valeur de z dans $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$, & j'ai $CM = 2a - \frac{2ab}{a} = 2a - 2b$, ainsi la courbe coupe l'axe en un point V éloigné du centre C d'une quantité égale à $2a - 2b$.

J'ai dit que les CM déterminés par les rayons qui sont entre CO & CE doivent être pris sur les prolongemens de ces rayons, parce que les CM déterminés par les rayons qui sont au-delà de CO étant positifs, & ces CM positifs allant en diminuant jusqu'au CM déterminé par CO, lequel est zero, les CM qui viennent après celui-ci doivent être négatifs.

Comme on peut faire la même construction sur les rayons du demi-cercle FHE, il est visible que la courbe revient se couper au point C, lequel est par conséquent son nœud.

Quand b est moindre que a, nous avons déja dit ci-dessus que la courbe ne passe pas par le point C (*Fig.* 98.), & que le point K où elle coupe l'axe du côté de E, est éloignée du centre C d'une quantité égale à $2a - 2b$.

Si l'on prend le rayon CR perpendiculaire au rayon CE (*Fig.* 96, 97, 98.), le CM déterminé par ce rayon est toujours $= 2a$, soit que a soit égal ou moindre, ou plus grand que b; car le z correspondant à ce rayon est $= 0$, mettant donc cette valeur de zero dans $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$, on a $CM = 2a - 0 = 2a$.

Si l'on prend le rayon CF, le $-z$ qui lui correspond est $-a$, car le z est négatif de ce côté; mettant donc cette valeur dans $CM = 2a - \frac{2b \times -z}{a}$ on aura $CM = 2a - \frac{2b \times -a}{a} = 2a + \frac{2ab}{a} = 2a + 2b$; c'est-a-dire que la courbe coupe l'axe en un point T éloigné du centre C d'une quantité égale à $2a + 2b$, soit que a soit plus grand ou moindre, ou égal à b.

Il est visible que cette courbe a deux ordonnées plus grandes que les autres (*Fig.* 96.), à sçavoir l'une dont l'abscisse est sur CE, en ne prenant que les ordonnées qui se terminent sur la convexité de la courbe, & l'autre dont l'abscisse est sur CT en prenant les ordonnées qui se terminent sur la concavité; or pour trouver la plus grande ordonnée dont l'abscisse est sur CE, il

faut fuppofer que CM foit devenu CN $= a$, ainfi on aura $a = 2a - \frac{2bz}{a}$, ce qui donne $z = \frac{aa}{2b}$; or fi $b = a$, on aura $z = \frac{aa}{2b} = \frac{1}{2}a$, ainfi l'abfciffe correfpondante à la plus grande ordonnée PN eft $z = \frac{1}{2}a$, mais le triangle rectangle CNP donne $\overline{PN}^2 = \overline{CN}^2 - \overline{CP}^2$, donc $\overline{PN}^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$, & PN $= \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$; mais fi b eft plus grand ou moindre que a, on aura toujours $z = \frac{aa}{2b}$, & $z^2 = \frac{a^4}{4b^2}$ donc $\overline{PN}^2 = \overline{CN}^2 - \overline{CP}^2 = aa - \frac{a^4}{4b^2}$ & PN $= \sqrt{aa - \frac{a^4}{4b^2}}$.

Pour trouver la plus grande ordonnée dont l'abfciffe eft fur CT, je prens l'équation de la courbe que nous avons trouvée ci-deffus en retranchant de part & d'autre $\frac{1}{2}y^2$, comme on voit ici, je prens la différence de l'équation, & retranchant de part & d'autre $\frac{axdx}{\sqrt{a^2+y^2}}$, j'ai une équation dans laquelle faifant $dy = 0$, felon la regle des plus grandes & des moindres quantités, le premier membre devient égal à zero, & divifant par dx, puis ajoûtant de part & d'autre $\frac{ax}{\sqrt{xx+y^2}}$,

$$bx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a\sqrt{x^2+y^2}$$

$$bx + \frac{1}{2}x = a\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2}y^2$$

$$bdx + xdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{x^2+y^2}} - ydy$$

$$bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{aydy}{\sqrt{x^2+y^2}} - ydy$$

$$bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$b + x = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overline{b+x} \times \sqrt{x^2+y^2} = ax$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{ax}{b+x} = \text{CM}$$

enfuite multipliant par $\sqrt{xx+y^2}$, puis divifant par $b+x$, je trouve $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{ax}{b+x}$, & comme nous avons trouvé ci-deffus CM $= \sqrt{x^2+y^2}$ donc CM $= \frac{ax}{b+x}$.

Or ayant trouvé ci-deffus $z, a :: x$, CM, nous avons par conféquent CM $= \frac{ax}{z}$; comparant donc cette va-

$$\frac{ax}{b+x} = \frac{ax}{z}$$

$$\frac{1}{b+x} = \frac{1}{z}$$

$$z = b + x$$

$$z - b = x$$

leur $\frac{ax}{z}$ de CM, avec sa valeur $\frac{ax}{b+x}$, j'ai $\frac{ax}{b+x}=\frac{ax}{z}$; d'où je tire $z-b=x$.

Je mets cette valeur de x dans $CM=\frac{ax}{z}$, & j'ai $CM=\frac{az-ab}{z}$, & comparant cette valeur de CM avec sa valeur $CM=2a-\frac{2bz}{a}$, j'ai $\frac{az-ab}{z}=2a-\frac{2bz}{a}$, & multipliant par a, puis par z, puis ajoûtant de part & d'autre $2bz^2$ & a^2b, & retranchant $2a^2z$, enfin divisant par $2b$, je trouve $z^2-\frac{a^2z}{2b}=\frac{1}{2}a^2$.

$$\frac{ax}{z}=\frac{az-ab}{z}=CM$$
$$\frac{az-ab}{z}=2a-\frac{2bz}{a}$$
$$\frac{a^2z-a^2b}{z}=2a^2-2bz$$
$$a^2z-a^2b=2a^2z-2bz^2$$
$$2bz^2-a^2z=a^2b$$
$$z^2-\frac{a^2z}{2b}=\frac{a^2}{2}$$
$$z^2-\frac{a^2b}{2b}+\frac{a^4}{16b^2}=\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{16b^2}$$
$$\left\{\begin{matrix} z-\frac{a^2}{4b} \\ \frac{a^2}{4b}-z \end{matrix}\right. = \sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{16b^2}}$$
$$z=\frac{a^2}{4b}\pm\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{16b^2}}$$

Cette équation étant du second degré je la resous selon les regles que j'ai enseignées dans l'*Arithmetique des Geometres*, en prenant la moitié $\frac{a^2}{4b}$ du coefficient du second terme, puis l'élevant au quarré $\frac{a^4}{16bb}$, je l'ajoûte de part & d'autre à l'équation, & tirant la racine quarrée de l'un & l'autre membre, je trouve $z-\frac{a^2}{4b}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{16bb}}$, ou $\frac{a^2}{4b}-z=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{16bb}}$, ainsi les deux racines de l'équation sont $z=\frac{a^4}{4b}\pm\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{16bb}}$, à sçavoir + pour la véritable racine, & — pour la fausse.

Or comme nous cherchons ici la plus grande ordonnée prise du côté de CF, où sont les $-z$, c'est par conséquent la fausse racine qui doit nous servir. Supposant donc $b=a$, & mettant cette valeur de b dans la fausse racine, nous avons $z=\frac{1}{4}a-\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{16}}=\frac{1}{4}a-\sqrt{\frac{8a^2+a^2}{16}}=\frac{1}{4}a-\sqrt{\frac{9a^2}{16}}=\frac{1}{4}a-\frac{3}{4}a=-\frac{1}{2}a$, ainsi prenant sur CF (*Fig.* 96.) la partie $CO=\frac{1}{2}a$, & menant l'ordonnée Oo, puis du centre C par o la droite $Cy=2a$

[illegible], c'est-à-dire, en mettant au lieu de z sa valeur $-\frac{1}{2}a$; [illegible] sa valeur a, faisant $Cy = 2a - \frac{2a}{a} \times -\frac{1}{2}a = 3a$, [illegible] yY sera la plus grande, or les triangles semblables [illegible], donnent Co, $CO :: Cy$, CY, donc a, $-\frac{1}{2}a :: 3a$, [illegible] $= CY$, c'est-à-dire, prenant $CY = \frac{3}{2}a$, la droite CY sera l'abscisse correspondante à la plus grande ordonnée; or le triangle rectangle CYy donne $\overline{Yy}^2 = \overline{Cy}^2 - \overline{CY}^2$, donc $\overline{Yy}^2 = 9a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \frac{27}{4}a^2$, donc $Yy = \sqrt{\frac{27}{4}a^2}$.

On trouvera de la même façon la plus grande ordonnée lorsque a sera plus grand ou moindre que b, en mettant dans la fausse racine la valeur de b en a, c'est-à-dire la valeur de b exprimée par le rapport qu'elle a avec a, & achevant le reste comme nous venons de faire.

Il faut remarquer ici que si l'on vouloit prendre la véritable racine pour trouver la plus grande ordonnée du côté de CE, cette racine donneroit une valeur plus grande qu'il ne faut, car en faisant $b = a$ on auroit $z = a$, & en faisant b moindre que a on trouveroit z plus grand que a, & enfin en faisant b plus grand que a on trouveroit une valeur de z plus grande que celle que nous avons trouvée ci-dessus. Or cela doit être de même, & en voici la raison, ce qui fera voir en même tems la sûreté des regles que les nouveaux calculs prescrivent.

Quand j'ai dit que la courbe avoit deux plus grandes ordonnées j'y ai mis une restriction, en disant qu'il y en avoit une plus grande du côté de CE, si on ne faisoit attention qu'aux ordonnées qui aboutissent à la convexité de la courbe, & dans ce sens là nous avons trouvé cette plus grande ordonnée; mais à proprement parler, c'est-à-dire, en prenant toutes les ordonnées, soit qu'elles aboutissent à la convexité de la courbe ou à la concavité, il n'y en a qu'une qui soit la plus grande, & comme celle là se trouve du côté de CF où sont les $-z$, c'est aussi la fausse racine qui a dû nous la déterminer; quant à la vraye, comme elle est inutile, elle ne doit donner que des grandeurs dont la construction même de la courbe nous montre l'absurdité, & par cela même elle nous sert à connoître, & à nous assurer que la courbe ne peut avoir qu'une plus grande ordonnée.

PROPOSITION

PROPOSITION LXXVII.

225. *Si un cercle* X (Fig. 99.) *roule sur la circonférence d'un cercle immobile* V *qui lui est égal, & que sur le diametre du cercle* X *on ait marqué un point* M, *qui soit ou dans l'aire du cercle, ou sur la circonférence, ou hors de l'aire, en supposant que ce diametre ait été prolongé, la courbe décrite par ce point* M *pendant le tems de la revolution du cercle* X, *est la même courbe que nous avons considerée dans la Proposition précedente.*

DEMONSTRATION.

Supposons que la revolution du cercle X ait commencé au point B, & que ce cercle ait déja parcouru l'arc BH; je prens l'arc DH égal à l'arc BH, & le point D est le point où le cercle X a commencé sa revolution, c'est-à-dire que le point D étoit sur le point B au commencement de la revolution, & le diametre D*d* étoit sur la direction du rayon AB. Supposons que le point M soit pris sur le prolongement de *d*D, & que ce point décrive la courbe LCM*n*, je joins les deux centres A, E par la droite AE; du point A par le point B je mene la droite indéfinie AG, & du point E par le point D la droite EO qui coupe AG en O; je prens sur AG la droite AC égale à la droite EM, & du point C pris pour centre, & avec un rayon CN $=$ ED $=$ AB, je décris un cercle T; enfin du point C par le point M je mene le rayon CN, & du point N la droite NG perpendiculaire à RG.

Je nomme CN $=$ AB $=$ ED $= a$, EM $=$ AC $= b$, & CG $= z$, l'arc BH étant égal à l'arc DH, l'angle OAE est égal à l'angle OEA, & par conséquent OA $=$ OE, & à cause de CA $=$ ME, on a l'angle OCM égal à l'angle OAE; or le point H étant le milieu de la base AE du triangle isoscele AOE, la droite OH est perpendiculaire sur AE, & le triangle rectangle AOH est semblable au triangle rectangle CNG. Donc CG, CN :: AH, AO, ou $z, a :: a\, \frac{aa}{z} =$ AO, donc OC $=$ OA $-$ AC $= \frac{aa}{z} - b$, or à cause des triangles semblables OAE, OCM, j'ai OA, AE :: OC, CM, donc $\frac{aa}{z}, 2a :: \frac{aa}{z} - b, 2a - \frac{2bz}{a} =$ CM; donc par la Proposition précédente le point M est un point de la courbe que nous avons décrite par cette Proposition; or le point

M est aussi un point de la courbe que M décrit pendant la revolution du cercle X, & la même chose que nous venons de prouver se prouvera aussi du point M dans quelque endroit de sa revolution que le cercle X se trouve, donc la courbe que le point M décrit est la même que nous avons décrite dans la Proposition précédente, ainsi cette courbe est une épicycloïde.

Et la même chose se prouveroit si le point M étoit ou sur la circonférence du cercle X ou en dedans de l'aire.

COROLLAIRE.

226. Supposons donc que le cercle V (*Fig.* 190.) soit le cercle immobile, le cercle X, le cercle mobile, & que le commencement de la revolution soit le point C, de ce point pris pour centre je décris le demi-cercle FNE, & supposant que le point décrivant soit au point C sur la circonférence du cercle X, c'est-à-dire, supposant $b = a$, il est visible que la courbe décrite par ce point sera la même que celle de la (*Fig.* 96.) qui suppose $b = a$.

Supposant que le point décrivant soit en L, c'est-à-dire hors de l'aire du cercle X & de sa circonférence, il est visible que la courbe LCM est la même que celle de la Figure 97. qui suppose b plus grand que a.

Enfin supposant que le point décrivant soit en K dans l'aire du cercle X, la courbe CN sera la même que celle de la Figure 99. qui suppose b moindre que a.

Ainsi quand b est plus grand que a, l'excès CL de EL sur EC marque de combien b surpasse a, & quand b est moindre que a la différence CK de EC à EK marque de combien a surpasse b.

PROPOSITION LXXVIII.

227. *Trouver une courbe* GMC (Fig. 101.) *de telle nature qu'un corps qui viendra à la parcourir s'approche du centre de la terre d'un mouvement uniforme, en supposant que les directions du corps dans tous les points de la courbe tendent toutes au point* C, *que nous regarderons comme le centre de la terre.*

SOLUTION.

Nous avons déja resolu ce Problême (*N.* 212.) en supposant que les directions étoient paralleles entr'elles, & nous avons

rendu raiſon de cette ſuppoſition dans la remarque de la même Propoſition (*N.* 213.) ; mais comme en prenant les choſes dans l'exacte rigueur les directions ne ſont pas paralleles, nous allons reſoudre la queſtion en les ſuppoſant telles qu'elles ſont.

Je prens ſur la courbe deux points infiniment proches M, *m*; du centre C je décris les arcs de cercle MP, *mp*, ainſi quand le corps eſt en M la droite AP marque de combien il eſt deſcendu vers le centre, en ſuppoſant que le mouvement ait commencé en A ; du même centre C je décris l'arc indéfini AL, & je mene par les points M, *m*, les droites CN, *cn*; je nomme la diſtance AC $=b$, l'abſciſſe AP $=x$, l'arc AN $=y$; donc P*p* $=$ MR $=dx$, N*n* $=dy$, PC $=$ MC $=$ AC $-$ AP $=b$, NC $=$ AC $=b$, & MC $=m$C $=$ PC $=b-x$.

Les ſecteurs ſemblables NC*n*, *m*CR donnent CN, N*n* :: C*m*, *m*R, donc b, $dy :: b-x$, $\frac{\overline{b-x}\times dy}{b}=m\text{R}$; le triangle rectangle *m*RM donne $\overline{\text{MR}}^2+\overline{m\text{R}}^2=\overline{m\text{M}}^2$, donc $\overline{m\text{M}}^2=dx^2+\frac{\overline{b-x}^2\times dy^2}{bb}=\frac{bbdx^2+\overline{b-x}^2\times dy^2}{bb}$.

Par l'hypotèſe le tems de la deſcente le long de GM eſt au tems de la deſcente le long de M*m*, comme AP eſt à P*p*, ainſi ſuppoſant que le tems de la deſcente le long de GM ſoit exprimé par AP $=x$, le tems de la deſcente le long de P*p* ſera P*p* $=dx$, & dans l'hypotèſe de Galilée la viteſſe acquiſe en M ſera $\sqrt{\text{AP}}=\sqrt{x}$; or l'eſpace M*m* étant infiniment petit, le mouvement du corps le long de cet eſpace peut être regardé comme uniforme, & dans le mouvement uniforme les eſpaces ſont comme les produits des tems par les viteſſes, donc l'eſpace M*m* $=dx\sqrt{x}$, & par conſéquent $\overline{\text{M}m}^2=xdx^2$; or nous avons trouvé $\text{M}m^2=\frac{bbdx^2+\overline{b-x}^2\times dy^2}{bb}$, donc nous avons l'équation qu'on voit ici; & multipliant tout par bb, puis retranchant $bbdx^2$ de part & d'autre, puis tirant la racine quarrée, enſuite diviſant par $b-x$, & enfin tirant l'integrale, j'ai $\int\frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x}=y$.

$$xdx^2=\frac{bbdx^2+\overline{b-x}^2\times dy^2}{bb}$$

$$bbxdx^2=bbdx^2+\overline{b-x}^2\times dy^2$$

$$bbxdx^2-bbdx^2=\overline{b-x}^2\times dy^2$$

$$bdx\sqrt{x-1}=\overline{b-x}\times dy$$

$$\frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x}=dy$$

$$\int\frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x}=y$$

Il eſt viſible qu'en déterminant x, l'integrale du premier membre de cette équation donnera la valeur de y ou de l'arc AN, laquelle déterminera le point M de la courbe cherchée, puiſqu'on n'aura qu'à tirer de N en C la droite NC, & prendre ſur cette droite la partie $CM = AC - AP$; il ne s'agit donc que de trouver l'integrale de ce premier membre, & c'eſt ce que nous allons faire.

Je ſuppoſe que $\int \frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x}$ multiplié par l'unité, eſt l'aire d'une courbe; donc ſon élement ſera $\frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x}$, & ſon ordonnée ſera $\frac{b\sqrt{x-1}}{b-x}$, d'où je tire $b-x, b :: \sqrt{x-1}, \frac{b\sqrt{x-1}}{b-x}$; or en ſuppoſant $AG = 1$, le troiſiéme terme $\sqrt{x-1}$ eſt l'ordonnée d'une parabole dont le parametre $= 1$, & dont l'abſciſſe eſt $= GP = AP - AG = x - 1$; car par la proprieté de cette parabole le quarré $\overline{PQ}^2$ de l'ordonnée PQ eſt égal à l'abſciſſe GP multipliée par le parametre, donc $\overline{PQ}^2 = \overline{x-1} \times 1 = x - 1$, & par conſéquent $PQ = \sqrt{x-1}$; puis donc que l'élement $\frac{b\sqrt{x-1}}{b-x}$ eſt quatriéme proportionnel aux trois termes $b - x = CP$, $b = CA$, & $PQ = \sqrt{x-1}$, je décris une parabole GQR qui a ſon ſommet en G, & avec un parametre $= 1 = AG$, puis menant l'ordonnée PQ, enſuite tirant du point A la droite AS parallele à cette ordonnée, & la droite CQS par les points C, Q, les triangles rectangles CPQ, CAS donnent CP, CA :: PQ, AS, donc $b-x, b :: \sqrt{x-1}, \frac{b\sqrt{x-1}}{b-x}$, & par conſéquent menant $PT = AS$, la droite PT eſt une ordonnée de la courbe dont l'aire eſt $\int \frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x}$ multiplié par l'unité, & faiſant la même conſtruction à l'égard de tous les AP, j'ai la courbe GTV, faiſant donc avec la hauteur AG un rectangle AG*ga* égal à l'aire GPT que je ſuppoſe connue, puis diviſant par $AG = 1$, la droite G*g* ſera $\int \frac{bdx\sqrt{x-1}}{\overline{b-x} \times 1} = \int \frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x} = y = AN$; & faiſant la même choſe à l'égard de toutes les portions GPT de la courbe GTV, on aura les arcs AN correſpondans; & par conſéquent tirant de chaque point N les droites NC, & du centre C par chaque point P décrivant les arcs PM, les interſections des arcs PM & des droites correſpondantes NC donneront autant de points

de la courbe cherchée GMC qui eſt la courbe du Problême.

Pour connoître la nature de la courbe GTV, ſuppoſons l'ordonnée PT $=0$, donc $\frac{b\sqrt{x-1}}{b-x}=0$, & multipliant par $b-x$, puis diviſant par b, on aura $\sqrt{x-1}=0$; & élevant au quarré, puis donnant 1 de part & d'autre, on aura $x=1$, ce qui fait voir que quand l'ordonnée eſt zero, l'abſciſſe x eſt égale à AG $=1$.

Suppoſons PT $=\infty$, donc $\frac{b\sqrt{x-1}}{b-x}=\infty$; or quand une fraction eſt infiniment grande, ſon dénominateur eſt égal à zero; donc $b-x=0$, & $b=x$; donc quand l'abſciſſe devient égale à AC $=b$, l'ordonnée CY eſt infinie, & par conſéquent cette ordonnée eſt l'aſymptote de la courbe.

Pour trouver l'équation de la courbe GTV rapportée à la droite AS, je nomme TS $=$ AP $=x$, AG $=a$, & AS $=$ PT $=z$, donc GP $=$ AP $-$ AG $=x-a$; or dans la parabole GPQ, j'ai $\overline{PQ}^2=GP\times AG$, donc $\overline{PQ}^2=ax-aa$, & PQ $=\sqrt{ax-aa}$, mais les triangles ſemblables CPQ, CAS, donnent CP, PQ :: CA, AS, donc $b-x, \sqrt{ax-aa} :: b, \frac{b\sqrt{ax-aa}}{b-x}=AS$, donc $z=\frac{b\sqrt{ax-aa}}{b-x}$, & par conſéquent $z^2=\frac{bbax-bbaa}{b^2-2bx+xx}$, d'où je tire $b^2z^2-2bxz^2+xxz^2=bbax-bbaa$, ou $x^2z^2-2bxz^2+b^2z^2-abbx+a^2b^2=0$ qui eſt l'équation cherchée.

Si dans cette équation je fais AS $=z=0$, j'ai $a^2b^2-abbx=0$, d'où je tire $a=x$, c'eſt-à-dire que lorſque l'abſciſſe AS eſt égale à zero, l'ordonnée ST devient égale à AG $=a$, ce qui s'accorde avec ce qui a été dit ci-deſſus.

Pour connoître l'équation de la courbe GMC du Problême, je nomme AG $=1$, GP $=u$, le petit arc mR $=dz$; donc P$p=du$, & $\overline{Mm}^2=\overline{mR}^2+\overline{MR}^2=dz^2+du^2$; or nous avons trouvé ci-deſſus $\overline{Mm}^2=xdx^2$, donc $xdx^2=dz^2+du^2$; mais $x=u+1$ $=AG+GP$, donc $dx=du$, & $dx^2=du^2$, & par conſéquent $xdx^2=\overline{u+1}\times du^2=udu^2+du^2$; ainſi j'ai $udu^2+du^2=dz^2+du^2$, d'où je tire $udu^2=dz^2$, & tirant la racine quarrée, j'ai $u^{\frac{1}{2}}du=dz$, dont l'intégrale eſt $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}=z$, laquelle étant élevée au quarré donne $z^2=\frac{4}{9}u^3$, ou $\frac{9}{4}z^2=u^3$; or z étant l'intégrale de $dz=m$R, eſt par conſéquent égale à l'arc MP qui eſt l'ordon-

car par la proprieté du cercle, on a AG, GD :: GD, GC; donc AG, GD :: $\sqrt{AG}$, $\sqrt{GC}$, les triangles ſemblables DGE, FGE donnent DG, GE ou AG :: FG, GC, ou AG, GD :: GC, GF, donc GC, GF :: $\sqrt{AG}$, $\sqrt{GC}$, ou GF, GC :: $\sqrt{GC}$, $\sqrt{AG}$, c'eſt-à-dire, le ſinus de l'angle GCF eſt au ſinus de complement de cet angle comme $\sqrt{GC}$, $\sqrt{AG}$, donc cet angle eſt l'angle cherché.

Pour mener la droite CM (*Fig.* 101.) qui paſſe par le point d'inflexion, je prens ſur AC (*Fig.* 102.) la droite $AH = \frac{1}{2}AC$; je décris un demi-cercle ſur cette droite, & menant au point G l'ordonnée GV, je mene les droites AV, HV; je fais $VK = \frac{1}{4}AG = AL$, & menant AK je fais $LO = AK$; le point O eſt le point de l'axe auquel répond le point d'inflexion de la courbe; car par la proprieté du cercle, j'ai AG, AV :: AV, AH, ou $\frac{1}{2}AC$, donc $\overline{AV}^2 = AG \times \frac{1}{2}AC$, & $AV = \sqrt{AG \times \frac{1}{2}AC}$; or l'angle AVK étant droit, on a $\overline{AK}^2 = \overline{AV}^2 + \overline{VK}^2$, ou $\frac{1}{16}\overline{AG}^2$, donc on aura $AK = \sqrt{AG \times \frac{1}{2}AC + \frac{1}{16}\overline{AG}^2}$; mais $LG = \frac{3}{4}AG$, & $LO = AK$, donc $GO = LO$, ou $AK - LG = \sqrt{AG \times \frac{1}{2}AC + \frac{1}{16}\overline{AG}^2} - \frac{3}{4}AG$, & c'eſt la valeur de $u = GP$ (*Fig.* 101.) que nous avons trouvée ci-deſſus; faiſant donc GP (*Fig.* 101.) égal à GO (*Fig.* 102.) & du centre C menant l'arc PM, le point M ſera le point d'inflexion cherché.

L'équation de la courbe GMC étant $z = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$, ſa différence eſt $dz = du\sqrt{u}$; mais $u = x - 1$, donc $du = dx$, & $dz = dx\sqrt{x-1}$; Suppoſant donc $mR = dz = 0$, nous aurons $dx\sqrt{x-1} = 0$, donc $x - 1 = 0$, & $x = 1$, c'eſt-à-dire quand l'arc MP ſera infiniment petit, ou quand l'ordonnée ſera égale à zero, ce qui arrive au point G, on aura $x = 1 = AG$, mais x marque la hauteur d'où le corps doit deſcendre, donc le corps doit commencer à tomber au point A & non pas au point G.

Maintenant pour rectifier la courbe GMC nous avons $\overline{Mm}^2 = x dx^2$, donc $Mm = dx\sqrt{x}$; or Mm eſt la différence de l'arc GM, prenant donc l'intégrale, nous aurons $GM = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$; mais $x = u + 1$, donc $GM = \overline{\frac{2}{3}u + \frac{2}{3}} \times \sqrt{u+1}$, & faiſant $u = 0$ pour voir ſi l'integrale eſt complette, & effaçant dans l'intégrale les termes où u ſe trouve, le reſte eſt $\frac{2}{3} \times \sqrt{1} = \frac{2}{3}$; ainſi retranchant $\frac{2}{3}$ de

de l'integrale, j'ai $\frac{2}{3}u+\frac{2}{3}\times\sqrt{u+1}-\frac{2}{3}$, qui est la valeur de GM (selon les regles que nous avons données dans *le Calcul intégral.*)

Je prens une droite AP (*Fig.* 103.) $=$ AP (*Fig.* 101.) je décris un demi-cercle sur cette droite, & faisant AG (*Fig.* 103.) $=$ AG (*Fig.* 101.), puis prenant AD $=\frac{2}{3}$ AD, je mene l'ordonnée GB, la droite DF parallele à GB, & du point A par le point B la droite AF qui coupe DF en F; enfin je prens de E vers A la partie FH $=\frac{2}{3}$AG, & la partie AH est égale à l'arc GM (*Fig.* 101.) car par la proprieté du cercle, j'ai AP, AB :: AB, AG, donc $\overline{AB}^2 = AP\times AG$, & $AB=\sqrt{AP\times AG}=\sqrt{AP}$, à cause de AG $=1$; les triangles semblables BAG, FAD, donnent AG, AB :: AD, AF, donc $AF=\frac{AB\times AD}{AG}$, & mettant la valeur $\sqrt{AP}$ de AB, & la valeur $\frac{2}{3}$AP de AD, j'ai $AF=\frac{\frac{2}{3}AP\times\sqrt{AP}}{AG}$, & retranchant de AF la valeur $\frac{2}{3}$AG de FH, j'ai $AF-FH = AH = \frac{2AP\times\sqrt{AP}}{3\times AG}-\frac{2}{3}AG=\frac{2x\sqrt{x}}{3\times 1}-\frac{2}{3}\times 1=\frac{2x\sqrt{x}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}u+\frac{2}{3}\times\sqrt{u+1}-\frac{2}{3}$, donc, &c.

Pour avoir la quadrature de l'aire GMC (*Fig.* 101.) j'observe que l'élement de cet aire est le secteur infiniment petit C*m*R $= m\mathrm{R}\times\frac{1}{2}\mathrm{CR}$, or en faisant CG $=c$, nous avons CP $=$ CR $=c-u$; mais $m\mathrm{R}=dz=u^{\frac{1}{2}}du$, donc $\mathrm{C}m\mathrm{R}=m\mathrm{R}\times\frac{1}{2}\mathrm{CR} =\frac{1}{2}cu^{\frac{1}{2}}du-\frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}du$; tirant donc l'integrale, nous aurons $\frac{1}{3}cu^{\frac{3}{2}} -\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}=\frac{5cu-3u^2\times\sqrt{u}}{15}=\frac{5\mathrm{GC}\times\mathrm{GP}-3\overline{\mathrm{GP}}^2\times\sqrt{\mathrm{GP}}}{15\mathrm{AG}}$, à cause de AG $=1$, & ce sera la valeur de l'aire GMP, ainsi faisant GP $=$ GC, & par conséquent $u=c$, nous aurons $\frac{5c^2-3c^2\times\sqrt{c}}{15} = \frac{2c^2\times\sqrt{c}}{15}=\frac{2\mathrm{GC}\times\sqrt{\mathrm{GC}}}{15\mathrm{AB}}$ pour la valeur de l'aire entiere GMC.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'acceleration causée par la pesanteur étoit selon la loi de Galilée, c'est pourquoi nous avons trouvé que l'une des valeurs de $\overline{Mm}^2$ étoit xdx^2, par la raison que M*m* étant un espace infiniment petit, le mouvement le long de cet espace peut être regardé comme uniforme, & que dans le mouvement uniforme l'espace M*m* est comme le produit de la vitesse par le tems, ce qui donne effectivement $Mm=dx\sqrt{x}$

dans l'hypotèse de Galilée, & par conséquent $\overline{Mm}^2 = xdx^2$; mais si l'on veut prendre une autre hypothèse, voici comme on fera.

Suposé que la vitesse acquise en M ou en P soit comme $\sqrt{2bx - xx}$, ainsi que nous l'avons trouvée dans l'hypotèse du nombre 90, l'espace Mm sera donc $dx\sqrt{2bx - xx}$, & par conséquent $\overline{Mm}^2 = 2bxdx^2 - xxdx^2$, or l'autre valeur de $\overline{Mm}^2$ trouvée ci-dessus est $\frac{bbdx^2 + \overline{b - x}^2 \times dy^2}{bb}$, donc nous avons l'équation qu'on voit ici.

$$2bxdx^2 - xxdx^2 = \frac{bbdx^2 + \overline{b - x}^2 \times dy^2}{bb}$$

Et multipliant tout par bb, puis retranchant $bbdx^2$ de part & d'autre, ensuite divisant par $\overline{b - x}^2$, enfin tirant la racine quarrée, & l'intégrale de cette racine, nous aurons une valeur de y ou de l'arc AN que nous trouverons en cherchant d'abord la courbe representée par $\int \frac{bdx\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$ multiplié par 1, ce que je fais ainsi.

$$2b^3xdx^2 - bbxxdx^2 = bbdx^2 + \overline{b - x}^2 \times dy^2$$

$$2b^3xdx^2 - bbxxdx^2 - bbdx^2 = \overline{b - x}^2 \times dy^2$$

$$\frac{2b^3xdx^2 - bbxxdx^2 - bbdx^2}{\overline{b - x}^2} = dy^2$$

$$\frac{bdx\sqrt{2bx - xx - 1}}{b - x} = dy$$

$$\int \frac{bdx\sqrt{2bx - xx - 1}}{b - x} = y$$

$$\int \frac{bdx\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x} = y$$

La différence de cette courbe est $\frac{bdx\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$, & son élement est $\frac{b\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$. Je prens une droite AC (*Fig.* 104.) égale à AC (*Fig.* 101.); je prens sur cette ligne les droites AG, AP, égale aux droites AG, AP (*Fig.* 101.) du point C (*Fig.* 104.) pris pour centre, je décris sur le rayon AC le quart de cercle ACO; du point P je mene l'ordonnée PH sur laquelle je décris un demi-cercle; dans ce quart de cercle j'inscris la corde PO = AG = a, & du point O je mene l'autre corde OH.

Par la nature du cercle, le quarré de l'ordonnée PH au quart de cercle AO est égal à AP × $\overline{2AC - AG}$, donc $\overline{PH}^2 = 2bx - xx$; or dans le triangle rectangle PHO, j'ai $\overline{OH}^2 = \overline{PH}^2 - \overline{PO}^2$, ou

$\overline{AG}^2$, donc $\overline{OH}^2 = 2bx - xx - aa$, & par conséquent OH $= \sqrt{2bx - xx - aa}$.

Je prens sur PH la droite PK = OH, par le point A je mene AV parallele à PK, & du point C par le point K, je mene la droite CKV, les triangles semblables PCK, ACV donnent PC, PK :: AC, AV, donc $b - x$, $\sqrt{2bx - xx - aa}$ :: b, $\frac{b\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x} = AV$, je prolonge PK en S, & du point V menant VS parallele à AP, j'ai $PS = AV = \frac{b\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$, & par conséquent S est un point de la courbe FST dont l'aire est $\int \frac{bdx\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$, & je trouverois de la même façon tous les points de cette courbe; supposant donc cette courbe décrite, & sa quadrature connue, je fais sur $AG = a = 1$ un rectangle AG*ga* égal à l'espace PSF, & divisant ce rectangle par AG = 1, le quotient $\int \frac{bdx\sqrt{2bx - xx - aa}}{\overline{b - x} \times 1}$, ou $\int \frac{bdx\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$ = G*g* est la valeur de y ou de l'arc AN (*Fig.* 101.), & faisant la même chose à l'égard de tous les espaces PSF (*Fig.* 104.) j'ai les valeurs de tous les arcs AN (*Fig.* 101.) correspondans aux AP.

Si nous supposons que l'ordonnée PS de la courbe FST soit égale à zero, nous aurons $\frac{b\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x} = 0$; or quand une fraction est égale à zero, son numerateur est infiniment petit, donc $b\sqrt{2bx - xx - aa} = 0$, & divisant par b, puis élevant au quarré, j'ai $2bx - xx = aa$, ou $xx - 2bx = -aa$; donc ajoutant de part & d'autre le quarré bb de la moitié du coefficient du second terme, j'ai $xx - 2bx + bb = bb - aa$, & tirant la racine quarrée, j'ai $b - x = \sqrt{bb - aa}$, ou $x = b - \sqrt{bb - aa}$, je décris sur AC un demi-cercle AZC, j'y inscris la corde AZ égale à AG, & menant l'autre corde ZC, le triangle rectangle AZC donne $\overline{ZC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{ZA}^2$, ou $\overline{AG}^2$, donc $\overline{ZC}^2 = bb - aa$, & $ZC = \sqrt{bb - aa}$; je porte ZC sur AC de C en F, & j'ai $AC - FC = b - \sqrt{bb - aa}$, donc le point F est le sommet de la courbe FST, puisque nous venons de voir que quand l'ordonnée de cette courbe est égale à zero, l'abscisse est $x = b - \sqrt{bb - aa}$.

Puisque quand PS est égal à zero, nous avons $\frac{b\sqrt{2bx-xx-aa}}{b-x}=0$, donc en multipliant par $b-x$, puis divisant par b, & ensuite élevant au quarré nous avons $2bx-xx-aa=0$, ou $2bx-xx=aa$, & par conséquent $\sqrt{2bx-xx}=a$, c'est-à-dire quand l'ordonnée PS de la courbe FST est égale à zero, l'ordonnée correspondante FX du quart de cercle est égale à AG, & en effet cela est visible par la construction que nous avons faite ci-dessus, car quand l'ordonnée PH du quart de cercle est égale à AG, la corde PO = AG tombe nécessairement sur PH, & lui est égale, donc la corde DH devient égale à zero, de même que PK, & par conséquent les triangles rectangles CPK, CAV, donnent aussi AV = 0.

Si nous supposons $x=b$, nous aurons $\frac{b\sqrt{2bx-xx-aa}}{b-x}=\frac{b\sqrt{2bb-bb-aa}}{b-b}=\frac{b\sqrt{bb-aa}}{0}$, c'est-à-dire lorsque l'abscisse est égale à AC, l'ordonnée PM est infinie, & par conséquent elle est l'asymptote de la courbe FST.

Et en suivant les mêmes regles, on trouvera l'équation de la courbe GMC (*Fig.* 101.) dans l'hypotèse presente, sa nature, ses proprietés, &c.

CHAPITRE IX.

Du mouvement des Pendules & du centre d'oscillation.

DEFINITIONS.

228. SI une ligne AB (*Fig.* 105.) perpendiculaire à l'horizon peut tourner librement autour du point fixe A, & qu'à son extrémité elle ait un corps grave B qu'on puisse faire monter & descendre le long des arcs CB, BD, décrites par la ligne AB, ce corps B joint à la ligne AB s'appelle un *pendule*; on le nomme *pendule simple* lorsqu'il n'y a qu'un seul poids B à l'extrémité B, & *pendule composé* lorsqu'il y a plusieurs poids B, H, F, &c. sur différens points de la ligne AB, où ils demeurent fixes.

PROPOSITION LXXIX.

229. *Si un pendule* AB (Fig. 105.) *perpendiculaire à l'horison est*

mis dans la ſituation AC *oblique à l'horizon, le corps grave* C *deſcendra juſqu'en* B, *d'où il remontera le long de l'arc* BD *égal à l'arc* BC, *de là il deſcendra juſqu'en* B, *d'où il remontera le long de l'arc* BC = BD, *& il continuera de même à deſcendre & à monter des arcs égaux, ſi le mouvement ſe fait dans un milieu non reſiſtant.*

DEMONSTRATION.

Le point fixe A empêchant le pendule de tomber, on peut regarder ce point comme la baſe qui ſoutient le corps, ainſi quand on met ce corps de façon que la direction de ſa peſanteur, c'eſt-à-dire, la ligne AB menée de ſon centre de gravité B perpendiculairement à l'horizon paſſe par la baſe A, ce corps doit être en repos; mais quand on met ce corps en un autre point C, de ſorte que la direction HI de ſa peſanteur ne paſſe pas par la baſe A, il faut néceſſairement que le centre de gravité du corps, & par conſéquent le corps C deſcende; or comme il ne peut deſcendre le long de la droite CI, à cauſe de la ligne CA, qui le retient, il deſcend le long de l'arc CB, & étant arrivé en B, il ſeroit en repos s'il n'avoit acquis par ſa deſcente une viteſſe qui l'oblige de continuer ſon mouvement; mais à cauſe de la ligne AB, auquel il eſt attaché, il ne peut ſe mouvoir qu'en remontant le long de l'arc BD; or lorſqu'un corps étant deſcendu pendant un certain tems par la force de ſa peſanteur vient à remonter, la viteſſe qu'il a acquiſe à la fin de la deſcente le fait remonter autant qu'il étoit deſcendu, ainſi que nous avons dit plus haut; donc le pendule étant parvenu en B remonte le long de l'arc BD égal à l'arc BC; mais ce pendule ſe trouvant en D où toute la viteſſe qu'il avoit acquiſe en B ſe trouve perdue recommence à deſcendre par la force de ſa peſanteur juſqu'en B où ſa viteſſe acquiſe le fait remonter juſqu'en C, & ainſi de ſuite; donc, &c.

REMARQUE.

230. Nous ſuppoſons que le mouvement du pendule ſe fait dans un milieu non reſiſtant, car tout le monde ſait que dans l'air le pendule monte toujours un peu moins qu'il ne deſcend, ce qui fait qu'à la fin il s'arrête dans la poſition AB perpendiculaire à l'horizon, & cela vient en partie de la reſiſtance de l'air, & en partie du frottement qui ſe fait autour du point fixe C.

DEFINITION.

231. Le mouvement du corps le long de l'arc CB, qu'il descend joint au mouvement le long de l'arc BD qu'il remonte, s'appelle *vibration* du pendule ou *oscillation*; ainsi le mouvement de C en D est une vibration, celui de D en C est une autre vibration, & ainsi de suite.

Toute ligne droite parallele à l'horizon, & qui passe par le point A, s'appelle *axe de vibration* ou *d'oscillation.*

PROPOSITION LXXX.

232. *Si un corps grave* B (Fig. 106.) *attaché à un fil* AB *est suspendu par un point* A, *& qu'après avoir mené par le point* A *une droite* RS *parallele à l'horizon, on décrive sur les bases* AR, AS, *deux demi-cycloïdes* CEA, DHA, *dont les diametres* RC, SD *soient chacun égaux à la moitié de la longueur du fil, on vienne à mettre le corps* A *en* C, *ensorte que le fil enveloppe la demi-cycloïde* CEA, *ou en* F, *ensorte qu'il n'y ait qu'une partie du fil qui enveloppe un arc* AE, *la vibration* CD *se fera dans un tems égal à celui de la vibration* FG, *en supposant toujours que le mouvement du pendule se fasse dans un milieu non resistant.*

DEMONSTRATION.

Nous avons supposé dans la construction que le fil AB fût double du diametre RC ou SD, afin que le fil AB pût envelopper la demi-cycloïde CEA ou DHA, laquelle est aussi double du diametre RC ou SD, ainsi que nous l'avons demontré dans la *Théorie & Pratique du Geometre*; or le corps venant à descendre de C en B, le fil se developpe, & comme sa partie developpée, par exemple la partie FE, est toujours tendue, & par conséquent perpendiculaire à la courbe CFBD, il s'ensuit que l'arc CFB est la ligne de developpement de la demi-cycloïde CEA, & que par conséquent la courbe CFB est une demi-cycloïde égale à la demi-cycloïde CEA, comme il a été démontré dans le même ouvrage que je viens de citer, cela posé.

Quand le corps est descendu de C en B, sa vitesse acquise le fait remonter le long de l'arc BD égal à l'arc CB dans un tems égal à celui qu'il a employé à descendre le long de l'arc CB; de même quand le corps étant mis en F a descendu de F en B, sa vitesse acquise le fait remonter le long de l'arc BG égal à FG

dans un tems égal à celui qu'il a employé à descendre le long de l'arc FB; or que le corps descende de C en B, ou seulement de F en B, le tems qu'il y employe est toujours le même (*N.* 204.) donc le tems de la demi-vibration CB est égal au tems de la demi-vibration FB, & par conséquent le tems de la vibration entiere CD est égal au tems de la vibration entiere FG.

COROLLAIRE I.

233. Il suit de là que quelques inégales que puissent être les vibrations du pendule que nous venons de décrire, les tems de ces vibrations sont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

234. Si du centre A & du rayon AB on décrit un cercle, & qu'on prenne sur sa circonférence des arcs BM, BN, qui ne soient pas bien grands, ces arcs ne différeront guéres des arcs correspondans BO, BP, de la demi-cycloïde BC; or le tems que le corps mis en O employeroit à descendre le long de OB, est égal au tems que le même corps mis en P employeroit à descendre le long de PB, donc le tems que le corps employeroit à descendre le long de MB ne seroit pas sensiblement différent au tems que ce corps mis en N employeroit à descendre le long de NB; c'est-à-dire, que si le pendule au lieu de décrire la cycloïde CBD décrivoit un arc de cercle, les tems des vibrations inégales M*m*, N*n*, &c. qui ne sont pas bien grandes seroient sensiblement égaux, & l'expérience est conforme à ce que nous venons de dire.

PROPOSITION LXXXI.

235. *Trouver le tems d'une vibration de pendule entre deux demi-cycloïdes* (Fig. 107).

SOLUTION.

Supposons qu'on veuille sçavoir la durée de la vibration HV (*Fig.* 107), nous chercherons d'abord la durée de la descente le long de HB, après quoi il est visible que nous aurons la durée de la vibration entiere, pour cela.

Je mene la droite HV qui coupe ZB en L, & sur LB pris pour diametre, je décris un demi-cercle LNB, enfin je mene les ordonnées infiniment proches PM, *pm*.

Je nomme le diametre $ZB = 2a$, le diametre $LB = 2r$, & l'abſciſſe $LP = x$; donc $PB = 2r - x$, & par la proprieté du cercle $PN = \sqrt{2rx - xx}$; de plus $Pp = NO = rm = dx$, & ſi je nomme t le tems de la deſcente le long de HM, j'aurai dt pour le tems de la deſcente le long de Mm.

Maintenant la viteſſe acquiſe à la fin de HM étant la même que la viteſſe acquiſe à la fin de $LP = x$ (*N.* 197.) cette viteſſe ſelon la loi de Galilée ſera $= \sqrt{x}$; or le mouvement le long de l'arc infiniment petit Mm, pouvant être regardé comme uniforme, l'eſpace Mm ſera $dt \times \sqrt{x}$ (*N.* 17.) & par conſéquent $dt = \frac{Mm}{\sqrt{x}}$.

Si du point M je mene la tangente MT, cette tangente ſera parallele à la corde QB par la proprieté de la cycloïde, donc les triangles Mmr, QBP étant ſemblables, donnent $Mm, rm :: QB, BP$, or par la proprieté du cercle nous avons $\because ZB, QB, BP$, donc $QB, BP :: \sqrt{ZB}, \sqrt{BP}$, & par conſéquent $Mm, rm :: \sqrt{ZB}, \sqrt{BP}$, d'où je tire $Mm = \frac{rm \times \sqrt{ZB}}{\sqrt{BP}} = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{2r - x}}$; & mettant cette valeur de Mm dans $dt = \frac{Mm}{\sqrt{x}}$, j'ai $dt = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{2rx - xx}}$; & multipliant le numérateur & le dénominateur du ſecond membre par $2r$, j'ai $dt = \frac{2rdx\sqrt{2a}}{2r\sqrt{2rx - xx}}$; or ſi on cherche la valeur de l'arc LN, ainſi que nous avons déja fait pluſieurs fois dans cet Ouvrage, on trouvera $LN = \int \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, donc ſon élement $Nn = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ & par conſéquent $dt = \frac{2\sqrt{2a} \times Nn}{2r}$, & $t = \frac{2\sqrt{2a}}{2r} \times \int Nn$; mais l'integrale de Nn eſt l'arc LN, donc $t = \frac{2\sqrt{2a} \times LN}{2r}$, or quand t marque le tems le long de l'arc entier HB, l'arc LN devient égal à la demi-circonférence LNB, donc on a alors $t = \frac{2\sqrt{2a} \times LNB}{2r}$, d'où l'on tire $2r, LNB :: 2\sqrt{2a}, t$, mais $2\sqrt{2a} = \frac{2\sqrt{2a} \times \sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} = \frac{2 \times 2a}{\sqrt{2a}} = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$; or $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ eſt la moitié de la viteſſe acquiſe à la fin de ZB, c'eſt-à-dire acquiſe en B, & ſi le mouvement le long de ZB étoit uniforme, le corps parcourroit ZB avec la viteſſe $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$, dans le même tems qu'il le parcourt avec ſon mouvement acceleré, donc l'eſpace ZB ou $2a$ ſeroit $T \times \frac{1}{2}\sqrt{2a}$

$\sqrt{2a}$ en nommant le tems T (*N.* 17.) & par conſéquent on auroit $T \times \frac{1}{2}\sqrt{2a} = 2a$, donc $T = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}} = 2\sqrt{2a}$, c'eſt-à-dire que $2\sqrt{2a}$ exprime le tems que le corps employeroit à parcourir ZB avec la viteſſe uniforme $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$, & par conſéquent celui qu'il employe à parcourir le même eſpace avec ſon mouvement uniformement acceleré ; puis donc que nous avons $2r$, LNB : : $2\sqrt{2a}$, t, ou t, $2\sqrt{2a}$: : LNB, $2r$; il s'enſuit que le tems de la deſcente le long de l'arc HB, eſt au tems de la deſcente le long du diametre du cercle générateur, comme la circonférence du demi-cercle LNB eſt au diametre $2r$ de ce demi-cercle ; mais le rapport du diametre à la demi-circonférence eſt le même dans tous les cercles, donc le tems de la deſcente le long de HB, ou de la demi-vibration HB, eſt au tems de la deſcente le long du diametre du cercle générateur, comme la demi-circonférence du cercle générateur eſt à ſon diametre.

Mais la vibration HV eſt double de HB, donc le tems de cette vibration eſt à celui de la deſcente le long du diametre ZB comme la circonférence du cercle générateur eſt au diametre ZB.

PROPOSITION LXXXII.

236. *La peſanteur des corps eſt moindre dans les lieux où les vibrations d'un même pendule ſont plus lentes, & elle eſt plus grande dans les lieux où les vibrations ſe font plus promptement.*

DEMONSTRATION

Le tems de la vibration CBD (*Fig.* 107.) eſt au tems de la deſcente le long du diametre ZB de la cycloïde comme la circonférence du cercle générateur eſt à ſon diametre, & ce rapport eſt conſtant, donc ſi le tems de la vibration CBD devient plus grand, le tems de la deſcente le long de ZB devient auſſi plus grand ; mais quand le tems de la deſcente le long de ZB devient plus grand, le mouvement eſt moindre puiſqu'il y a moins de viteſſe, donc la peſanteur qui eſt la cauſe de ce mouvement eſt auſſi moindre.

Et on prouvera de la même façon que ſi les vibrations du pendule ſe font plus promptement, la peſanteur eſt plus grande.

PROPOSITION LXXXIII.

237. *Si deux pendules* CA, EF (Fig. 108.) *font leurs vibrations*

ſur deux arcs ſemblables, le tems d'une vibration du premier CA *eſt au tems de la vibration du ſecond* EF, *comme la racine quarrée de la longueur* CA *eſt à la racine quarrée de la longueur* EF.

DEMONSTRATION.

Si les deux arcs DB, GH ſont des arcs de cycloïde, le tems de la vibration DB ſera au tems de la deſcente le long du diametre du cercle générateur, c'eſt-à-dire le long de $\frac{1}{2}$ CA comme la circonférence du cercle au diametre, de même le tems de la vibration GH eſt au tems de la deſcente le long du diametre du cercle générateur, c'eſt-à-dire, le long de $\frac{1}{2}$EF, comme la circonférence du cercle eſt au diametre; donc le tems de la vibration DB eſt au tems de la vibration GH, comme le tems de la deſcente le long de $\frac{1}{2}$ CA eſt au tems de la deſcente le long de $\frac{1}{2}$ EF, ou comme $\sqrt{\frac{1}{2}CA}$ eſt à $\sqrt{\frac{1}{2}EF}$, ou enfin comme $\sqrt{CA}$ eſt à $\sqrt{CF}$.

Les vibrations ſur différens arcs d'une même cycloïde étant toutes égales entr'elles (*N.* 233.), il eſt viſible qu'il n'eſt pas néceſſaire que les arcs DB, GH ſoient ſemblables, pour faire que les tems des vibrations des deux pendules ſoient entr'eux comme les racines quarrées des longueurs.

Si les arcs DB, GH, ſont des arcs ſemblables de cercles; le tems de la deſcente le long de DA eſt au tems de la deſcente le long de GF, comme $\sqrt{DA}$ eſt à $\sqrt{GF}$ (*N.* 205); mais à cauſe de la ſimilitude des arcs DA, GF, on a DA, GF :: CA, EF, donc $\sqrt{DA}$, $\sqrt{GF}$ :: $\sqrt{CA}$, $\sqrt{EF}$, & par conſéquent le tems de la deſcente le long de DA eſt au tems de la deſcente le long de GF, comme $\sqrt{CA}$ eſt à $\sqrt{EF}$; d'où il ſuit que le tems de la vibration entiere DB eſt au tems de la vibration entiere GH comme $\sqrt{CA}$ eſt à $\sqrt{EF}$.

COROLLAIRE.

238. Donc quand les arcs ſont ſemblables, les longueurs CA, EF des pendules, ſont entr'elles comme les quarrés des tems des vibrations DB, GH.

PROPOSITION LXXXIV.

239. *Si deux pendules ſont* iſochrones, *c'eſt-à-dire, ſi toutes leurs vibrations ſe font dans des tems égaux ſans que le tems d'une vibration de l'un, ſoit égal au tems d'une vibration de l'autre, le nombre*

des vibrations que le premier fera dans un tems déterminé, sera au nombre des vibrations que le second fera dans le même tems reciproquement, comme le tems que le second employe à une de ses vibrations est au tems que le premier employe à une des siennes.

DEMONSTRATION.

Je nomme b le nombre des vibrations que le premier pendule fait pendant le tems $=a$, & mb le nombre des vibrations que le second fait dans le même tems; la lettre m signifie un nombre tel qu'on voudra, entier ou rompu, puisque les vibrations du premier pendule se font toutes dans des tems égaux, si je divise le tems total a de ses vibrations par leur nombre b, le quotient $\frac{a}{b}$ sera la valeur du tems de l'une de ses vibrations, par la même raison, si je divise le tems total a des vibrations du second pendule par leur nombre mb, le quotient $\frac{a}{mb}$ sera la valeur du tems de l'une de ses vibrations, donc le tems d'une vibration du premier est au tems d'une vibration du second, comme $\frac{a}{b}$ est à $\frac{a}{mb}$; ou comme amb est à ab, ou comme mb est à b, c'est-à-dire, reciproquement comme le nombre des vibrations du second au nombre des vibrations du premier; & par conséquent le nombre des vibrations du premier est au nombre des vibrations du second, reciproquement comme le tems d'une vibration du second est au tems d'une vibration du premier.

COROLLAIRE.

240. *Donc les longueurs des pendules isocrones sont entr'elles en raison doublée de la raison reciproque des quarrés des nombres des vibrations;* car le tems de chaque vibration du premier étant au tems de chaque vibration du second, comme la racine de la longueur du premier est à la racine de la longueur du second (*N.* 237), & le tems de chaque vibration du premier étant au tems de chaque vibration du second, reciproquement comme le nombre des vibrations du second est au nombre des vibrations du premier (*N.* 239), il s'ensuit que la racine de la longueur du premier est à la longueur de la racine du second, reciproquement comme le nombre des vibrations du premier est au nombre des vibrations du second, & que par conséquent la longueur du premier est à la longueur du second, reciproquement comme le

quarré du nombre des vibrations du second est au quarré du nombre des vibrations du premier.

PROPOSITION LXXXV.

241. *Les longueurs de deux pendules suspendus entre différentes cycloïdes sont comme les quarrés des tems d'une vibration de l'un & d'une vibration de l'autre.*

DEMONSTRATION.

Supposons que les arcs DB, GH (*Fig.* 108.) représentent des cycloïdes, le tems de la vibration DB est au tems de la descente le long du diametre du cercle générateur, c'est-à-dire le long de $\frac{1}{2}$CA, comme la circonférence du cercle au diametre; & de même le tems de la vibration GH est au tems de la descente le long du diametre du cercle générateur, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}$EF, comme la circonférence du cercle au diametre, donc le tems de la vibration DB est au tems de la vibration GH, comme $\sqrt{\frac{1}{2}CA}$ est à $\sqrt{\frac{1}{2}EF}$, ou comme $\sqrt{CA}$ est à $\sqrt{EF}$; ainsi $\sqrt{CA}$, $\sqrt{EF}$ expriment les tems des vibrations DB, GH, mais CA, EF sont les quarrés de $\sqrt{CA}$, $\sqrt{EF}$; donc les longueurs CA, EF sont entr'elles comme les quarrés des tems des vibrations DB, GH.

COROLLAIRE.

242. Donc les tems des vibrations DB, GH sont comme les racines quarrées des longueurs CA, EF.

PROPOSITION LXXXVI.

243. *La vitesse qu'un pendule* FB (Fig. 109.) *qui décrit des arcs de cercle, à acquise au point* B *le plus bas d'une demi-vibration* EB, *est à la vitesse qu'il auroit acquise en descendant le long du double* AB *de sa longueur* FB, *comme la corde* EB *de l'arc que le pendule décrit est au diametre* AB *du cercle de cet arc ou au double de la longueur.*

DEMONSTRATION.

Du point E je mene l'ordonnée EP, & la droite PB est la hauteur de la demi-vibration EB; or la vitesse acquise à la fin de EB est égale à la vitesse que le corps acquerroit en descendant

de P en B (*N.* 197), & la viteſſe acquiſe en deſcendant de P en B, eſt à la viteſſe acquiſe en tombant de A en B, comme $\sqrt{BP}$ eſt à $\sqrt{AB}$, donc la viteſſe acquiſe à la fin de EB, eſt à la viteſſe acquiſe à la fin de AB, comme $\sqrt{BB}$ eſt à $\sqrt{AB}$; mais par la proprieté du cercle on a :: BA, BE, BP, donc BE, BA :: $\sqrt{BP}$, $\sqrt{AB}$, & par conſéquent la viteſſe acquiſe à la fin de EB, eſt à la viteſſe acquiſe à la fin de AB, comme la corde BE eſt au diametre AB.

COROLLAIRE.

244. Si nous prenons une autre demi-vibration DB, nous aurons donc la viteſſe acquiſe à la fin de DB eſt à la viteſſe acquiſe à la fin de AB comme la corde DB eſt au diametre AB; donc la viteſſe acquiſe à la fin de la demi-vibration EB, eſt à la viteſſe acquiſe à la fin de la demi-vibration DB, comme la corde EB eſt à la corde DB.

PROPOSITION LXXXVII.

245. *Trouver la durée d'une demi-vibration* NB (Fig. 110.) *d'un pendule* CB, *dont l'arc* NB *n'eſt pas bien grand, en ſuppoſant que la force qui accelere le mouvement du pendule étant uniforme ou toujours la même, ſoit cependant moindre ou plus grande que la peſanteur.*

SOLUTION.

Suppoſant que les arcs NB, MB décrits par le pendule ne ſoient pas bien grands, & que AB ſoit double de la longueur CB, du pendule, je nomme $CB = a$, $BP = x$, $BQ = b$ ce qui donne $AB = 2a$, & $QP = b - x$.

Par la proprieté du cercle j'ai :: AB, BN, BQ, ou :: $2a$, BN, b, donc $\overline{BN}^2 = 2ab$, & $BN = \sqrt{2ab}$; par la même proprieté j'ai :: AB, BM, BP, ou :: $2a$, BM, x, donc $\overline{BM}^2 = 2ax$ & $BM = \sqrt{2ax}$; or les arcs BN, BM n'étant pas bien grands, ils ne différeront pas beaucoup de leurs cordes, ainſi j'ai $BN = \sqrt{2ab}$, & $BM = \sqrt{2ax}$, & par conſéquent l'arc $NM = BN - BM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, & la différence de cet arc NM, c'eſt-à dire, le petit arc $Mm = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{2a} = \frac{-dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{x}}$, ou bien en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{2}$, j'ai $Mm = \frac{-dx\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}$.

Je nomme la force motrice $= g$, & la masse $= m$; or la force motrice g étant constante par la supposition, de même que la pesanteur est constante selon la loi de Galilée, il est évident que la vitesse acquise à la fin de NM est égale à la vitesse acquise à la fin de la hauteur QB (*N.* 197), puisque le mouvement sera toujours uniformement acceleré de même que dans la loi de Galilée, à la seule différence que la vitesse acquise en M ou en P sera plus grande ou moindre que celle que la pesanteur feroit acquerir en M ou en P, selon que g sera plus grand ou moindre que la pesanteur ; mais si nous nommions QP $= r$ & la vitesse acquise $= u$, nous aurions $\int g dr = \frac{1}{2} mu^2$ (*N.* 84) donc puisque QP $= b - x$, & que sa différence est $\frac{-dx}{b-x}$, nous aurons $\int g \times \frac{-dx}{b-x} = \frac{1}{2} mu^2$, ou $gb - gx = \frac{1}{2} mu^2$, donc $\frac{2gb - 2gx}{m} = u^2$, & $\frac{\sqrt{2gb - 2gx}}{\sqrt{m}} = u$.

L'arc Mm étant infiniment petit, le mouvement pendant la descente le long de cet arc peut être pris pour uniforme, ainsi l'espace M$m = udt$ (*N.* 17), & par conséquent $dt = \frac{\text{M}m}{u}$, & mettant les valeurs de Mm & de u, on aura $dt = \frac{-dx\sqrt{m}\sqrt{a}}{\sqrt{2x}\sqrt{2gb - 2gx}} = \frac{-dx\sqrt{am}}{\sqrt{4bx - 4xx} \times \sqrt{g}} = \frac{-dx\sqrt{am}}{\sqrt{bx - xx} \times \sqrt{g}}$; or si l'on cherche la valeur de l'arc AR, ainsi que nous l'avons déja fait plusieurs fois dans cet Ouvrage, on trouvera BR $= \int \frac{bdx}{2\sqrt{bx - xx}}$, donc l'arc restant RQ $= \int \frac{-bdx}{2\sqrt{bx - xx}}$, à cause que la différence Rr est négative par rapport à l'arc RQ ; donc l'élement de RQ sera $\frac{-bdx}{2\sqrt{bx - xx}}$, & par conséquent $\frac{-dx}{\sqrt{bx - xx}}$ sera égal à cet élement divisé par $\frac{1}{2} b$.

Je suppose l'élement $\frac{-bdx}{2\sqrt{bx - xx}} = dz$, donc divisant par $\frac{1}{2} b$, j'ai $\frac{-dx}{\sqrt{bx - xx}} = \frac{2dz}{b}$, & substituant cette valeur dans celle de dt que nous avons trouvée ci-dessus, j'ai $dt = \frac{2dz\sqrt{am}}{b \times 2\sqrt{g}} = \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$, donc $t = \frac{\sqrt{am}}{b\sqrt{g}} \times \int dz = \frac{z\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$; or dz étant égal à l'élement de

l'arc RQ, cet arc est donc z, ainsi en mettant les grandeurs représentées par a & b, on a $t = \frac{RQ \times \sqrt{AB} \times \sqrt{m}}{BQ \times \sqrt{g}}$.

Maintenant si l'on suppose que l'arc RQ devienne égal à la demi-circonférence QRB, on aura $t = \frac{QRB \times \sqrt{AB} \times \sqrt{m}}{BQ \times \sqrt{g}}$, supposant donc que $\sqrt{m} = \sqrt{g}$ comme dans la loi de Galilée, on aura $t = \frac{QRB \times \sqrt{AB}}{BQ}$, d'où l'on tire t, $\sqrt{AB}$ :: QRB, BQ, c'est-à-dire, *le tems de la descente le long de l'arc* NB *est au tems de la descente le long de* AB, *ou du double de la longueur du pendule, comme la demi-circonférence du cercle est au diametre*; ce qui ne doit s'entendre que lorsque l'arc BN n'est pas bien grand, comme nous l'avons déja dit, à cause que nous avons supposé que la corde BN ne differoit pas beaucoup de larc BN.

Si lon suppose par exemple $g = 4m$, on aura $t = \frac{QRB \times \sqrt{AB} \times \sqrt{1}}{BQ \times \sqrt{4}} = \frac{QRB \times \sqrt{AB}}{2BQ}$, d'où l'on tire t, $\sqrt{AB}$ :: QRB, 2BQ, c'est-à-dire, *le tems de la descente le long de l'arc* BN *est à celui de la descente le long du double de la longueur du pendule, comme la circonférence du cercle est au double du diametre*, & ainsi des autres.

PROPOSITION LXXXVIII.

246. *Deux pendules inégaux étant donnés, & supposant, comme dans la Proposition précédente, qu'ils fassent leurs vibrations sur des arcs qui ne sont pas bien grands, & que les forces qui les agitent soient différentes de leurs pesanteurs; les tems de leurs vibrations sont en raison composée de trois raisons, dont la premiere est la raison directe des racines des longueurs, la seconde la raison directe des racines des masses, & la troisiéme la raison inverse de la racine des forces, lesquelles nous supposons uniformes comme les pesanteurs.*

DEMONSTRATION.

Il faut se ressouvenir que quand les pendules font leurs vibrations sur des arcs qui ne sont pas bien grands, toutes leurs vibrations sont isochrones, & qu'ainsi les deux pendules que nous comparons ici ont leurs vibrations isochrones, quoique le tems de chaque vibration de l'un ne soit pas égal au tems de chaque vibration de l'autre, cela posé.

Je nomme L la longueur du premier pendule, T le tems d'une oscillation, M la masse, & G la force qui le meut; je nomme l la longueur du second pendule, t le tems d'une oscillation, m la masse, & g la force qui le meut.

Par la Proposition précédente j'ai $T = \frac{QRB \times \sqrt{2L} \times \sqrt{M}}{BQ \times \sqrt{G}}$ & $t = \frac{qrb \times \sqrt{2l} \times \sqrt{m}}{bq \times \sqrt{g}}$; le rapport $\frac{QRB}{BQ}$ signifie le rapport de la circonférence au diametre, comme on a vû dans la Proposition précédente, & $\frac{qrb}{bq}$ exprime aussi ce même rapport; car soit que le diametre soit plus grand ou moindre, le rapport de la circonférence au diametre est toujours le même, donc $T, t :: \frac{QRB \times \sqrt{2L} \times \sqrt{M}}{BQ \times \sqrt{G}}, \frac{qrb \times \sqrt{2l} \times \sqrt{m}}{bq \times \sqrt{g}} :: \frac{\sqrt{2L} \times \sqrt{M}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{2l} \times \sqrt{m}}{\sqrt{g}} :: \sqrt{g} \times \sqrt{L} \times \sqrt{M}, \sqrt{G} \times \sqrt{l} \times \sqrt{m}$.

PROPOSITION. LXXXIX.

247. *Supposant toujours que les forces qui agitent deux pendules soient différentes des pesanteurs, je dis que si les longueurs sont égales, les masses que nous supposons inégales sont entr'elles en raison composée des forces, & de la raison des quarrés des tems.*

DEMONSTRATION.

Par la Proposition précédente $T, t :: \frac{\sqrt{L} \times \sqrt{M}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{l} \times \sqrt{m}}{\sqrt{g}}$, & à cause des longueurs égales nous avons $T\, t :: \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{g}}$; donc $T^2, t^2 :: \frac{M}{G}, \frac{m}{g}$, d'où l'on tire $M, m :: T^2 G, t^2 g$.

COROLLAIRE I.

248. Si $T = t$, on aura $M, m :: G, g$, c'est-à-dire, si les tems sont égaux, les masses seront comme les forces.

COROLLAIRE II.

249. Si G, g, on aura $M, m :: T^2, t^2$, c'est-à-dire, les forces étant égales, les masses seront comme les quarrés des tems.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

250. Si M, m, on aura $T^2G = t^2g$, donc $G, g :: t^2, T^2$, c'eſt-à-dire, les maſſes étant égales, les forces ſont entr'elles reciproquement comme les quarrés des tems.

COROLLAIRE IV.

251. Puiſque nous avons $T, t :: \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{g}}$, donc $T^2, t^2 :: \frac{LM}{G}, \frac{lm}{g}$, & par conſéquent $T^2G, t^2g :: LM, lm$; or ſi l'on ſuppoſe $T = t$, & $M = m$, on aura $G, g :: L, l$, c'eſt-à-dire, ſi les tems ſont égaux & les maſſes auſſi, & que les longueurs ſoient inégales, les forces ſont comme les longueurs.

COROLLAIRE V.

252. Puiſque $T^2G, t^2g :: LM, lm$, donc $\frac{T^2G}{L}, \frac{t^2g}{l} :: M, m$, & $T^2Gl, t^2gL :: M, m$, c'eſt-à-dire qu'en ſuppoſant les longueurs inégales, les maſſes ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des quarrés des tems, de la raiſon directe des forces, & de la raiſon reciproque des longueurs.

COROLLAIRE VI.

253. Si $M = m$, on a $T^2Gl = t^2gL$, donc $T^2, t^2 :: gL, Gl$, &, $T, t :: \sqrt{gL}, \sqrt{Gl}$, c'eſt-à-dire, ſi les maſſes ſont égales les tems ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des racines des longueurs, & de la raiſon reciproque des racines des forces.

COROLLAIRE VII.

254. Si $M = m$, & $T = t$, on a $gL = Gl$, donc $G, g :: L, l$; c'eſt-à-dire ſi les maſſes ſont égales & les tems auſſi, les forces ſont entr'elles comme les longueurs.

COROLLAIRE VIII.

255. Si $M = m$, & $L = l$, on a $T^2G = t^2g$; donc $T^2, t^2 :: g, G$, & $T, t :: \sqrt{g}, \sqrt{G}$, c'eſt-à-dire, ſi les maſſes ſont égales, & les lon-

gueurs aussi, les tems sont entr'eux [...]
racines des forces.

Corollaire IX.

256. Si $M=m$, & $G=g$, on a $T^2 l = t^2 L$, donc $T^2, t^2 :: L, l$, & $T, t :: \sqrt{L}, \sqrt{l}$, c'est-à-dire, si les masses sont égales & les forces aussi, les tems sont entr'eux comme les racines des longueurs.

Proposition XC.

257. *Supposant toujours que les forces qui agitent deux pendules sont différentes de leur pesanteurs, & que les arcs sur lesquels se font les vibrations soient petits, les nombres des vibrations que ces deux pendules font dans un même tems déterminé sont en raison composée de la raison réciproque des racines des masses, de la raison réciproque des racines des longueurs, & de la raison directe des racines des forces.*

Demonstration.

Nommant N le nombre de vibrations du premier, & n le nombre de vibrations du second, nous avons N est à n réciproquement comme le tems d'une vibration du second est au tems d'une vibration du premier (*N.* 239.) Or par la proposition précédente (*N.* 247.) nous avons $T, t :: \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{g}} :: \sqrt{LMg}, \sqrt{lmG}$, donc $N, n :: \sqrt{lmG}, \sqrt{LMg} :: \sqrt{l} \times \sqrt{m} \times \sqrt{G}, \sqrt{L} \times \sqrt{M} \times \sqrt{g}$.

Corollaire I.

258. Si $M=m$, on a $N, n :: \sqrt{l} \times \sqrt{G}, \sqrt{L} \times \sqrt{g}$, c'est-à-dire, si les masses sont égales, les nombres de vibrations sont en raison composée de la raison inverse des racines des longueurs, & de la raison directe des racines des forces.

Corollaire II.

259. Si $L=l$, on a $N, n :: \sqrt{m} \times \sqrt{G}, \sqrt{M} \times \sqrt{g}$, c'est-à-dire les longueurs étant égales, les nombres de vibrations sont en raison composée de la raison indirecte des racines des masses, & de la raison directe des racines des forces.

COROLLAIRE III.

260. Si G$=g$, on aura N, n :: $\sqrt{l}\times\sqrt{m}$, $\sqrt{L}\times\sqrt{M}$, ou les nombres des vibrations ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon indirecte des racines des longueurs & de la raiſon indirecte des racines des maſſes.

COROLLAIRE IV.

261. Si M$=m$, & L$=l$, on aura N; n :: $\sqrt{G}$, $\sqrt{g}$, c'eſt-à-dire les nombres d'oſcillations ſont entr'eux comme les racines des forces.

De même, ſi M$=m$, & G$=g$, on aura N, n :: $\sqrt{L}$, $\sqrt{l}$, c'eſt-à-dire, les nombres des vibrations ſont entr'eux réciproquement comme les racines des longueurs, & il eſt aiſé de tirer d'autres Corollaires ſemblables de cette propoſition.

DEFINITIONS.

262. On appelle *centre d'oſcillation* le point d'un pendule compoſé, auquel ſi l'on tranſportoit tous les poids attachés en différens endroits de la longueur, chaque vibration ſe feroit encore dans un tems égal à celui que le pendule compoſé employoit pour les faire; d'où il ſuit que la diſtance du centre d'oſcillation d'un pendule compoſé au point de ſuſpenſion ou au centre du mouvement eſt égale à la longueur d'un pendule ſimple dont les vibrations ſeroient iſocrones à celles du pendule compoſé.

REMARQUE.

263. Ne pouvant ſe faire que la longueur d'un pendule ſimple ne ſoit de quelque matiere, & cette matiere quelque déliée qu'elle ſoit ayant toujours une peſanteur, il eſt évident qu'il n'eſt pas poſſible d'avoir à la rigueur un pendule ſimple, & que tout ce qu'on peut faire de mieux quand on veut faire des experiences qui approchent de tout ce que nous avons dit juſqu'ici touchant le pendule, c'eſt de ſe ſervir d'un fil extremement délié, & d'y attacher un poids qui ſoit d'une matiere extremement compacte, ou qui peſe beaucoup ſous un petit volume, parce que la réſiſtance de l'air de laquelle nous avons fait abſtraction, de même que de la peſanteur de la longueur du pendule, a moins de priſe ſur des corps de cette nature que ſur les autres.

PROPOSITION XCI.

264. *Trouver le centre d'oſcillation d'un pendule compoſé.*

SOLUTION.

[illegible] auquel sont attachés les corps
[illegible] par le quarré de sa dis-
[illegible] & je fais la somme des produits ;
[illegible] par sa distance au même centre
[illegible] je divise la premiere somme
[illegible] me donne la longueur AH, &
[illegible] le point où il faudroit attacher tous
[illegible] qui feroit ses vibrations dans des
[illegible] que le pendule composé employeroit à
[illegible]

DÉMONSTRATION.

[illegible] les corps B, C, D, soient attachés
[illegible] AB, AC, AD, & qu'ils forment
[illegible] les uns des autres, mais
[illegible] AM, AP, AQ, des angles égaux
[illegible] leurs demi-vibrations BM, CD,
[illegible] les vitesses que les
[illegible] quand ils seront sur leur ver-
[illegible] des hauteurs Br, Cx,
[illegible] BM, CP, DQ étant entr'eux
[illegible] & les figures BrC, CxP,
[illegible] seront en-
[illegible] comme
[illegible] acquises
[illegible] distances.
[illegible] seront aussi
[illegible] distances ;
[illegible] en raison
[illegible] des tems, ou
[illegible] des vitesses, à
[illegible] des vitesses,
[illegible] & des distances, à cause
[illegible] entr'eux comme

[illegible] corps ne forment
[illegible] les mêmes distances
[illegible], car il est visible

que les trois corps parviendront à la verticale AQ dans un même tems, ainſi les vibrations ne ſeront plus qu'en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes, mais comme les viteſſes ſeront dans la même raiſon des arcs BM, CP, DQ, qui auront été parcourus dans le même-tems, & que ces arcs ſont comme les diſtances, il s'enſuit que les vibrations ſeront entr'elles comme les produits des maſſes par les diſtances de même qu'auparavant, & tout ce qui ſera arrivé, c'eſt que les corps plus proches de A n'iront pas ſi vîte qu'auparavant, & ceux qui en ſeront plus éloignés iront plus vîte, de façon que ce que les uns auront perdu du tems, les autres le gagneront, & que le mouvement du pendule ſe fera dans un tems moyen entre les tems des différentes vibrations des pendules ſéparés; puis donc que la réunion des pendules a fait ceſſer la différence des tems en donnant un tems moyen, il eſt clair que pour faire ceſſer la différence des vibrations, laquelle provient des différences des longueurs, il n'y a qu'à chercher une longueur moyenne, or pour cela

Je conçois ces vibrations, c'eſt à-dire les produits $B \times BA$, $C \times CA$, $D \times DA$, des maſſes par les diſtances comme autant de poids attachés aux points B, C, D, & il eſt viſible par les regles que nous avons données dans le Chapitre du centre de gravité, que ſi nous multiplions ces poids par leur diſtances, & que nous diviſions la ſomme des produits par la ſomme des poids, le quotient ſera la longueur cherchée AH, ainſi nous aurons $\frac{B \times \overline{BA}^2 + C \times \overline{CA}^2 + D \times \overline{DA}^2}{B \times BA + C \times CA + D \times DA} = AH$, c'eſt-à-dire, la ſomme du produit des maſſes par les quarrez de leur diſtances étant diviſée par la ſomme du produit des maſſes par les diſtances, eſt égale à la longueur ou diſtance à laquelle tous les poids doivent être attachés pour avoir un pendule ſimple qui faſſe ſes vibrations en même tems que le compoſé.

REMARQUE.

265. C'eſt en ſuivant ce principe qu'on trouve les centres d'oſcillation des lignes, des figures & des ſolides qui tournent autour d'un axe, j'en ai traité aſſez amplement dans *le Calcul Différentiel & Intégral*, c'eſt pourquoi je me diſpenſerai d'en parler ici, d'autant plus que la quantité des matieres qui nous reſtent à éclaircir me fait déja craindre que cet ouvrage ne devienne trop long.

CHAPITRE X.

Du Mouvement des Corps projettés.

DEFINITIONS.

266. ON dit qu'un corps eſt *projetté perpendiculairement*, lorſqu'on le pouſſe ſelon une direction perpendiculaire à l'horizon, qu'il eſt *projetté horizontalement*, lorſqu'il eſt pouſſé ſelon une direction horizontale, enfin qu'il eſt *projetté obliquement* lorſqu'on le pouſſe ſelon une direction oblique à l'horizon, & alors l'angle que la ligne de direction fait avec la ligne horizontale s'appelle angle de direction.

PROPOSITION XCII.

267. *Si un corps eſt projetté perpendiculairement à l'horizon, ſon mouvement eſt toujours perpendiculaire à l'horizon.*

DEMONSTRATION.

Un corps ſuit toujours ſa premiere direction, à moins qu'il n'y ait quelque cauſe qui l'oblige de changer; or quand un corps eſt projetté perpendiculairement à l'horizon, rien ne l'oblige de changer de direction; car ſa peſanteur qui retarde peu à peu ſon mouvement lorſqu'il monte, ou qui l'accelere lorſqu'il deſcend a auſſi une direction perpendiculaire à l'horizon; donc le corps ſuit toujours ſa premiere direction.

PROPOSITION XCIII.

268. *Si un corps* A (Fig. 112.) *eſt projetté horizontalement, il décrit par ſon mouvement une parabole* AMPR.

DEMONSTRATION.

Lorſque le corps eſt projetté horizontalement, ſa peſanteur ne laiſſe pas que d'agir, & par conſéquent le mouvement de ce corps eſt compoſé de deux mouvemens, dont le premier eſt cauſé par une force qui a la direction horizontale AD, & le ſecond eſt cauſé par la peſanteur qui a la direction perpendiculaire

AQ ; or le mouvement causé par la premiere force étant uniforme, si le corps dans une minute parcourt l'espace AB, dans deux minutes il parcourra l'espace AC double de AB, & dans trois il parcourra l'espace AD triple de AB, &c. mais le mouvement causé par la pesanteur étant uniformement acceleré, si le corps à la fin de la premiere minute a parcouru l'espace AE, il aura parcouru à la fin de deux minutes l'espace AN quadruple de AE, à la fin de trois minutes l'espace AQ neuf fois plus grand que AE, &c. c'est-à-dire que les espaces que la pesanteur fera parcourir seront comme les quarrez des espaces que la force qui a la direction AD fait parcourir dans les mêmes tems, puis donc que la pesanteur & la force qui a la direction AD agissent en même tems, il est clair qu'en achevant les parallellogrammes AM, AP, AR, &c. le corps se trouvera en M à la fin de la premiere minute, en P à la fin de la seconde, en R à la fin de la troisiéme, &c. donc ce corps décrira la courbe AMPR ; or les ordonnées EM, NP, QR de cette courbe sont égales aux espaces AB, AC, AD, &c. que la force qui a la direction AD fait parcourir, & les abscisses AE, AN, AQ, &c. sont les espaces que la pesanteur fait parcourir dans les mêmes tems, donc les abscisses de cette courbe sont entr'elles comme les quarrez des ordonnées ; or c'est la proprieté de la parabole quarrée, donc la courbe ANPR est une parabole quarrée, donc, &c.

REMARQUE.

269. Nous supposons que le corps A se trouvant aux points A, M, P, R, &c. sa pesanteur le pousse selon des directions AQ, BM, CP, DR, &c. paralleles entr'elles, ce qui n'est pas vrai, puisque la pesanteur poussant le corps vers le centre de la terre, toutes ces directions doivent se joindre au centre, cependant comme le centre de la terre est extrêmement éloigné de sa surface, & qu'au contraire les corps qu'on projette sont à une distance fort petite de cette surface, surtout si on compare cette distance avec celle de la surface au centre, & que d'autre part la partie de la surface de la terre que la projection embrasse, c'est-à-dire la droite AD est fort petite à l'égard de toute la circonférence, il est sûr que le non parallelisme des directions est imperceptible, & qu'on peut regarder ces directions comme paralleles sans craindre de tomber dans quelque erreur

qui puisse se faire sentir. Nous donnerons cependant à la fin de ce Chapitre la façon de trouver la courbe AMPR, en supposant les directions *convergentes*, c'est-à-dire en supposant qu'elles vont toutes aboutir à un point.

PROPOSITION XCIV.

270. *Si un corps* A (Fig. 113.) *est projetté selon une direction oblique* AD, *la courbe* AMPR *qu'il décrit pendant son mouvement, est encore une parabole.*

DEMONSTRATION.

La Demonstration est la même que celle de la Proposition précédente; car le corps étant poussé par la force AD, & par la pesanteur AQ son mouvement est composé; or selon le premier mouvement il décriroit dans une minute, dans deux, dans trois, &c. les espaces AB, AC, AD, &c. qui seroient comme 1, 2, 3, &c. & par le second il décriroit dans les mêmes tems des espaces AE, AN, AQ, &c. qui seroient comme les quarrez de AB, AC, AD, &c. ou comme les quarrez 1, 4, 9, &c. achevant donc les parallelogrammes AM, AP, AR, &c. le corps passera par les points A, M, P, R, &c. & décrira par conséquent la courbe AMPR dont les abscisses AE, AN, AQ, &c. sont comme les quarrez des ordonnées EM, NP, QR, &c. d'où il suit que cette courbe est une parabole.

De même si le corps est projetté selon la direction oblique AD (*Fig*, 114.) de haut en bas, la courbe AMP que le corps décrira sera une parabole, ce que l'on prouvera de la même façon, ainsi que la figure le fait voir.

COROLLAIRE I.

271. Si par la proprieté de la parabole le parametre est troisiéme proportionnel à l'abscisse & à son ordonnée; donc si l'on prend pour abscisse la droite AE que la pesanteur peut faire parcourir au corps dans une minute, l'ordonnée EM sera l'espace que la force qui a la direction AD peut faire parcourir dans la même minute, & par conséquent si l'espace AE & l'espace AB ou EM sont connus, on connoîtra aisément le parametre du diametre AQ.

COROLLAIRE II.

272. L'espace AB que la force qui a la direction AD peut faire

faire parcourir dans une minute peut repreſenter la viteſſe du corps projetté ; or ſi pluſieurs corps projettés ont la même viteſſe, c'eſt-à-dire, ſi dans une minute ces corps parcourent des eſpaces égaux chacun a AB, les eſpaces que la peſanteur leur fait parcourir dans la même minute étant égaux chacun à l'eſpace AE, les parametres des diametres AQ des paraboles décrites par le mouvement de ces corps ſeront les mêmes.

COROLLAIRE III.

273. La ligne de direction AD eſt tangente de la parabole ; ce qui n'a pas beſoin de Demonſtration.

DEFINITION.

274. Si du point A qui eſt l'origine de la projection, on mene une droite horizontale AR (*Fig.* 115.) qui coupe la parabole en R, la droite AR s'appellera *amplitude* de la parabole, ce qui doit s'entendre dans les paraboles décrites par les corps projettés de bas en haut.

PROPOSITION XCV.

275. *Lorſqu'un corps eſt projetté* (Fig. 115.) *les eſpaces horizontaux qui répondent aux arcs de parabole parcourus dans des tems égaux, ſont égaux.*

DEMONSTRATION.

La ligne de direction AD étant diviſée en parties égales AB, BC, CD, ces parties repreſentent les eſpaces que la force qui a la direction AD feroit parcourir au corps dans des tems égaux, & les arcs AM, MP, PR, repreſentent les eſpaces de la parabole parcourus dans des tems égaux ; or ſi l'on prolonge les droites BM, CP, &c. juſqu'à ce qu'elles coupent la ligne horizontale AR aux points *b*, *c*, &c. il eſt viſible que les eſpaces A*b*, *bc*, *c*R repondront aux arcs AM, MP, PR ; mais à cauſe des triangles ſemblables AB*b*, AC*c*, ADR, les eſpaces A*b*, *bc*, *c*R ſeront entr'eux comme les eſpaces AB, BC, CR ; donc ils ſeront égaux entr'eux, & par conſéquent, &c.

PROPOSITION XCVI.

276. *L'angle d'élevation* DAR (Fig. 115.) *étant donné, & l'amplitude* AR *trouver le parametre du diametre* AQ *de la parabole.*

SOLUTION.

Je nomme r le ſinus total, a le ſinus de l'angle DAR d'élevation, b le ſinus de ſon complement à l'angle droit, c l'amplitude AR, & x le parametre cherché ; l'angle DAR étant connu & l'amplitude AR, tout le triangle rectangle DAR eſt aiſé à connoître. Prenant donc pour ſinus total l'hypotenuſe AD, il eſt clair que la droite DR ſera le ſinus de l'angle d'élevation, & la droite AR le ſinus de ſon complement à l'angle droit, donc j'ai b, a :: AR, DR, ou b, a :: c, DR, donc DR $= \frac{ac}{b}$, mais DR $=$ AQ, donc AQ $= \frac{ac}{b}$.

Dans le même triangle DAR, j'ai b, r :: AR, AD, ou b, r :: c, AD, donc AD $= \frac{rc}{b}$; or par la proprieté de la parabole, j'ai $x \times AQ = \overline{QR}^2 = \overline{AD}^2$, donc $x \times \frac{ac}{b} = \frac{r^2c^2}{b^2}$, d'où je tire $ax = \frac{r^2c}{b}$ & $x = \frac{r^2c}{ab}$ qui donne cette analogie a, $\frac{r^2}{b}$ :: c, x.

Mais $\frac{r^2}{b}$ eſt la ſecante de l'angle d'élevation DAB, car ſi du centre A & du rayon AD je décris l'arc AZ, & que du point Z je mene ZX parallele à DR, il eſt viſible que ZX ſera la tangente de l'angle d'élevation, & AX ſa ſecante ; or les triangles ſemblables ARD, AZX donnent AR, AD :: AZ, AX, mais AD $=$ AZ, donc :: AR, AD, AX, ou :: b, r, AX, ce qui donne $\frac{r^2}{b} =$ AX.

Puis donc que nous avons a, $\frac{r^2}{b}$ :: c, x, il s'enſuit que *le parametre x eſt troiſiéme proportionnel au ſinus de l'angle d'élevation, à la ſecante de cet angle & à l'amplitude de la parabole*, ou, ce qui revient au même, *l'amplitude eſt au parametre du diametre* AQ, *comme le ſinus de l'angle d'élevation eſt à ſa ſecante.*

COROLLAIRE I.

277. Puiſque nous avons $ax = \frac{r^2c}{b}$, donc $2ax = \frac{2r^2c}{b}$, & $2abx = 2r^2c$, ou $\frac{2abx}{2r^2} = c$, d'où l'on tire cette analogie r, $\frac{2ab}{r}$ :: $\frac{1}{2}x$, c, mais $\frac{2ab}{r}$ eſt le ſinus d'un angle double de l'angle d'élevation,

tion, & tantôt ſous un autre a toujours la même viteſſe, la plus grande amplitude eſt celle de la parabole qu'il décrit lorſque ſon angle d'élevation eſt de 45 degrés, & les amplitudes des angles d'élevation qui s'éloignent également de 45 degrés l'un au-deſſous & l'autre au-deſſus ſont égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

La viteſſe étant toujours la même dans les différentes projections du corps, les amplitudes des différentes paraboles qu'il décrit ſont comme les ſinus des angles doubles des angles d'élevation (*N.* 278); or quand l'angle d'élevation eſt de 45 degrés le double de cet angle eſt un angle droit dont le ſinus eſt le plus grand de tous les ſinus; donc l'amplitude eſt alors la plus grande, puiſqu'elle eſt comme le plus grand ſinus.

En ſecond lieu, quand deux angles ſont également éloignés de l'angle de 45 degrés, l'un en deſſous & l'autre en deſſus, les doubles de ces angles ſont également éloignés de l'angle droit; or les ſinus des angles également éloignés de l'angle droit ſont égaux, donc quand le corps eſt projetté d'abord ſous un angle moindre de 45 degrés & enſuite ſous un angle qui eſt autant au-deſſus de 45 degrés que le premier eſt au-deſſous, les amplitudes des deux paraboles ſont égales puiſqu'elles ſont comme les ſinus des angles doubles de leurs angles d'élevation, leſquels ſinus ſont égaux.

COROLLAIRE I.

280. Quand un corps eſt projetté ſous un angle de 45 degrés, le demi-parametre de la parabole qu'il décrit eſt égal à ſon amplitude; car puiſque ſous quelque angle d'élevation que le corps ſoit projetté, le demi-parametre eſt toujours à l'amplitude comme le ſinus total au ſinus de l'angle double de ſon angle d'élevation (*N.* 277), & que quand l'angle d'élevation eſt de 45 degrés, le ſinus de l'angle double eſt égal au ſinus total, il s'enſuit que le demi-parametre eſt auſſi égal à l'amplitude.

COROLLAIRE II.

281. Quand un corps étant projetté ſucceſſivement ſous différens angles, a toujours la même viteſſe, s'il arrive qu'on connoiſſe la plus grande amplitude, on trouvera ſon amplitude pour un angle d'élevation tel qu'on voudra, en faiſant cette analogie;

le ſinus total eſt au ſinus d'un angle double de l'angle d'élevation donné comme la plus grande amplitude eſt à l'amplitude correſpondante à l'angle d'élevation donné.

COROLLAIRE III.

282. La viteſſe d'un corps projetté obliquement étant connue, on connoîtra ſon amplitude en cette ſorte.

La viteſſe du corps peut ſe déterminer par l'eſpace AB ou EM (*Fig.* 115), que la force qui a la direction AD peut lui faire parcourir dans une minute ; ſuppoſant donc que cet eſpace ſoit connu, nous ſçavons par pluſieurs expériences que les Sçavans ont faites, que l'eſpace AE que la peſanteur fait parcourir à un corps dans une minute, eſt de 15 pieds un pouce ; faiſant donc le quarré de AB, c'eſt-à-dire le quarré du nombre des pieds que vaut l'eſpace AB, & le diviſant par 15 pieds un pouce, il eſt évident que le quotient donnera la valeur du parametre par la proprieté de la parabole ; c'eſt pourquoi prenant la moitié de ce parametre, on aura l'amplitude de la projection ſous un angle de 45 degrés (*N.* 280), après quoi il ſera facile de connoître ſon amplitude pour tel angle qu'on voudra par le ſecond Corollaire.

COROLLAIRE IV.

283. La plus grande amplitude étant connue, on connoîtra la viteſſe du corps projetté en cette ſorte.

La plus grande amplitude eſt C égale au-demi parametre, doublant donc cette amplitude, j'ai le demi-parametre ; c'eſt pourquoi je multiplie le parametre par AE = 15 pieds 2 pouces, & le produit eſt le quarré de EM, tirant donc la racine quarrée j'ai la valeur de EM ou la viteſſe cherchée, ce qui eſt évident par le Corollaire précédent.

PROPOSITION XCVIII.

284. *Trouver la plus grande hauteur y4* (Fig. 115.) *à laquelle un corps projetté obliquement puiſſe monter, ſon angle d'élevation étant connue.*

SOLUTION.

Je nomme $AR = a$, $RD = AQ = b$, $Ab = x$; or le triangle rectangle ARD donne $\overline{AD}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RD}^2$, donc $\overline{AD}^2 = \overline{QR}^2 = a^2 + b^2$.

Les triangles semblables ARD, AbB donnent AR, RD : : Ab, bB, donc a, b : : x, $\frac{bx}{a} = b$B; or le triangle rectangle AbB donne $\overline{AB}^2 = \overline{Ab}^2 + \overline{bB}^2$, donc $\overline{AB}^2 = \overline{EM}^2 = xx + \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{aax^2 + b^2x^2}{a^2}$.

Par la proprieté de la parabole j'ai QR^2, $\overline{EM}^2$: : AQ, AE, donc $a^2 + b^2 . \frac{aax^2 + b^2x^2}{aa}$: : b, $\frac{bx^2}{a^2} = AE = BM$, donc $Mb = Bb - BM = \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{a^2}$.

Or la plus grande hauteur $y4$ qu'on demande est la plus grande de toutes les perpendiculaires tirées des points de la courbe AMR sur la droite AR, c'est-à-dire la plus grande de toutes les $\frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{a^2}$, ainsi par la regle des plus *grandes* & *des moindres*, il faut prendre la différence & la supposer égale à zero, ce qui donne $\frac{bdx}{a} - \frac{2bxdx}{a^2} = 0$, donc $\frac{bdx}{a} = \frac{2bxdx}{a^2}$, & $\frac{b}{a} = \frac{2bx}{a^2}$, ou $ab = 2bx$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}a$; c'est-à-dire, que pour avoir la plus grande hauteur $y4$, il faut prendre A$y = \frac{1}{2}$AR, & élever en y la perpendiculaire $y4$, & le point 4 sera le point de la plus grande hauteur.

COROLLAIRE I.

285. Si l'on prolonge la plus grande hauteur $y4$ jusqu'à la ligne de direction AD en Y, on aura $y4 = Y4$; car les triangles semblables ARD, AyY, donnent AR, AD : : Ay, AY; mais A$y = \frac{1}{2}$AR, donc AY $= \frac{1}{2}$AD; je mene l'ordonnée $u4$, laquelle étant égale à AY est par conséquent $= \frac{1}{2}$AD. Or la proprieté de la parabole donne $\overline{QR}^2$ ou $\overline{AD}^2$, $\overline{u4}^2$ ou $\overline{AY}^2$: : AQ, Au, & $\overline{AY}^2 = \frac{1}{4}\overline{AD}^2$, donc A$u = \frac{1}{4}$AQ, & par conséquent Y4 $= \frac{1}{4}$AQ $= \frac{1}{4}$DR.

Mais les triangles semblables ARD, AyY donnent Y$y = \frac{1}{2}$ DR, à cause de A$y = \frac{1}{2}$AR, donc Y$y = \frac{2}{4}$DR, & par conséquent Yy — Y4 $= \frac{2}{4}$DR $- \frac{1}{4}$DR $= \frac{1}{4}$DR.

COROLLAIRE II.

286. L'amplitude & l'angle d'élevation étant donnés, on trouvera la plus grande hauteur en cette sorte.

Prenant pour sinus total la droite AD, l'amplitude AR sera le sinus du complement à l'angle droit de l'angle d'élevation, & la

droite DR sera le sinus de cet angle d'élevation. Pour connoître donc cette droite je dis ; comme le sinus de complement est au sinus de l'angle d'élevation, ainsi l'amplitude AR est à la droite DR, laquelle étant connue, sa quatriéme partie sera la hauteur cherchée.

COROLLAIRE III.

287. *La plus grande hauteur y4 est à la huitiéme partie du parametre, comme le sinus verse de l'angle double de l'angle d'élevation est au sinus total.*

Soit l'angle OTV (*Fig.* 116.) égal à l'angle d'élevation, & la droite TL égale au sinus total ; je fais LO=TL, & OV=TL ; le triangle TLO étant isoscele, l'angle externe OLV est double de l'angle OTL ; je mene Lt perpendiculaire sur TO, & OY perpendiculaire sur TV, ainsi Lt est le sinus de l'angle d'élevation, Tt est le sinus de son complement à l'angle droit, OY est le sinus de l'angle OLY double de l'angle d'élevation, & LY est le sinus de son complement.

Je nomme le sinus total TL=LO=r, le sinus de l'angle d'élevation Lt=a, le sinus de son complement Tt=b, donc TO=$2b$, à cause que le perpendiculaire Lt coupe la base TO du triangle isoscele TLO en deux parties égales.

Les triangles semblables TLt, TOY donnent TL, Tt :: TO, TY ; donc $r, b :: 2b, \frac{2bb}{r}$=TY ; & par conséquent LY=TY—TL=$\frac{2bb}{r} - r = \frac{2bb - rr}{r}$; mais le triangle rectangle TLt donne $\overline{TL}^2 = \overline{Tt}^2 + \overline{Lt}^2 = b^2 + a^2 = rr$, mettant donc cette valeur de rr dans celle de LY, j'ai LY=$\frac{2bb - rr}{r} = \frac{b^2 - a^2}{r}$.

Du centre L je décris l'arc DZ, ainsi YZ=LZ—LY=LO—LY=$r - \frac{b^2 + a^2}{r} = \frac{rr - b^2 + a^2}{r}$, & mettant au lieu de rr sa valeur $b^2 + a^2$, j'ai YZ=$\frac{2a^2}{r}$, & c'est la valeur du sinus verse d'un angle double de l'angle d'élevation, cela posé.

Si je nomme le parametre x & le sinus de l'angle double de l'angle d'élevation $\frac{2ab}{r}$, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus (N. 277), j'aurai l'amplitude en faisant $r, \frac{2ab}{r} :: \frac{1}{2}x, \frac{abx}{r^2}$ (N.277)

donc (*Fig.* 115.) j'aurai AR $= \frac{abx}{r^2}$; & pour trouver DR comme j'ai b, a :: AR, DR, mettant la valeur de AR, j'ai b, a :: $\frac{abx}{r^2}$, $\frac{a^2x}{r^2}$ = DR ; or $y4 = \frac{1}{4}$ DR (*N.* 285), donc $y4 = \frac{a^2x}{4r^2} = \frac{2a^2x}{8r^2}$, d'où je tire r, $\frac{2a^2}{r}$, $\frac{1}{8}x$, $\frac{2a^2x}{8r} = y4$; mais $\frac{2a^2}{r}$ est le sinus verse d'un angle double de l'angle d'élevation, donc le sinus total est au sinus verse d'un angle double de l'angle d'élevation, comme le huitiéme du parametre est à la plus grande hauteur.

COROLLAIRE IV.

288. *Si un corps projetté successivement sous différens angles d'élevation a toujours la même vitesse, les plus grandes hauteurs dans les différentes paraboles qu'il décrira seront comme les sinus verses des angles doubles des angles d'élevation ;* car dans toutes ces paraboles on aura toujours : la plus grande hauteur est au huitiéme du parametre, comme le sinus de l'angle double de l'angle d'élevation est au sinus total ; or le parametre & le sinus total seront toujours les mêmes, donc les plus grandes hauteurs seront comme les sinus verses des angles doubles des angles d'élevation.

COROLLAIRE V.

289. Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, & nommant a le sinus d'un angle d'élevation, & A le sinus d'un autre angle d'élevation, la plus grande hauteur repondante au sinus a sera $\frac{2a^2x}{8r}$ (*N.* 287), & la plus grande hauteur repondante au sinus A sera $\frac{2A^2x}{8r}$, ainsi ces hauteurs seront comme $\frac{2a^2x}{8r}$, $\frac{2A^2x}{8r}$, ou comme $2a^2$, $2A^2$, ou comme a^2, A^2, c'est-à-dire comme les quarrés des sinus des angles d'élevation.

PROPOSITION XCIX.

290. *Connoissant la vitesse d'un corps projetté obliquement, & un point* P (Fig. 115.) *que ce corps doit choquer dans son mouvement, connoître l'angle d'élevation qu'il faut lui donner.*

SOLUTION.

La vitesse du corps étant donnée, on peut trouver aisément son

ſon parametre, comme il a été dit ci-deſſus (*N.* 282); je nomme ce parametre $= a$, la hauteur cP $= b$, la diſtance A$c = c$, le ſinus total $= r$, & la tangente de l'angle d'élevation que je cherche $= x$.

Si je prens Ac pour le ſinus total, la droite cC ſera la tangente de l'angle d'élevation cherché, c'eſt pourquoi j'ai r, x, Ac, cC, ou $r, x :: c$, cC, donc $\frac{cx}{r} = c$C, & CP $=$ AN $= c$C $-$ cP $= \frac{cx}{r} + b$; or par la proprieté de la parabole, j'ai $\overline{PN}^2 = AN \times a$; donc $\overline{PN}^2 = \frac{acx}{r} - ab$; mais $\overline{PN}^2 = \overline{AC}^2$, & à cauſe du triangle rectangle ACc, j'ai $\overline{AC}^2 = \overline{Ac}^2 + \overline{cC}^2 = c^2 + \frac{c^2x^2}{r^2}$, donc j'ai $\frac{acx}{r} - ab = c^2 + \frac{c^2x^2}{r^2}$, & retranchant de part & d'autre $\frac{acx}{r}$ & c^2, puis multipliant par r^2, & diviſant par c^2, j'ai une équation du ſecond degré que je reſous à la maniere ordinaire en cette ſorte.

Je prens $\frac{ar}{2c}$ qui eſt la moitié du coefficient du ſecond terme, du ſecond membre, je l'éleve au quarré, & l'ajoûtant de part & d'autre à l'équation je tire la racine des deux membres, puis donnant $\frac{ar}{2c}$ de part & d'autre, je trouve enfin la valeur de x telle qu'on voit ici, de laquelle je tire cette analogie c, $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2} :: r, x$.

$$\frac{acx}{r} - ab = c^2 + \frac{c^2x^2}{r^2}$$

$$-ab - c^2 = \frac{c^2x^2}{r^2} - \frac{acx}{r}$$

$$-\frac{abr^2 - c^2r^2}{c^2} = x^2 - \frac{arx}{c}$$

$$\frac{a^2r^2}{4c^2} - \frac{abr^2 - c^2r^2}{c^2} = x^2 - \frac{arx}{c} + \frac{a^2r^2}{4c^2}$$

$$\sqrt{\frac{a^2r^2}{4c^2} - \frac{abr^2 - c^2r^2}{c^2}} = \frac{ar}{2c} - x$$

$$x = \frac{ar}{2c} - \sqrt{\frac{a^2r^2}{4c^2} - \frac{abr^2 - c^2r^2}{c^2}}$$

$$x = \frac{\overline{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2}} \times r}{c}$$

Si le point P (*Fig.* 117.) étoit en deſſous de l'horizon on auroit CP $=$ Cc $+$ Pc $= \frac{cx}{r} + b$, & achevant le calcul comme nous venons de faire, on trouveroit $x = \frac{\overline{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ab - c^2}} \times r}{c}$.

COROLLAIRE I.

291. Si l'on a $ab + c^2 = \frac{1}{4}a^2$, on aura par conſéquent $-$



[illegible] dans le cas de la Figure 115, & l'analogie [illegible] changera en celle-ci, r, $\frac{1}{2}a :: r$, x; c'est-à-dire, [illegible] la moitié du parametre, comme le sinus total [illegible] angle que l'on cherche.

COROLLAIRE II.

[illegible] plus grand que $\frac{1}{4}a^2$, on aura — [illegible] qui sera une racine imaginaire; ainsi la valeur [illegible] impossible dans le cas de la Figure 115, ce qui fait [illegible] que le corps ne pourroit atteindre le point marqué P.

[illegible] que si dans le cas de la Figure 117 on a c^2 [illegible] on auroit aussi r, $\frac{1}{2}a :: r$, x, & que si l'on avoit c^2 plus grand que [illegible], le corps ne pourroit atteindre le point [illegible].

PROPOSITION C.

[illegible] *Un corps étant projetté successivement sous différens angles* [illegible] *ayant toujours la même vitesse, les tems qu'il employe* [illegible] *paraboles qu'il décrit sur l'horizon, sont entr'eux comme* [illegible] *des angles d'élévation* (Fig. 115).

DEMONSTRATION.

Je nomme r le sinus total, a le sinus de l'angle DAR d'élévation, [illegible] de son complement à l'angle droit, & x le parametre, du centre A & du rayon AD je décris l'arc DZ, & menant ZX parallele à DR, la droite AX sera la secante de l'angle d'élevation, DR en sera le sinus droit, & AR sera le sinus de son complement; ainsi à cause des triangles semblables RAD, ZAX, j'ai AR, AD :: AZ, AX, ou b, $r :: r$, AX, donc $\frac{r^2}{b}$ = AX.

Or [illegible] le parametre est à l'amplitude AR, comme la secante de l'angle d'élevation est au sinus de cet angle, donc $\frac{r^2}{b}$, [illegible] AR, mais le sinus b de complement est au sinus total, comme AR, AD, donc b, $r :: \frac{abx}{r^2}$, $\frac{ax}{r}$ = AD; d'où je [illegible] AD, mais AD est l'espace que le corps parcourroit [illegible] uniforme, dans le même tems qu'il parcourt la parabole AMR, ainsi AD peut marquer le tems employé à par-

$=OL\times p$; or à cauſe des ordonnées OP, LC paralleles entr'elles, & des droites LO, CH perpendiculaires ſur OH, j'ai LO $=CH$ & $LC=OH$, donc $\overline{LC}^2=\overline{OH}^2$, & par conſéquent puiſque nous avons $\overline{LC}^2-\overline{OP}^2=OL\times p$, nous avons auſſi $\overline{OH}^2-\overline{OP}^2=HC\times p$, mais la double ordonnée MP étant coupée en deux également en P, & la droite PH lui étant ajoûtée, on a $MP\times PH=\overline{OH}^2-\overline{OP}^2$, donc $MP\times PH=HC\times p$; ce qui démontre le ſecond cas.

Dans le tems que j'écrivois ceci, je croyois faire uſage de cette proprieté de la parabole pour quelques unes des Propoſitions ſuivantes ; mais ayant enſuite trouvé des voyes plus courtes pour démontrer ces Propoſitions, je n'ai laiſſé ſubſiſter celle-ci que parce que cette proprieté de la parabole n'eſt pas connue de tout le monde, & qu'elle peut cependant être utile en bien des occaſions.

295. *Soit une parabole* AB (Fig. 234.) *décrite par un corps projetté ſelon une direction horizontale* AD, *par une force uniforme que nous exprimerons par* AD; *ſi du point* D *l'on mene* DB *parallele à l'axe, & qu'ayant mené en* B *la tangente* BT, *on conçoive que le même corps* B *ſoit projetté de* B *en* T *ſelon la direction* BT *avec une force uniforme qui ſoit à la force* AD *comme* BT *eſt à* AD, *le corps par cette ſeconde projection décrira la parabole* AB, *dans un tems égal à celui qu'il a employé à décrire la même parabole par la premiere projection.*

Concevons que AD ſoit divisé en parties égales, par exemple en 4, & que des points de diviſion ſoient menées les droites LH, CO, FM, paralleles à l'axe; il eſt viſible que la droite TB ſera auſſi diviſée en 4 parties égales aux points L, C, N, & que le tems que le corps pouſſé par la force AD employeroit à parcourir chacune des parties égales de AD, eſt égal au tems que le même corps pouſſé par la force TB employeroit à parcourir chacune des parties égales de BT; donc ſi à la fin du premier inſtant de la projection ſelon AD, la peſanteur du corps l'a fait deſcendre d'une quantité égale à EH, la même peſanteur à la fin du premier inſtant, ſelon la projection BT, fera deſcendre le corps d'une quantité NM égale à EH; par la même raiſon ſi à la fin du ſecond inſtant, du troiſiéme, & du quatriéme, le corps pouſſé par la force AD ſe trouve abaiſſé par ſa peſanteur

des quantités CO, FM, DB, le même corps poussé par la force BT se trouvera abaissé à la fin du second instant, du troisiéme & du quatriéme, des quantités CO, LH, TA égales chacune à chacune aux quantités CO, FM, DB, maintenant les quantités EH, CO, FM, DB étant comme les quarrés des tems employés à parcourir les espaces AE, AC, AF, AD, sont par conséquent comme 1, 4, 9, 16; ainsi les quantités NM, CO, LH, TA, sont aussi comme 1, 4, 9, 16; or les triangles CFN, CDB étant semblables, on a CD, CF :: DB, FN; mais CD = 2CF, donc DB = 2FN ou FN = $\frac{1}{2}$DB; or DB = 16, donc FN = 8, & ajoûtant à FN la quantité NM dont le corps poussé par la force BT, se trouve abaissé à la fin de BN, nous aurons FN + NM = 8 + 1 = 9; mais la quantité FM dont le corps poussé par la force AD se trouve abaissé à la fin de AF est 9; donc l'extrémité M de cet abaissement est précisement au même point où se trouve l'extrémité M de l'abaissement NM à la fin du tems de la seconde projection; l'abaissement CO étant le même dans l'une & l'autre projection, il est visible que l'extrémité O de l'un & de l'autre sera au même point; les triangles TAC, LEC étant semblables, donnent TA, LE :: AC, AE, or AC = 2AE, donc TA = 2LE, ou LE = $\frac{1}{2}$ TA; mais TA = DB = 16, donc LE = 8; donc si à LE on ajoûte la quantité EH = 1, dont la pesanteur a fait descendre le corps dans le tems AE selon la direction AD, la somme sera 8 + 1 = 9; or l'espace LH dont la gravité avoit fait descendre le corps à la fin du tems BL selon la direction BL, est aussi 9, dont l'extrémite H de l'abaissement LH, selon la direction BL, est au même point que l'extrémité de l'abaissement EH, selon la direction AE; donc le corps projetté selon la direction BT par une force comme BT, passe par les mêmes points par lesquels il passeroit s'il étoit projetté selon la direction AD par une force comme AD, & par conséquent le corps décrit la même courbe par l'une ou l'autre projection.

Si le corps poussé selon la direction BT par une force uniforme exprimée par BT, continuoit à se mouvoir après être parvenu en A, il décriroit de l'autre côté de l'axe une demi-parabole AQ égale à la demi-parabole AB; car prolongeant BT au-delà de T, & divisant son prolongement en parties égales aux parties de BT; il est visible qu'à la fin du tems BZ l'abaissement ZY seroit = 25, puisqu'il seroit comme le quarré de BZ = 5. Or les

triangles rectangles CTA, CZX donneroient CT, CZ :: TA, ZX, & CT$=\frac{2}{3}$CZ ; donc TA$=\frac{2}{3}$ZX, ou ZX$=\frac{3}{2}$ TA; mais TA$=16$, donc $\frac{1}{2}$TA$=8$, & $\frac{3}{2}$ TA$=24$, & par conséquent ZX$=24$; or nous venons de trouver ZY$=25$, donc ZY$=$ZY$-$ZX$=25-24=1$, c'est-à-dire que l'extrémité Y de l'abaissement ZY seroit autant éloigné de l'horizontale XD que l'abaissement EH, & comme les espaces TL, TZ étant égaux, les espaces AE, AX doivent être aussi égaux, il s'ensuit que les abaissemens XY, EH se trouvant égaux, & à égale distance de l'axe, les points Y, H appartiennent à une même parabole, & continuant le même raisonnement, on trouvera que la demi-parabole AQ décrite par le corps dans un tems égal à BT sera égale à la demi-parabole AB décrite dans le tems BT.

Par un semblable raisonnement, on trouvera que si le corps au lieu d'être poussé par la force BT de B vers T, étoit poussé de B vers V, ensorte qu'il parcourût l'espace BV dans le même tems qu'il parcourroit BT, sa pesanteur lui feroit décrire l'arc BK, que la même pesanteur lui feroit décrire, si après être parvenu en B lorsqu'il étoit poussé par AD, il continuoit de se mouvoir pendant un tems égal à celui que la force AD employeroit à lui faire parcourir DP$=$AD.

296. *Si sur le prolongement* BH (Fig. 235.) *de l'axe* MB *d'une demi-parabole* AB *décrite par le mouvement d'un corps projetté de* B *en* R *avec une direction horizontale, on prend une partie* DB *égale à la hauteur dont le corps en repos devroit descendre pour acquerir une vitesse égale à la vitesse de la force uniforme de la direction, & qu'ayant mené du point* D *sur la direction* BR *une droite qui la coupe en un point quelconque* E, *on éleve sur* DE *au point* E *la perpendiculaire* EM *qui coupe l'axe en* M *; je dis* 1°. *Que tandis que la force uniforme feroit parcourir au corps l'espace* BR *double de* BE, *la pesanteur abaisseroit ce corps d'une quantité égale à* BM. 2°. *Que si du point* R *on mene* RA *parallele à l'axe, & que du point* A *où cette ligne coupe la parabole on mene la tangente* AH, *& qu'on conçoive une force uniforme qui pousseroit le corps de* A *vers* H *dans un tems égal à celui que la force horizontale employeroit à lui faire parcourir l'espace* RB, *la droite* DM *composée de* DB *&* BM, *est la hauteur dont le corps* A *en repos devroit tomber pour acquerir une vitesse égale à celle de la force uniforme de la direction* AH.

La force horizontale avec la vitesse acquise à la fin de DB, feroit parcourir un espace double de DB dans un tems égal à ce-

lui que le corps auroit employé à descendre le long de DB (*N.* 63), cela posé.

L'espace DB parcouru par la chute DB est à l'espace BM parcouru par la chute BM, comme le quarré de la vitesse acquise par la chute DB est au quarré de la vitesse acquise par la chute BM, donc ces vitesses sont en raison soudoublée des chutes DB, BM; or à cause du triangle rectangle DEM, dans lequel la droite EB est perpendiculaire sur la base, les triangles rectangles DEB, EBM sont semblables, donc on a :: DB, BE, BM, & par conséquent DB est à BE en raison soudoublée de DB à BM, donc les vitesses acquises par les chutes DB, BM sont entr'elles comme DB, BE, & les tems employés à acquerir ces vitesses sont aussi comme DB, BE; or la force uniforme horizontale pendant le tems DB fait parcourir un espace double de DB, donc pendant le tems BE elle doit faire parcourir un espace BR double de l'espace BE, c'est la premiere chose que nous avions à démontrer.

La force uniforme de la direction AH feroit parcourir l'espace AE dans le même tems que la force uniforme de la direction BR feroit parcourir l'espace BE par la supposition. Or les triangles rectangles ARE, BEM sont semblables & égaux, car EB=ER, & BM=AR, puisque dans le tems que le corps auroit parcouru l'espace BR sa pesanteur l'auroit abaissée d'un espace AR égal à BM, comme il vient d'être démontré. Donc EM=AE, & par conséquent les deux forces uniformes sont comme ME, EB, mais à cause des triangles semblables MBE, EBD, on a EB, ME:: DB, DE, donc les forces EB, AE sont comme DB, DE; or les hauteurs dont le corps auroit dû tomber pour acquerir ces forces ou vitesses, sont en raison doublée de ces vitesses, donc ces hauteurs sont comme les quarrés de DB, BE; mais les triangles rectangles semblables BDE, DEM donnent :: BD, DE, DM, donc BD, DM sont entr'eux comme les quarrés de BD & DE, & par conséquent les hauteurs dont le corps devroit tomber, sont comme BD, DM; mais DB est la hauteur dont le corps doit tomber pour acquerir une force égale à la force horizontale; donc DM est la hauteur dont le même corps devroit tomber pour acquerir une force égale à la force de la direction AD, & c'est la seconde chose qu'il falloit démontrer.

On dira sans doute que la force horizontale avec la vitesse ac-

quise par la chute DB, doit faire parcourir un espace double de DB (*N. 63*), & la force oblique avec la vitesse acquise par la chute DM, doit faire parcourir un espace double de DM; & non pas l'espace AE, mais il faut prendre garde que cela n'est vrai que lorsque les espaces parcourus par les forces uniformes sont parcourus dans des tems égaux aux tems des chutes, lesquels tems sont inégaux entr'eux quand les chutes sont inégales; au contraire dans la question présente les espaces BE, AE que les forces uniformes font parcourir, sont parcourus dans un même tems, c'est pourquoi le tems de la chute BM étant plus grand que le tems de la chute DB, il faut diviser l'espace que la force oblique feroit parcourir par le tems de sa chute, afin de reduire les deux forces uniformes à un même tems. Soit par exemple DB $=1$; BE $=2$, donc à cause de :: DB, BE, BM, nous aurons BM $=4$, & DM $=$ DB $+$ BM $=1+4=5$; il est indubitable qu'à la fin de la chute BD le corps a acquis une force qui peut lui faire parcourir un espace BE double de BD, dans un tems égal au tems de la chute DB, & qu'à la fin de la chute DM le corps aura acquis une force qui peut lui faire parcourir un espace double de DM, & par conséquent $=10$ dans un tems égal à celui de la chute DM; mais les tems des chutes étant comme $\sqrt{1}$, $\sqrt{5}$, ou comme 1, $\sqrt{5}$, les espaces 2, 10 parcourus par les forces uniformes, seroient parcourus dans des tems inégaux 1, $\sqrt{5}$. Pour reduire donc ces deux forces à un même tems 1, il faut dire, si pendant le tems $\sqrt{5}$ la force oblique parcourt 10, que doit-elle parcourir pendant le tems 1? Et faisant la regle, on trouvera $\sqrt{5}, 10 :: 1, \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2\times 5}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$, & par conséquent $2\sqrt{5}$ sera l'espace que la force oblique acquise par la chute DM doit parcourir pendant le tems 1, que la force horizontale acquise par la chute DB employe à parcourir BE, & en effet, la droite AE ou EM est égale à $2\sqrt{5}$, car dans le triangle rectangle MBE on a $\overline{EM}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BM}^2 = 4 + 16 = 20$, & par conséquent EM $= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

De même si BE n'étoit égal qu'à 1, la force horizontale parcourroit BE dans la moitié du tems égal à celui de la chute DB; or alors à cause de BD $=$ BE on auroit BM $=1$, & DM $=2$, ainsi la force oblique avec la vitesse acquise à la fin de la chute BM, parcourroit un espace double de BM ou égal à 4 dans un tems égal à celui de sa chute; donc les tems du mouvement des deux

deux forces uniformes seroient $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, c'est pourquoi pour reduire ces deux forces à un même tems, il faut dire, si pendant le tems $\sqrt{2}$ la force oblique parcourt un espace $=4$, quel espace parcourra-t-elle pendant le tems $\frac{1}{2}$? Et faisant la regle on trouvera $\sqrt{2}, 4 :: \frac{1}{2} \frac{4\times\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; ainsi $\sqrt{2}$ est l'espace que la force oblique doit parcourir dans le tems que la force horizontale parcourroit BE $=1$; & en effet, dans la supposition présente AE seroit égal à $\sqrt{2}$, car dans le triangle rectangle EMB, on auroit $\overline{EM}^2$ ou $\overline{AE}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BM}^2 = 1 + 1 = 2$, donc AE $=\sqrt{2}$, & la même chose arriveroit dans telle autre supposition qu'on voudroit faire, ce qui montre évidemment la vérité de ce que nous avons démontré.

Si l'on a bien compris les principes précédens on en tirera sans peine toute la théorie & la pratique du jet des bombes, ainsi que nous allons le faire voir. On se souviendra qu'un corps poussé par la force oblique qui fait parcourir AE dans le même tems que la force horizontale fait parcourir BE, décrit la même parabole qu'il décriroit s'il étoit poussé par la force horizontale (*N.* 295).

En premier lieu, *la force d'un corps projetté horizontalement est égale à la racine du quart du parametre de la parobole qu'il décrit.*

Supposons que la parabole décrite soit BA (*Fig.* 235), & nommons p le parametre, nous aurons donc $\overline{AM}^2$ ou $\overline{RB}^2 = BM \times p$; or BE étant la moitié de AR, nous avons $\overline{AM}^2 = 4\overline{EB}^2$, donc $4\overline{EB}^2 = BM \times p$; d'un autre côté nous avons :: DB, BE, BM, donc $BM \times DB = \overline{BE}^2$, & multipliant par 4 nous aurons $4\overline{BE}^2 = BM \times 4BD$, donc $BM \times p = BM \times 4BD$, & par conséquent divisant par BM nous aurons $p = 4BD$, & $BD = \frac{1}{4}p$; mais BD étant la hauteur dont le corps doit tomber pour acquerir une force égale à la force uniforme horizontale, la vitesse acquise à la fin de BD est $\sqrt{BD}$, donc cette vitesse ou force est $\sqrt{\frac{1}{4}p}$.

En second lieu, *la force oblique qui fait parcourir l'espace* AE *dans le même tems que la force horizontale fait parcourir l'espace* BE, *est égale à la racine du quart du parametre du diametre qui passe par le point* A.

La force oblique est égale à la vitesse acquise par la chute DM, donc elle est $\sqrt{DM}$; mais DM $=$ DB $+$ BM, & par conséquent $4DM = 4DB + 4BM$; or 4DB est le parametre de l'axe BM,

comme on vient de voir, & 4BM eſt le quadruple de l'abſciſſe BM correſpondant au point A, & par la proprieté de la parabole le parametre du diametre qui paſſe par le point A, eſt égal au parametre de l'axe BM plus quatre fois l'abſciſſe BM, donc le parametre du diametre qui paſſe par A eſt $4BD + 4BM$, & ſon quart eſt $BD + BM = DM$. Donc puiſque la force oblique AE eſt égale à $\sqrt{DM}$, elle eſt par conſéquent égale à la racine du quart du parametre du diametre qui paſſe par A.

Achevant la parabole ABC, nous nommerons AC *amplitude* de la parabole, & menant du point C la droite CF parallele à l'axe, & qui coupe la direction oblique en F, nous nommerons AF *direction oblique*.

Il eſt viſible que EB étant égal à RE, & AC égal à 2RE, EB n'eſt par conſéquent que le quart de l'amplitude AC, & par la même raiſon AE, n'eſt que le quart de la direction oblique AF; or les chutes DB, DM ſont les chutes que le corps auroit dû faire pour acquerir les forces uniformes BE, AE qui agiſſent dans des tems égaux, donc pour acquerir des forces AC, AF, quadruples des forces BE, AE dans des tems quadruples, les chutes DB, DM devroient être quadruples; ainſi exprimant les forces BE, AE, non plus par les eſpaces BE, AE, qui ne ſont que les quarts des eſpaces qu'elles parcourent, mais par les eſpaces mêmes AC, AF, leurs viteſſes ſeront $\sqrt{4DB}$, $\sqrt{4DM}$, c'eſt-à-dire que la force horizontale ſera égale à la racine du parametre de l'axe, & la force oblique égale à la racine du parametre du diametre qui paſſe par le point A; c'eſt en effet la véritable valeur de ces forces, ainſi qu'on verra dans l'addition de cette premiere partie, où nous ferons voir que la force du choc dans un point quelconque de la parabole eſt égale à la racine du parametre du diametre qui paſſe par ce point; cependant comme les quarts ſont entr'eux en même raiſon que leurs entiers, il eſt permis de prendre les uns pour les autres, & c'eſt ce qu'on fait communement, parce qu'on y trouve plus de commodité.

En troiſiéme lieu. *Si un même corps eſt projetté par une même force, tantôt ſous une direction oblique à l'horiſon, & tantôt ſous un autre de différente obliquité, &c. il décrit une infinité de paraboles dont les parametres des axes ſont tous différens.*

Nous venons de voir 1°. Que ſi un corps pouſſé par une force horizontale, décrit une parabole BA (*Fig.* 235), & qu'étant pouſſé par une force oblique dans la direction AH de la tangente,

il décrive la même parabole AB dans un tems égal à celui qu'il a employé à la décrire lorſqu'il étoit pouſſé par la force horizontale, les deux forces ſont entr'elles comme AE, BE, c'eſt-à-dire comme le quart de la direction oblique AF au quart de l'amplitude AC. 2°. Que les hauteurs dont le corps devroit tomber pour acquerir les forces BE, AE, ſont entr'elles comme DB à DM, c'eſt-à-dire, comme le $\frac{1}{4}$ du parametre de l'axe eſt à DB+BM, ou au $\frac{1}{4}$ de ce parametre plus la hauteur de la parabole, cela poſé.

Soit la parabole BAC (*Fig.* 236), dont le $\frac{1}{4}$ du parametre eſt PA, & la hauteur eſt AD. Je décris ſur PD le demi-cercle FED, & menant du point A l'horizontale AR, & du point E les cordes ED, EP, je prouverai aiſément comme ci-deſſus que lorſque la peſanteur aura fait deſcendre le corps de la quantité AD = RB, la force horizontale lui aura fait parcourir l'eſpace RA double de AE; menant donc du point B la tangente BT qui paſſera par le point E par la proprieté de la parabole, ſi la force de la direction BE qui projetteroit le même corps de B en E, étoit à la force horizontale comme BE eſt à AE, le corps décriroit la même parabole BAC, & la force horizontale ſeroit à la force oblique, comme AE eſt à BE; d'où il ſuit, comme ci-deſſus, que les hauteurs dont le corps devroit tomber pour acquerir ces forces, ſeroient comme PA eſt à PD, ainſi la force BE ſeroit exprimée par $\sqrt{PD}$.

Je prens une droite $pd = PD$, je la partage en deux parties pa, ad différentes des parties PA, AD dont elle eſt compoſée auparavant; je prens pa pour le quart du parametre d'une parabole ab dont la hauteur eſt ad, je décris autour de pd le demi-cercle ped, je mene l'horizontale ar, & du point e les cordes ep, ed; ainſi je prouverois aiſément que quand la peſanteur aura fait deſcendre le corps d'une quantité égale à $ad = rb$, la force horizontale auroit fait parcourir au corps l'eſpace ar double de ae, & qu'en menant la tangente bt, ſi la force de la direction be étoit à la force horizontale comme be eſt à ea, le corps décriroit la même parabole, & que par conſéquent les hauteurs dont le corps devroit tomber pour acquerir les forces ae, be, devroient être comme pa, pd, d'où il ſuit que la force be ſeroit exprimée par $\sqrt{pd}$; mais $PD = pd$, donc $\sqrt{PD} = \sqrt{pd}$, & par conſéquent la force avec laquelle le corps pouſſé ſelon la direction BE dé-

crit la parabole BAC, eſt égale à la force avec laquelle le corps pouſſé ſelon la direction *be* décrit la parabole *bac*.

Or comme on peut couper PA en deux parties PA, AD, qui ne ſoient ni comme PA eſt à AD, ni comme *pa* eſt à *ad*, & que cette diviſion ſe peut faire en une infinité de façons; il s'enſuit qu'en prenant dans chacune de ces diviſions la partie ſupérieure pour le quart du parametre, & l'inférieure pour la hauteur, on décrira une infinité d'autres paraboles, & que ſi des extrémités B, *b*, &c. de leurs amplitudes on mene les tangentes BT, *bt*, &c. le corps pouſſé ſelon les directions de ces tangentes avec des forces qui ſeroient aux forces AE, *ae*, &c. comme BE, *be*, &c. décriroit les mêmes paraboles, BAC, *bac*, &c. & que les hauteurs dont il faudroit que le corps deſcendît pour acquerir ces forces BE, *be*, &c. ſeroient toujours la même PD, ou *pd*; donc ces forces BE, *be*, &c. étant toujours exprimées par $\sqrt{PD}$ ou $\sqrt{pd}$ ſeroient égales entr'elles, ainſi la même force $\sqrt{PD}$ peut faire parcourir une infinité de paraboles différentes dont les parametres ſont différens, ce qu'il falloit démontrer.

Au reſte, il faut prendre garde que quoique les forces ſelon les directions BE, *be*, &c. avec leſquelles le corps décrit les paraboles BAC, *bac*, &c. ſoient égales, il ne s'enſuit pas que les directions BE, *be*, &c. ſoient égales, & la raiſon en eſt que le corps ne décrit les paraboles BAC, *bac*, &c. que dans des tems égaux à ceux qu'il auroit employés à les décrire s'il avoit été pouſſé par les forces horizontales AE, *ae*, &c. leſquelles étant inégales entr'elles employent auſſi des tems différens, c'eſt pourquoi les directions BE, *be*, &c. qui ſont comme AE, *ae*, &c. doivent être inégales; ainſi l'on doit entendre que le même corps pouſſé ſous différentes directions par une force toujours égale à $\sqrt{PD}$ décriroit différentes paraboles dans des tems différens.

En quatriéme lieu. *Les quarts des directions ſous leſquelles un même corps étant pouſſé par une même force, peut décrire une infinité de différentes paraboles, ſont égaux aux cordes menées de l'extrémité d'un diametre d'un demi-cercle à tous les points de la circonférence de ce demi-cercle, & les quarts des amplitudes de ces mêmes paraboles ſont égaux aux perpendiculaires menées des extrémités de ces cordes ſur le diametre.*

Si dans la Figure 236, je fais BS = DP, & que ſur BS pris pour diametre je décrive un demi-cercle SEB, ce demi-cercle

passera par le point E, car les parties SR, RB du diametre SB étant égales chacune à chacune aux parties PA, AD du diametre PD = BS, il est évident que la perpendiculaire RE qui est moyenne proportionnelle entre les parties SR, RB, doit être égale à AE, qui est moyenne proportionnelle entre les parties PA, AD; donc l'ordonnée RE du demi-cercle SEB est égale à l'ordonnée AE du demi-cercle PED; mais par la proprieté de la parabole le point E est au milieu de RA & RE = EA, donc le demi-cercle SEB passe par le point E, & par conséquent la droite BE, qui est le quart de la direction oblique est égale à la corde BE menée de l'extrémité B au point E de la demi-circonférence; de même AE étant égal au quart de l'amplitude BC, l'ordonnée RE est aussi égale au quart de cette amplitude.

De même si je fais *bs* = *pd* & que sur *bs* pris pour diametre, je décrive un demi-cercle *seb*, lequel sera égal au demi-cercle SEB, à cause de l'égalité des diametres, ce demi-cercle passera par le point *e*, & le quart *be* de la direction oblique sera corde de ce cercle, & le quart *ae* ou *re* de l'amplitude *bc* sera égal à l'ordonnée *re* menée du point *e*; donc les deux quarts de direction BE, *be* seront corde d'un même cercle, de même que les quarts d'amplitudes RE, *re* seront les ordonnées menées de l'extrémité de ces cordes; de plus les parties SR, RB coupées par l'ordonnée ER seront égales l'une au quart PA du parametre de l'axe de la parabole correspondante BAC, & l'autre à la hauteur AD; de même les parties *sr*, *rb* coupées par l'ordonnée *er* seront égales l'une au quart *pa* du parametre de l'axe de la parabole correspondante *bac*, & l'autre à la hauteur *ad* de cette même parabole.

Or comme on peut couper le diametre SB ou PA d'une infinité de façons en deux parties SR, BR différentes de SR, BR; & qu'en prenant les différens SR pour des quarts de parametre, & les différens RB pour différentes hauteurs, on aura différentes paraboles dont les quarts d'amplitudes seront les différentes ordonnées RE, & les quarts de directions seront les différentes cordes BE, il s'ensuit que les quarts des directions & les quarts d'amplitude des différentes paraboles que peut décrire un même corps projetté avec une même force sous différentes directions obliques, sont compris dans un même demi-cercle, dont le diametre SB = PD est égal au quart du parametre du diametre qui passe par le point B, lequel parametre est toujours

le même dans ces différentes paraboles.

PROPOSITION CI.

297. *Tirer des principes précédens la théorie & la pratique du jet des bombes sans avoir recours à l'algebre.*

Il faut d'abord faire une épreuve en jettant une bombe avec une charge déterminée & sous un angle connu, & après avoir examiné l'amplitude de la parabole qu'elle aura décrite, il faut mener sur un papier une droite indéfinie AZ (*Fig.* 237.) qui représentera l'horizontale, & sur cette droite on prendra par le moyen d'une échelle la droite AE égale à l'amplitude; on élevera en A une droite indéfinie AX perpendiculaire sur AE, & au même point A on fera un angle MAE égal à l'angle sous lequel la bombe a été jettée, on coupera l'amplitude AE en quatre parties égales, & de l'extrémité O de l'une de ces parties on élevera sur AE la perpendiculaire OQ qui coupe la direction AM en Q, d'où l'on menera QT perpendiculaire sur AX; cela fait, il est visible que TQ sera le quart de l'amplitude, & AQ le quart de la direction AM, donc AQ sera une corde d'un cercle dont le diametre est égal à la hauteur de la parabole, plus le quart du parametre de son axe, & TQ sera l'ordonnée correspondante de ce cercle; pour trouver donc ce diametre on prolongera TQ en F, faisant QF=TQ, & la droite TF étant égale à la moitié de l'amplitude, le point F sera le sommet de la parabole; ainsi menant l'axe LFY perpendiculaire sur AE, la droite QL, & au point Q élevant sur QL la perpendiculaire QY qui coupe l'axe en Y, on aura YF égal au quart du parametre de l'axe, & FL égal à sa hauteur, donc faisant AX égal à LY, on auroit le diametre du demi-cercle cherché, ce diametre peut se trouver plus aisément en élevant sur AQ la perpendiculaire QX qui coupe AX en X, ou bien en prenant une troisiéme proportionnelle TX aux deux lignes AT, TQ, tout ceci n'est qu'une suite des principes précédens; car à cause des triangles semblables LQF, FQY, on a :: LF, QF, FY, donc $\overline{QF}^2 = LF \times FY$; or par la proprieté de la parabole on a $\overline{AL}^2$ ou $\overline{TF}^2$ ou $\overline{QF}^2 = LF \times p$, donc $\overline{QF}^2 = LF \times \frac{1}{4}p$, en nommant p le parametre de l'axe; & par conséquent $LF \times FY = LF \times \frac{1}{4}p$, & $FY = \frac{1}{4}p$, & par conséquent FY est la hauteur dont le corps devroit tomber pour acquerir une force horizontale avec laquelle le corps étant projetté de F vers T décriroit la parabole FA.

Ce demi-cercle étant trouvé, si l'on veut avoir l'amplitude de la parabole que décrira la même bombe poussée avec la même force sous un autre angle de direction MAE ou NAE, on formera l'angle MAE ou NAE, & du point M ou N, où la jambe MA ou NA coupera le cercle, on menera MG ou NH perpendiculaire au diametre AX, & GM sera le quart de l'amplitude AR de la parabole AIR décrite sous l'angle MAL, & la corde AM sera le quart de sa direction, de même NH sera le quart de l'amplitude de la parabole décrite sous l'angle NAE, & la corde AN sera le quart de sa direction, & ainsi des autres.

Si du centre G du cercle, on mene au point Q le rayon GQ, l'angle au centre AGQ sera double de l'angle du segment QAO qui est l'angle d'élevation de la parabole AFE, or TQ est le sinus de l'angle GAQ, donc le quart de l'amplitude de cette parabole est le sinus de l'angle double de son angle d'élevation, & comme on trouvera la même chose à l'égard des autres paraboles, il s'ensuit que *les quarts des amplitudes de ces paraboles, & par conséquent les amplitudes elles-mêmes sont entr'elles comme les sinus des angles doubles des angles d'élevation, lorsque la force de la poudre est la même.*

La hauteur FL ou TA de la parabole AFE décrite sous l'angle QAE est le sinus verse de l'angle QGA double de l'angle d'élevation QAE, & la même chose se trouvera dans les autres paraboles, donc *les hauteurs des paraboles décrites sous différens angles d'élevation avec une même force de poudre, sont entr'elles comme les sinus verses des angles doubles des angles d'élevation.*

Par la proprieté du cercle, on a :: TA, AQ, TX, donc $TA \times TX = \overline{AQ}^2$, c'est-à-dire le produit du diametre AX par le sinus verse TA de l'angle double de l'angle d'élevation QAE de la parabole décrite sous cet angle est égal au quarré de la corde AQ; or la moitié de la corde AQ étant le sinus de la moitié de l'angle QGA est aussi le sinus de l'angle d'élevation QAE, donc le produit du diametre par le sinus verse TA de l'angle double de l'angle d'élevation QAE est égal à quatre fois le quarré du sinus de cet angle d'élevation QAE ; or on trouvera la même chose dans les autres paraboles, donc les produits des sinus verses des angles doubles d'élevation par le diametre AX sont égaux à quatre fois les quarrez des sinus de ces angles d'élevation, mais les produits des sinus verses par le diametre sont

entr'eux comme les ſinus verſes, & les quarrez des ſinus des angles d'élevation pris quatre fois, ſont entr'eux comme les quarrez mêmes ; donc les ſinus verſes des angles doubles des angles d'élevation ſont entr'eux comme les quarrez des ſinus des angles d'élévation ; or les hauteurs des paraboles ſont entr'elles comme les ſinus verſes des angles doubles des angles d'élevation, donc *les hauteurs des paraboles ſont entr'elles comme les quarrez des ſinus des angles d'élevation.*

Les tems des projections ſous différens angles ſont comme les racines des hauteurs des paraboles, car le tems employé à parcourir la demi-parabole FA eſt égal au tems que la peſanteur employeroit à faire deſcendre le corps le long de la hauteur FL, puiſque ce corps projetté par une force horizontale FT ſe trouveroit en A dans le même tems que ſa peſanteur l'auroit abbaiſſé de la quantité FL ; or dans le mouvement acceleré les tems ſont comme les racines des eſpaces, donc les tems des différentes projections ſont comme les racines des hauteurs, mais les hauteurs ſont comme les quarrez des ſinus des angles d'élevation, donc les tems ſont comme les racines de ces quarrez, & par conſéquent les tems ſont comme les ſinus ; donc *la force de la poudre étant la même, les tems des projections ſous différens angles, ſont entr'eux comme les ſinus des angles d'élevation.*

L'ordonnée GM du cercle étant plus grande que toutes les autres, il s'enſuit que la parabole dont l'amplitude ſera le quadruple de cette ordonnée, aura auſſi la plus grande amplitude que la même force de poudre puiſſe donner ; or en ce cas la direction MA forme un angle de quarante-cinq dégrés ; donc *de toutes les projections qu'on peut faire ſous differens angles avec une même force de poudre, celle qui eſt faite ſous quarante-cinq dégrés a la plus grande amplitude.*

Les ordonnées du cercle également éloignées du centre ſont égales entr'elles, donc les projections qui auront pour amplitudes les quadruples de ces ordonnées ſeront égales ; or en ce cas les directions NA, QA formeront avec l'horizontale des angles également éloignés de 45 dégrés, comme il eſt aiſé de le démontrer ; donc *les projections faites avec une même force de poudre ſous des angles également éloignés de 45 degrés ont des ampliutdes égales.*

La diſtance AE d'un but E étant donnée, on diviſera cette diſtance

distance en quatre parties égales, & de l'extremité de la premiere partie, on élevera la perpendiculaire OQ ; si cette perpendiculaire coupe le cercle en un point Q, on menera la corde AQ, & l'angle QAO fait par cette corde avec l'horizontale sera l'angle d'élevation qu'il faudra donner au mortier pour atteindre le but avec une force de poudre convenable au diametre XA du cercle, mais si la perpendiculaire OQ ne coupe pas le cercle, ce sera signe qu'avec la même force de poudre on ne peut point atteindre ce but, ce qui est évident par les principes que nous venons d'établir.

Et si on vouloit trouver de combien il faudroit augmenter la charge pour atteindre un but R qu'on ne pourroit atteindre avec la charge convenable au diametre AX, on feroit en A un angle de 45 dégrés, ensuite on couperoit la distance AR en quatre parties égales, & de l'extremité de la premiere de ces parties, on éleveroit une perpendiculaire qui couperoit la direction A*x* en un point M que je suppose différent du point M du cercle XMA ; du point M on meneroit MG perpendiculaire à l'indéfinie AX ; ainsi GM seroit une plus grande ordonnée du cercle convenable à la force qu'on demande, c'est pourquoi du point G & du rayon GM on décriroit un cercle qui seroit le cercle cherché ; or la force exprimée par ce cercle étant à la force exprimée par le cercle précédent comme la racine de son diametre à la racine du diametre précédent, le rapport de ces racines donneroit le rapport des forces, & par conséquent on connoîtroit de combien on devroit augmenter la force précédente pour atteindre le but R sous un angle de 45 dégrés. J'ai pris l'angle de 45 dégrés, parce que cet angle donnant la plus grande amplitude d'une même force de poudre, il est visible qu'en prenant un autre angle, on n'auroit pû y atteindre avec la charge qu'on vient de trouver, & qu'il auroit fallu l'augmenter davantage, ce qu'il faut éviter le plus qu'on peut pour ne pas dépenser de la poudre inutilement.

On voit aisément qu'il n'est point de difficultés touchant les projections sur des buts au niveau de la batterie qu'on ne puisse résoudre sans peine par le moyen du cercle dont je viens de parler, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage. Mais voyons maintenant quel usage on peut faire de ce cercle à l'égard des buts qui sont au-dessus ou au-dessous du niveau de la batterie.

298. Il y a long-tems que l'on cherche une Methode aiſée pour atteindre un but ſitué au-deſſus ou au-deſſous du niveau de la batterie. M. Blondel propoſa ce Problême à l'Academie, & Meſſieurs Buot, de Romer, & de la Hire en donnerent de fort belles ſolutions ſynthetiques rapportées par M. Blondel dans ſon Traité du jet des Bombes; mais comme ces ſolutions demandent pluſieurs analogies, & la connoiſſance de pluſieurs angles & ſinus, ce qui les rend embarraſſantes dans la pratique. Le P. Reynaud, M. de Maupertuis, M. Wolf, & beaucoup d'autres Geometres ont propoſé des formules algebriques par leſquelles ils ont cru diminuer la difficulté. Quoique ces formules ne ſoient que du ſecond dégré, cependant leur uſage n'en eſt pas ſi aiſé qu'on ſe l'imagine, & d'ailleurs la plupart des gens de guerre n'aiment point l'algebre, & je doute fort qu'il ſe trouve des Bombardiers qui veuillent s'y aſſujettir. J'ai donc crû devoir me tourner d'un autre côté; la force ou la charge de la poudre eſt facile à déterminer dès qu'on connoît la route ou la parabole que la bombe doit décrire pour atteindre un but ſitué au niveau de l'horizon: il ne s'agit donc, me ſuis-je dit à moi-même, que de réduire les cas du deſſus ou du deſſous du niveau de la batterie au ſeul cas de M. Blondel, & de trouver pour cela une Méthode facile à pratiquer; or c'eſt ce que j'ai trouvé & d'une maniere ſi commode, qu'il n'eſt point d'enfant de dix ans qui ne puiſſe la pratiquer comme on le verra bientôt, mais auparavant voici le principe que je dois établir.

Soit une parabole ABC (Fig. 238.) *décrite ſous un angle* DAC *avec une force quelconque; ſoit l'amplitude* AC *coupée en quatre parties égales, & des points de diviſion ſoient élevées les perpendiculaires* FI, GK, HL, *qui coupent la direction* AD *auſſi en quatre parties égales, & la parabole aux points* M, B, N, *entre leſquels le point* B *eſt le ſommet & les deux autres* M, N, *étant également éloignés du ſommet ſont auſſi également éloignés de l'amplitude* AC. *Je dis que ſi l'on joint les points* M, N, *par la droite* MN *qui par conſéquent ſera parallele à l'amplitude, & qui coupera la plus grande hauteur* BG *en* O, *la partie* BO *de cette hauteur ſera égale au tiers de* FM *ou de* NH.

Je nomme $AD = x$, donc $AI = \frac{1}{4}x$, $AK = \frac{2}{4}x$, & $AL = \frac{3}{4}x$. Or par la proprieté de la parabole les chûtes IM, KB, LN, DC ſont comme les quarrez des droites AI, AK, AL, AD, donc ces chutes ſont $\frac{1}{16}xx$, $\frac{4}{16}xx$, $\frac{9}{16}xx$, & xx; mais à cauſe

des triangles ſemblables IAF, KAG, LAH, DAC, on a DC, IF :: DA, IA, & IA $=\frac{1}{4}$DA, donc IF $=$ DC $=\frac{1}{4}xx$; par un ſemblable raiſonnement on trouvera KG $=\frac{2}{4}xx$, & LH $=\frac{3}{4}xx$; donc ſi de IF $=\frac{1}{4}xx$ on retranche IM $=\frac{1}{16}xx$, on aura FM $=\frac{3}{16}xx$; de même, ſi de KG $=\frac{2}{4}xx$ on retranche KB $=\frac{4}{16}xx$, le reſte BG ſera $\frac{4}{16}xx$; ôtant donc de BG $=\frac{4}{16}xx$, la partie GO $=$ FM $=\frac{3}{16}xx$, on aura BO $=\frac{1}{16}xx$, & par conſéquent BO ſera égal au tiers de FM, ce qu'il falloit démontrer. Cela poſé,

PREMIERE DIFFICULTÉ.

La hauteur BN (Fig. 239.) *d'un but* B *au-deſſus du niveau de la batterie* A *étant donnée avec la diſtance* AN, *trouver l'angle d'élevation ſous lequel on atteindra ce but, & la force qu'on y doit employer.*

SOLUTION.

Je coupe AN en trois parties égales aux points O, P ; je prolonge AN, & je fais NM égal à $\frac{1}{3}$ de AN ; du point P milieu de AM j'éleve PQ que je fais égal à $\frac{4}{3}$NB, & la parabole qui aura pour hauteur la droite QP & pour amplitude la droite AM paſſera par le but B par le principe précédent, puiſque QP ſera plus grand que BN de $\frac{1}{3}$BN ; menant donc du point A la tangente AR, l'angle RAM ſera l'angle d'inclinaiſon qu'il faudra donner au mortier, & cet angle pourra ſe connoître aiſément, à cauſe que les côtés AP, PR, ou 2PQ du triangle rectangle APR ſont connus ; il ne s'agit donc plus que de trouver la force de la poudre, & pour cela je mene du ſommet Q la droite QS qui coupe en S la droite AX perpendiculaire ſur AC, & en Z la tangente AR ; j'éleve au point Z la droite XZ perpendiculaire ſur AR, laquelle coupe AX en X, & la droite AX eſt le diametre du cercle XZA qui comprend cette projection par les principes établis ci-deſſus ; donc la racine de XA eſt la force de la poudre, c'eſt-à-dire que ſi on avoit fait une épreuve qui eut donné un diametre plus grand ou moindre que XA, la différence des racines des diametres marqueroit de combien il faudroit augmenter ou diminuer la charge pour atteindre le but ſous l'angle RAM.

Il eſt viſible que toutes les lignes néceſſaires dans ce cas ſont faciles à trouver, car les côtés AP, PR du triangle rectangle

APR étant connus, ſon hypothenuſe ſe connoîtra aiſément, & par conſéquent ſa moitié AZ; de même l'angle d'inclinaiſon RAP pouvant ſe connoître comme il a été dit, l'angle RAX complement à l'angle droit de l'angle RAP ſera auſſi connu, donc dans le triangle AZX dont on connoît le côté AZ, & l'angle aigu ZAX, on pourra connoître l'hypothenuſe AX.

SECONDE DIFFICULTE'.

Connoiſſant la hauteur BP (Fig. 240) *du niveau* AB *de la batterie* A *au-deſſus d'un but* P, *&* *la diſtance* AB *connoître ſous quelle angle d'élevation on peut atteindre ce but & avec quelle force.*

SOLUTION.

Je coupe BP en trois parties égales, j'en prens deux de B en C; je coupe auſſi AB en trois parties égales, & j'en prens deux de A en D.

Du point C par le point D, je mene CDE faiſant DE = DC; du point E, j'abbaiſſe EQ perpendiculaire ſur la droite AD, laquelle ſe trouve partagée également en Q, car les triangles rectangles CDB, DEQ étant ſemblables, & la baſe DC étant égale à la baſe DE, le côté DB eſt par conſéquent égal au côté QD, mais DB eſt le tiers de AB, donc QD en eſt auſſi le tiers, & AQ eſt le tiers reſtant, donc AQ = QD; je coupe EQ en deux parties égales en H, & la parabole qui a pour hauteur HQ, & pour baſe AD paſſe par le but donné P, ce que je démontre ainſi

Du point E je mene par le point A la tangente ES, faiſant AS = AE, la force uniforme qui feroit parcourir AE ſelon la direction AE feroit parcourir dans le même tems la droite AS ſelon la direction AS, & par conſéquent l'abbaiſſement EH cauſé par la peſanteur à la fin de AE ſeroit égal à l'abbaiſſement ST à la fin de AS; or les triangles rectangles AVS, AEQ étant ſemblables, & le côté AE étant égal au côté AS, on a VS=EQ; ajoutant donc à VS la droite ST = EH = $\frac{1}{2}$EQ, on a VT=EQ + $\frac{1}{2}$EQ = $\frac{3}{2}$EQ; or par la conſtruction CP = $\frac{1}{2}$BC, & BC = EQ; donc CP = $\frac{1}{2}$EQ, & BP = $\frac{3}{2}$EQ, & par conſéquent VT = BP; or il eſt viſible que VQ = QB; donc les points T, P ſont également diſtans de l'axe EX prolongé; ainſi puiſque la parabole AHD étant continuée du côté de T paſſe par le point T, la même parabole continuée du côté de P paſſera par le point P.

Pour trouver la force de la poudre on menera du ſommet H la droite HN qui coupe la tangente AE en N, & élevant au point N la perpendiculaire NM qui coupe en M la droite AM perpendiculaire ſur AD, la droite AM ſera le diametre du cercle qui comprend cette projection, &c.

TROISIEME DIFFICULTÉ.

Connoiſſant la hauteur BP (Fig. 241.) *du niveau* AB *de la batterie au-deſſus d'un but* P, *& la diſtance* AB, *connoître ſous quel angle d'abbaiſſement* BAC *on peut atteindre ce but & avec quelle force.*

Je coupe BP en trois parties égales, & j'en prens deux de B en C; du point C par le point A je mene la droite CE, faiſant AE = AC; du point E je mene EQ perpendiculaire ſur BD, & coupant EQ en deux parties égales en H, & faiſant CD = QA, la parabole qui a pour hauteur la droite HQ & pour baſe AD = 2AQ paſſe par le but P; tirant donc ſelon la direction AC, on atteindra P.

La force uniforme qui feroit parcourir AE ſur la direction AE, fait parcourir dans le même tems la droite AC ſur la direction AC; donc l'abbaiſſement EH cauſé par la peſanteur à la fin de AE eſt égal à l'abbaiſſement CP qui ſeroit cauſé par la même peſanteur à la fin de AC; or à cauſe des triangles ſemblables & égaux AEQ, ABC, on a EQ = BC, donc EH — $\frac{1}{2}$EQ = $\frac{1}{2}$BC, & par conſéquent l'abbaiſſement CP = $\frac{1}{2}$BC, donc CP = $\frac{1}{3}$BP, & BC plus l'abbaiſſement CP eſt égal à BP, donc la parabole paſſe par le point P: on trouvera ſa force de même que ci-deſſus.

QUATRIEME DIFFICULTÉ.

Connoiſſant la hauteur BP (Fig. 241.) *du niveau de la batterie* A *au-deſſus d'un but* B, *& la diſtance* AB, *connoître la force qu'il faut donner pour atteindre le but en tirant ſelon l'horizontale* AB.

Je prens une troiſiéme proportionnelle aux lignes BP & AB, & il eſt clair que cette proportionnelle eſt le parametre de la parabole AP qui paſſe par le point P; ainſi le quart de cette parabole eſt la hauteur dont le corps devroit tomber pour acquerir la force requiſe. Ce quatriéme cas n'a rien de difficile, & je n'en ai parlé que parce que quelques Auteurs y ont trouvé de l'embarras.

J'ai été plus long que je ne penſois ſur cette matiere, mais

j'eſpere qu'on me pardonnera en faveur d'une nouveauté dont l'uſage eſt extremement étendu.

Au reſte lorſque le but eſt au-deſſus ou au-deſſous du niveau de batterie, il y a des cas où il eſt impoſſible de l'atteindre, mais comme on peut aiſément juger de ces cas, je ne m'y arrête point de peur d'être trop long, il me ſuffira de dire que lorſqu'en agiſſant comme j'ai dit, on trouvera qu'il faudroit une charge qui ſeroit au-delà de la plus grande qu'on a coutume d'employer, le cas ſeroit impoſſible, puiſqu'on ne ſçauroit charger plus qu'on ne peut.

PROPOSITION CII.

299. *Trouver la courbe de projection d'un corps en ſuppoſant que les directions de la peſanteur dans les differens endroits de la courbe ne ſoient pas paralleles entr'elles.*

SOLUTION.

Suppoſons que le point C (*Fig.* 119.) ſoit le centre de la terre, & que le corps A ſoit projetté horizontalement, en ſorte que la direction de la force qui le projette ſoit la ligne horizontale vraye ou l'arc AT, & que l'eſpace AN ſoit l'eſpace que cette force feroit parcourir au corps dans une minute. Suppoſons auſſi que la droite AH ſoit la hauteur d'où le corps doit tomber pour acquerir une viteſſe égale à la viteſſe que donne la force qui a pour direction l'arc AT, & enfin que la droite AP ſoit l'eſpace que la peſanteur du corps lui feroit parcourir dans une minute. Je mene du point N la droite NC au centre de la terre, & du centre C avec le rayon CP je décris l'arc PM, ainſi le point M eſt le point où le corps A doit ſe trouver à la fin de la premiere minute.

Je mene Cn infiniment proche de CN, & l'arc pm infiniment proche de PM, & nommant AH $= a$, AP $= x$, AC $= b$, AN $= y$, j'ai Pp $=$ RM $= dx$, N$n = dy$, PC $=$ MC $= m$C $= b - x$.

Les ſecteurs ſemblables CNn, CRm donnent CN, CR :: Nn, Rm, ou b, $b - x :: dy$, $\frac{bdy - xdy}{b} =$ Rm, donc $\overline{Rm}^2 = \frac{\overline{b-x}^2 \times dy^2}{bb}$, or $\overline{MR}^2 = dx^2$, & le triangle rectangle MmR donne $\overline{Mm}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{Rm}^2$, donc $\overline{Mm}^2 = dx^2 + \frac{\overline{b-x}^2 \times dy^2}{bb} = \frac{b^2dx^2 + \overline{b-x}^2 \times dy^2}{bb}$.

Maintenant ſi le corps deſcendoit le long de AP ou de NM,

la viteſſe acquiſe en P ſeroit $\sqrt{AP} = \sqrt{x}$, & comme l'eſpace P*p* ou MR eſt infiniment petit, on peut regarder cette viteſſe comme uniforme pendant le tems que le corps parcoureroit P*p* ou MR; de même la viteſſe acquiſe à la fin de l'arc AM étant la même que la viteſſe acquiſe à la fin de HP $= a + x$, à cauſe que ce mouvement eſt compoſé de la viteſſe HA que donne la force qui a la direction AT, & de la viteſſe que donne la peſanteur, la viteſſe, dis-je, acquiſe en M eſt $\sqrt{a+x}$; or cette viteſſe peut être regardée comme uniforme pendant le tems que le corps parcourt l'eſpace M*m*, donc les viteſſes des eſpaces MR, M*m* étant cenſées uniformes, elles ſont entr'elles comme ces eſpaces, & par conſéquent MR, M*m* :: $\sqrt{x}, \sqrt{a+x}$, & $\overline{MR}^2, \overline{Mm}^2 :: x, a+x$; mais nous avons $\overline{MR}^2 = dx^2$, & $\overline{Mm}^2 = \frac{b^2dx^2 + \overline{b-x}^2 \times dy^2}{bb}$, donc nous avons l'analogie qu'on voit ici.

Et multipliant la premiere raiſon par *bb*, puis faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, enſuite retranchant de part & d'autre $bbxdx^2$, puis tirant la racine quarrée, enfin diviſant par $\overline{b+x}\sqrt{x}$, j'ai $dy = \frac{bdx\sqrt{a}}{\overline{b-x}\sqrt{x}}$, dont l'intégrale eſt $y = \int \frac{bdx\sqrt{a}}{\overline{b-x}\sqrt{x}}$, ou bien $y = \int \frac{abdx}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{a}$.

$$dx^2,\ \frac{b^2dx^2 + \overline{b-x}^2 \times dy^2}{bb} :: x,\ a+x$$

$$bbdx^2,\ b^2dx^2 + \overline{b-x}^2 \times dy^2 :: x,\ a+x$$

$$abbdx^2 + bbxdx^2 = b^2xdx^2 + \overline{b-x}^2 \times xdy^2$$

$$abbdx^2 = \overline{b-x}^2 \times xdy^2$$

$$bdx\sqrt{a} = \overline{b-x} \times dy\sqrt{x}$$

$$\frac{bdx\sqrt{a}}{\overline{b-x}\sqrt{x}} = dy$$

$$y = \int \frac{bdx\sqrt{a}}{\overline{b-x}\sqrt{x}}$$

$$y = \int \frac{abdx}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$$

Pour trouver cette integrale, je multiplie le ſecond membre par a, ce qui donne $\int \frac{a^2bdx}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$, & je regarde ce produit comme l'aire d'une courbe, laquelle étant décrite, & ſa quadrature étant ſuppoſée connue, je n'aurai qu'à diviſer par a pour avoir la valeur de y.

Or je puis décrire cette courbe de plusieurs façons comme on a pû l'observer dans les exemples que nous avons donnés ci-dessus de ces sortes de courbes, mais dans le cas present j'observe que la courbe que je cherche étant $\int \frac{a^2bdx}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$, son élement sera $\frac{a^2bdx}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$, & par conséquent son ordonnée sera $\frac{a^2b}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$; or cette ordonnée est formée par deux analogies dont la premiere est $\sqrt{ax}$, $a :: a$, $\frac{a^2}{\sqrt{ax}}$, & la seconde est $\overline{b-x}$, $\frac{a^2}{\sqrt{ax}} :: b$, $\frac{a^2b}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$. Mais le premier terme $\sqrt{ax}$ de la premiere analogie est l'ordonnée d'une parabole dont le parametre est $=a$, ainsi si je décris sur le diametre AC une parabole AZ dont le parametre soit $AH=a$, & que je fasse PQ, AH :: AH, $\frac{\overline{AH}^2}{PQ} = \frac{a^2}{\sqrt{ax}}$, & qu'ensuite je fasse CP, $\frac{a^2}{\sqrt{ax}}$ :: AC, $\frac{a^2 \times AC}{CP\sqrt{ax}} = \frac{a^2b}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$, la droite $\frac{a^2b}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$ sera l'ordonnée de la courbe que je cherche correspondante à l'abscisse AP; & faisant la même chose à l'égard de toutes les abscisses prises sur AC, je trouverai toutes les ordonnées, & par conséquent l'aire de la courbe que je cherche; ainsi supposant que cette aire qui sera $\int \frac{a^2b}{\overline{b-x}\sqrt{ax}}$ soit connue, & divisant par a sa partie qui est coupée par l'ordonnée correspondante à l'abscisse AP, le quotient sera $\int \frac{ab}{\overline{b-x}\sqrt{ax}} = y$, c'est-à-dire l'arc AN; ainsi supposant la quadrature du cercle, c'est-à-dire qu'on ait une ligne égale à la circonférence du rayon CA, on aura la valeur de son arc AN; c'est pourquoi de l'extremité N tirant NC au centre C, & décrivant l'arc PM, on trouvera le point M de la courbe de projection correspondante à l'extremité P de l'abscisse AP que je suppose connue & déterminée; & faisant la même chose à l'égard de toutes les autres abscisses de AC, on aura la courbe AMS de projection.

Comme ceci n'est pas d'une grande utilité, je n'entre pas dans un plus grand détail.

CHAPITRE

CHAPITRE XI.

Du choc des Corps.

DEFINITIONS.

300. ON dit qu'un corps eſt *parfaitement dur*, lorſqu'en venant à choquer contre un autre il ne change point de figure, qu'il eſt *mol* lorſque le choc lui fait perdre la figure qu'il avoit, enfin qu'il eſt *élaſtique* ou *à reſſort*, lorſque le choc lui faiſant d'abord perdre ſa premiere figure, il la reprend auſſitôt par ſa propre force. Un bâton, par exemple qui ſe courbe lorſqu'on le preſſe en appuyant un de ſes bouts ſur un plancher ou contre une muraille, & qui ſe remet en ligne droite lorſqu'on ne le preſſe plus, eſt un corps *élaſtique.*

301. On dit qu'un corps choque un autre corps *perpendiculairement* lorſqu'il le choque ſelon une direction perpendiculaire à ce corps, & qu'il le choque *obliquement* lorſqu'il le choque ſelon une direction oblique.

302. Le *centre de percuſſion* eſt le point par lequel un corps choque un autre corps avec une force plus grande que par tout autre point.

303. L'*action* d'un corps ſur un autre eſt la maniere dont ce corps agit ſur l'autre, & la *réaction* eſt la maniere dont le corps choqué ou preſſé agit ſur celui qui le choque ou qui le preſſe.

Tout corps qui agit ſur un autre corps reçoit de cet autre corps une réaction qui eſt égale à ſon action. *Si quelqu'un*, dit M. Newton, *preſſe une pierre avec le doigt, ce doigt ſera autant preſſé par la pierre que la pierre en eſt preſſée. Si un Cheval tire un poids, il eſt attiré de la même façon par ce poids ;* c'eſt-à-dire, la force qu'il a pour aller en avant eſt diminuée d'une quantité égale à la réſiſtance que fait le corps, & de là on a tiré l'axiome ſuivant.

AXIOME.

304. La reaction eſt égale & contraire à l'action.

PROPOSITION CIII.

305. *Si un corps* A *non élaſtique* (Fig. 120) *choque un autre corps*

B *non élastique qui est en repos, ou qui se meut selon la même direction, mais avec moins de vitesse, la somme des quantités de mouvement après le choc est égale à la somme des quantités avant le choc.*

DEMONSTRATION

Si les deux corps se meuvent selon la même direction, je nomme a la quantité de mouvement de A avant le choc, b la quantité de mouvement de B aussi avant le choc, & c la quantité que B reçoit dans l'instant du choc, par l'axiome précedent B reagissant sur A produit dans A une quantité $=c$; or ce mouvement étant contraire au mouvement a, détruit dans A une quantité $=c$, donc le mouvement de A après le choc est $a-c$, & celle de B est $b+c$, ajoûtant donc ensemble ces deux quantités de mouvement la somme sera $a-c+b+c=a+b$, mais la somme des quantités de mouvement avant le choc étoit aussi $a+b$, donc les sommes des quantités de mouvement sont égales avant & après le choc.

Si B est en repos avant le choc, sa quantité de mouvement est $=0$, & par conséquent la somme des quantités de mouvement avant le choc est $a+0=a$; or après le choc le mouvement de B est c, & celui de A est $a-c$, à cause que B par sa reaction détruit c dans A, donc la somme des mouvemens après le choc est $a-c+c=a$, & par conséquent la somme des quantités de mouvement avant le choc est égale à la somme après le choc.

PROPOSITION CIV.

306. *Si deux corps* A, B *non élastiques* (Fig. 120.) *qui se meuvent avec des directions contraires viennent à se choquer, la différence de leurs quantités de mouvement avant le choc est égale à la somme de leurs quantités de mouvement après le choc.*

DEMONSTRATION.

Je nomme a la quantité de mouvement de A avant le choc; & b la quantité de mouvement de B, aussi avant le choc; ainsi si $a=b$, la différence sera $a-b=0$; or les deux corps agissant & reagissant avec la même force, le mouvement cessera dans l'instant du choc, donc la quantité de mouvement après le choc sera égale à zero, & par conséquent cette quantité sera égale à la différence avant le choc.

Si a eſt plus grand que b, la différence avant le choc ſera $a - b$; or le mouvement de B après le choc ſera $= c$, parce que a aura détruit b & produit le mouvement contraire c dans B, & à cauſe de la reaction de B le mouvement de A après le choc ſera $a - b - c$, ajoûtant donc enſemble ces deux quantités de mouvement, la ſomme ſera $a - b - c + c = a - b$, donc la ſomme des quantités de mouvement après le choc ſera égale à la différence des quantités avant le choc.

Si b eſt plus grand que a, la différence avant le choc ſera $b - a$, & l'on connoîtra aiſément que le mouvement de a après le choc ſera c, que celui de b ſera $b - a - c$, & que la ſomme des deux ſera $b - a - c + c = b - a$, donc, &c.

Nota. Que dans les cas de cette Propoſition, de même que dans ceux de la précédente, les Carteſiens diſent qu'il y a toujours une même quantité de mouvement avant & après le choc; mais comme ils ne prennent pour quantité de mouvement avant & après le choc que celle qui eſt ſelon la direction du corps qui a le plus de force, & qu'ils en retranchent celle qui a une direction contraire, il eſt viſible que ce que nous appellons différence des quantités de mouvement avant le choc, eſt la même choſe que ce qu'ils appellent quantité de mouvement, & qu'ainſi on eſt d'accord dans le fonds quoiqu'on s'exprime différemment.

AXIOME.

307. *Si un corps* A *non élaſtique venant à choquer un corps* B *ne lui communique aucun mouvement, le mouvement du corps* A *ceſſe totalement.*

L'expérience générale & commune eſt une preuve certaine de cet Axiome, cependant ſi on en veut une raiſon, il n'y a qu'à faire attention que le corps A ne communiquant aucune quantité de mouvement au corps B, le corps B ne ſçauroit non plus lui en donner par ſa reaction, & qu'ainſi le corps B ne faiſant que s'oppoſer invinciblement au mouvement du corps A, il faut néceſſairement que le mouvement de celui-ci ſe détruiſe; ou bien encore on peut dire que le corps A choquant le corps B avec toute ſa force, laquelle eſt égale à ſa quantité de mouvement, le corps B reagit en lui communiquant une égale quantité de mouvement, dont la direction eſt contraire à celle qu'il avoit, ce qui fait que le mouvement ſe détruit.

PROPOSITION. CIX.

313. *Si deux corps non élastiques, d'égales masses, & qui se meuvent avec différentes vitesses & des directions contraires, viennent à se choquer, ensorte que l'on entraine l'autre, la vitesse après le choc sera égale à la moitié de la différence des vitesses avant le choc.*

DEMONSTRATION.

Soit M la masse du premier & du second, V la vitesse du premier & *u* celle du second; la quantité de mouvement du premier sera MV, celle du second sera M*u*, & leur différence sera MV — M*u*; or cette différence est égale à la différence de la quantité de mouvement après le choc (*N* 306), donc la vitesse après le choc sera $\frac{MV - Mu}{2M}$, mais la différence des vitesses avant le choc est V — *u*; donc la vitesse après le choc est à la différence des vitesses avant le choc, comme $\frac{MV - Mu}{2M}$ est à V — *u*, ou comme $\frac{MV - Mu}{2M}$ est à $\frac{2MV - 2Mu}{2M}$, ou comme 1 est à 2.

COROLLAIRE I.

314. *Si les masses étant inégales, les vitesses sont reciproques aux masses, le mouvement cesse après le choc.* Car par la supposition on a M, *m* :: *u*, V, donc MV = *mu*, c'est-à-dire les quantités des mouvemens avant le choc sont égales, & par conséquent leur différence MV — *mu* = o; or après le choc la quantité de mouvement restante est égale à la différence des quantités avant le choc (*N.* 306), donc cette quantité est zero, & par conséquent le mouvement cesse.

COROLLAIRE II.

315. *Si les masses étant inégales les vitesses sont égales, la vitesse après le choc est à la vitesse avant le choc, comme la différence des masses est à leur somme.* Car la quantité de mouvement du premier avant le choc est MV, celle du second est *m*V, & leur différence est MV — *m*V; mais la quantité de mouvement après le choc est égale à cette différence, donc la vitesse après le choc est $\frac{MV - mV}{M + m}$, & par conséquent cette vitesse est à la vitesse avant le choc, commme $\frac{MV - mV}{M + m}$ est à V, ou $\frac{MV + mV}{M + m}$, ou comme M — *m* est à M + *m*.

A avant le choc, la quantité de mouvement de A avant le choc est donc MV, & celle de B est zero; mais après le choc la somme des quantités de mouvement doit être égale à la somme des quantités de mouvement avant le choc, (*N.* 305), donc la somme après le choc doit être encore $=$ MV; or la vitesse est toujours égale à la quantité de mouvement divisée par la masse, donc la vitesse commune aux deux corps après le choc est MV divisée par $M+m$, c'est-à-dire $\frac{MV}{M+m}$; mais la vitesse avant le choc étoit V, donc la vitesse après le choc est à la vitesse avant le choc, comme $\frac{MV}{M+m}$ est à V, ou comme $\frac{MV}{M+m}$ est à $\frac{MV+mV}{M+m}$, ou comme M est à $M+m$.

Si $M=m$ la vitesse après le choc sera à la vitesse avant le choc comme M à 2M ou comme 1 à 2.

PROPOSITION CVIII.

311. *Si un corps* A *non élastique choque un autre corps* B *non élastique aussi, & qui se meut selon la même direction, mais avec moins de vitesse, & que le corps* A *entraine le corps* B, *la vitesse après le choc sera égale à la somme des quantités de mouvement divisée par la somme des masses.*

DEMONSTRATION.

Je nomme M la masse de A, V sa vitesse, m la masse de B, & u sa vitesse; la quantité de mouvement de A avant le choc sera donc MV, celle de B sera mu, & la somme des deux $MV+mu$; or cette somme doit être la même après le choc (*N.* 305), donc la vitesse commune après le choc sera $\frac{MV+mu}{M+m}$.

COROLLAIRE.

312. Si $M=m$ la vitesse après le choc est égale à la moitié de la somme des vitesses avant le choc; car la vitesse après le choc sera $\frac{MV+Mu}{M+m}=\frac{MV+Mu}{2M}$; or la somme des vitesses avant le choc est $V+u$, donc la vitesse après le choc sera à la somme des vitesses avant le choc, comme $\frac{MV+Mu}{2M}$ est à $V+u$, ou comme $\frac{MV+Mu}{2M}$ est à $\frac{2MV+2Mu}{2M}$, ou comme $MV+Mu$ est à $2MV+2Mu$, ou enfin comme 1 à 2.

Or l'opération que nous venons d'enseigner pour trouver le centre de percussion est la même que nous avons enseignée ci-dessus (*N.* 264.) pour trouver le centre d'oscillation, donc le centre d'oscillation & le centre de percussion d'un corps ne sont qu'une même chose.

Si le corps AB se meut toujours parallelement à lui-même vers le corps AC (*Fig.* 122), toutes ses parties parcourent des espaces BC, PM, RS, &c. égaux entr'eux, & ces espaces expriment leurs vitesses à cause qu'ils sont parcourus dans le même tems, donc les forces de ces parties sont leurs produits par ces vitesses égales; mais pour trouver un point sur AC où la somme de ces forces étant réunie produise le même effet, il faut multiplier ces forces par leurs distances AC, AM, AS, &c. & diviser ensuite la somme des produits par la somme des forces, comme il vient d'être dit; or les vitesses étant égales les forces sont comme les masses, donc on aura le même quotient, si au lieu de multiplier les forces par leurs distances AC, AM, AS, &c. & de diviser la somme des produits par la somme des forces, on multiplie simplement les parties du corps AB mises en C, M, S par leurs distances AC, AM, AS, & qu'on divise la somme des produits par la somme des parties; mais cette opération est la même que celle que l'on fait pour trouver le centre de gravité d'un corps (*N.* 118), donc en ce cas le centre de percussion & le centre de gravité sont la même chose.

DEFINITION.

318. Si un corps A (*Fig.* 123) choque obliquement un corps BD, l'angle que fait la direction AC du corps A avec le corps BD se nomme *angle d'incidence*, & si le corps A après avoir choqué le corps BD se reflechit, l'angle fait par la nouvelle direction CE qu'il prend avec le corps BD, se nomme *angle de reflexion.*

PROPOSITION CXI.

319. *La force élastique ou la force du ressort d'un corps est égale à la force qui le comprime, ou qui le tend sans le briser.*

DEMONSTRATION.

Puisque le corps est comprimé ou tendu sans être brisé, il est évident qu'il resiste avec une force égale à celle qui le comprime

me ou qui le tend; or il ne resiste que par la force élastique, donc la force élastique est égale à la force qui comprime ou qui tend le corps.

PROPOSITION CXII.

320. *Si un corps élastique* A (Fig. 123.) *choque selon une direction perpendiculaire* AB *un corps* BD *qui est en repos & qui n'est point ébranlé par le choc, & que le corps* A *ne se brise point, ce corps se reflechira avec la même vitesse le long de la même droite* BA.

DEMONSTRATION.

Le corps A ne pouvant surmonter le corps BD, toute sa force se consomme à comprimer son ressort, or ce ressort n'étant point brisé par la supposition, acquiert une force égale à celle qui le comprimoit, donc il fait reprendre à la partie comprimée sa premiere figure, mais il ne peut faire cet effet en faisant reculer le corps BD, qui lui resiste invinciblement, donc il le fait en poussant le corps A selon la direction BA & avec la même vitesse; car il n'y a pas de raison de dire que la direction doive changer.

COROLLAIRE.

321. Si le corps BD étoit aussi élastique, la force du corps A comprimeroit d'abord le corps B, lequel par sa réaction comprimeroit aussi le corps A, après quoi le ressort du corps B ayant acquis une force égale à la force qui le comprimoit, feroit reprendre sa premiere figure à sa partie comprimée, & par la même raison le ressort du corps A feroit reprendre à sa partie comprimée sa premiere figure; mais comme il ne pourroit faire cet effet du côté de B, où il trouveroit une resistance invincible, il le feroit en poussant A avec la même vitesse & avec la direction BA.

PROPOSITION CXIII.

322. *Si un corps élastique* A (Fig. 123.) *choque selon une direction oblique* AC *un corps* BD, *qu'il ne peut ébranler, ce corps se reflechira selon une direction* CE, *ensorte que l'angle de reflexion* ECD *sera égal à l'angle d'incidence* ACR.

comme AC; or quand il le choque obliquement ſelon la direction AC ſa force eſt équivalente aux deux forces AB, AF, dont la ſeconde ne choque point du tout le corps BD, donc le choc n'eſt que comme AB, ainſi le choc perpendiculaire eſt au choc oblique comme AC eſt à AB, mais en prenant AC pour ſinus total, la droite AB eſt le ſinus de l'angle ACB d'incidence, donc le choc perpendiculaire eſt au choc oblique comme le ſinus droit eſt au ſinus de l'angle d'incidence.

PROPOSITION CXIV.

325. *Si un corps élaſtique* A *choque directement un autre corps* B *élaſtique qui lui eſt égal & qui eſt en repos; après le choc,* A *ſera en repos, &* B *aura le même mouvement que* A *avoit avant le choc.*

DEMONSTRATION.

Si les deux corps n'étoient point élaſtiques ils ſe mouvroient tous deux dans la même direction, & avec une viteſſe égale à la moitié de la viteſſe que A avoit avant le choc (*N.* 310); or le reſſort de B agiſſant après la compreſſion avec une viteſſe égale à celle de la compreſſion, & ne pouvant agir du côté de A parce que le reſſort de A lui reſiſte, il pouſſe par conſéquent B avec une demi-viteſſe égale à la demi-viteſſe que A a déja communiqué à B, & par conſéquent B ſe meut avec la viteſſe entiere que A avoit avant le choc; au contraire le reſſort de A agiſſant avec la même demi-viteſſe, dont il a été comprimé par la reaction de B, & ne pouvant agir du côté de B qui lui reſiſte, il pouſſe le corps A ſelon une direction contraire, & comme le corps eſt encore pouſſé du côté de B avec une demi-viteſſe, il s'enſuit que ſon mouvement ceſſe totalement puiſque ſa viteſſe vers B eſt détruite par la demi-viteſſe du reſſort qui a une direction oppoſée.

COROLLAIRE.

326. Puiſque A communique tout ſon mouvement à B, il eſt viſible que ſi B choque directement un autre corps C qui lui ſoit égal, & qui ſoit en repos, il lui communiquera auſſi tout ſon mouvement, & comme on peut dire la même choſe d'un quatriéme corps égal à A qui ſeroit en repos, d'un cinquiéme, d'un ſixiéme, &c. il s'enſuit que ſi pluſieurs corps égaux ſe touchent tous & qu'un corps A égal à chacun d'eux vienne à choquer directement le premier d'entr'eux, il n'y aura que le dernier qui

aura un mouvement égal au mouvement du corps A, & que tous les autres resteront en repos.

PROPOSITION CXV.

327. *Si deux corps élastiques* A, B *égaux entr'eux, & qui se meuvent avec des directions contraires & des vitesses égales, viennent à s'entrechoquer directement, ils rebrousseront leur chemin avec les mêmes vitesses.*

DEMONSTRATION.

Si les deux corps n'étoient point élastiques, ils demeureroient en repos après le choc (*N.* 308); ainsi les forces de ces deux corps se consomment à se comprimer mutuellement, après quoi leurs ressorts ayant acquis des forces égales à celles qui les comprimoient, & ne pouvant agir l'un contre l'autre, à cause qu'ils se resistent également, ils pressent les corps vers les côtés d'où ils sont venus & leur communiquent les mêmes vitesses.

PROPOSITION CXVI.

328. *Si deux corps élastiques* A, B, *égaux entr'eux, mais qui se meuvent avec des vitesses inégales viennent à s'entrechoquer directement, ils rebrousseront chemin après le choc en faisant échange de leur vitesse.*

DEMONSTRATION.

Si les deux corps se mouvoient avec une même vitesse V, ils rebrousseroient chemin avec la même vitesse (*N.* 327.) Si la vitesse de A étant $V+n$, celle de B est simplement V, & qu'ayant retranché V de part & d'autre, le corps A vienne à choquer avec son excès de vitesse *n* le corps B qui est en repos, le corps A après le choc restera en repos, & B se mouvra avec la vitesse *n* (*N.* 325.) ainsi si l'on redonne V de part & d'autre, il est évident qu'en ne considerant ces deux corps que comme ayant la même vitesse V, ils rebrousseront chemin avec la même vitesse, & qu'en faisant abstraction de cette vitesse, B recevra l'excès *n*, & A le perdra, donc après le choc la vitesse de B sera $V+n$, & celle de A sera V, & les deux corps rebrousseront chemin avec ces vitesses.

COROLLAIRE.

329. Donc les deux corps s'éloigneront l'un de l'autre avec la même vitesse totale avec laquelle ils s'étoient approchés.

PROPOSITION CXVII.

330. *Si un corps élastique* A *choque directement un autre corps élastique* B *qui lui est égal & qui se meut plus lentement que lui dans la même direction. Après le choc les deux corps feront échange de leur vitesses, & continueront à suivre leur premiere direction.*

DEMONSTRATION.

Soit $V+n$ la vitesse de A, & V la vitesse de B, il est évident qu'en ne considerant que la vitesse V de part & d'autre, il n'y a point de choc, & que A choquant B avec la vitesse n, le choque de même que s'il étoit en repos; donc il communique à B la vitesse n en la perdant lui-même (*N.* 325.) & par conséquent la vitesse de A est V, & celle de B est $V+n$, & les deux corps suivent leur premiere direction.

COROLLAIRE.

331. Le corps B après le choc va plus vîte que le corps A, de même que le corps A avant le choc alloit plus vîte que le corps B, & comme l'excès de vitesse est égal avant & après le choc, il s'ensuit que les deux corps s'éloignent après le choc avec la même vitesse totale avec laquelle ils s'étoient approchés.

PROPOSITION CXVIII.

332. *Si un corps* A *non élastique choque un autre corps* B *non élastique aussi qui se meut moins vite que lui selon la même direction, le choc est le même que celui que le corps* A *mû avec la différence des vitesses feroit sur le corps* B *qui seroit en repos.*

DEMONSTRATION.

Je nomme M la masse de A, V sa vitesse, m la masse de B, & u sa vitesse; donc la vitesse commune après le choc sera $\frac{MV+mu}{M+m}$ (*N.* 311.) la quantité de mouvement de M après le choc sera $\frac{M^2V+Mmu}{M+m}$, & comme sa quantité de mouvement avant le

choc étoit MV, il eſt viſible que la quantité qu'il aura perdue par le choc ſera $MV - \frac{M^2V - Mmu}{M+m} = \frac{M^2V + MmV - M^2V - Mmu}{M+m}$ $= \frac{MmV - Mmu}{M+m}$.

Suppoſons maintenant que B ſoit en repos, & que A le choque directement avec une viteſſe $V - u$, la viteſſe commune après le choc ſera $\frac{MV - Mu}{M+m}$ (*N.* 310.) donc la quantité de mouvement de A après le choc ſera $\frac{M^2V - M^2u}{M+m}$, & comme ſa quantité de mouvement avant le choc étoit $MV - Mu$, la quantité qu'il aura perdue par le choc ſera donc $\frac{M^2V - M^2u + MmV - Mmu - M^2V + M^2u}{M+m}$ $= \frac{MmV - Mmu}{M+m}$, & cette quantité perdue eſt la même que la quantité perdue dans la premiere ſuppoſition; donc le choc eſt auſſi le même dans l'une & l'autre ſuppoſition.

COROLLAIRE.

333. Si les deux corps A, B, ſont élaſtiques, la force du reſſort ſera égale à la force du choc; ainſi en ſuppoſant que A ſe meuve plus vîte que B, la force élaſtique agit ſur ces corps dans le tems du choc avec la différence des viteſſes que les corps avoient avant le choc.

PROPOSITION CXIX.

334. *Si deux corps* A, B, *non élaſtiques s'entrechoquent directement, le choc eſt le même que celui que le corps* A *mû avec la ſomme des viteſſes feroit ſur le corps* B *qui ſeroit en repos.*

DEMONSTRATION.

Nommant de même qu'auparavant M, *m*, les maſſes, V, *u*, les viteſſes; la viteſſe commune après le choc ſera $\frac{MV - mu}{M+m}$ (*N.* 316.); donc la quantité de mouvement de A après le choc ſera $\frac{M^2V - Mmu}{M+m}$, & comme ſa quantité de mouvement avant le choc étoit MV, la quantité perdue par le choc ſera $\frac{M^2V + MmV - M^2V + Mmu}{M+m} = \frac{MmV + Mmu}{M+m}$.

Suppoſons maintenant que B ſoit en repos, & que A le choque avec une viteſſe $V + u$, la viteſſe commune après le

choc sera $\frac{MV+Mu}{M+m}$ (*N.* 310.) ; donc la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{M^2V+M^2u}{M+m}$, & comme sa quantité de mouvement avant le choc étoit $MV+Mu$, la quantité perdue par le choc sera $\frac{M^2V+MmV+M^2u+Mmu-M^2VM^2u}{M+m}=\frac{MmV+Mmu}{M+m}$, & cette quantité perdue est la même que la quantité perdue dans la premiere supposition, donc le choc est aussi le même dans l'une & l'autre supposition.

COROLLAIRE.

335. Si les deux corps A, B, sont élastiques, la force du ressort est égale à la force du choc ; donc si A & B s'entrechoquent directement, la force élastique agit sur les deux corps avec une vitesse égale à la somme des vitesses.

PROPOSITION CXX.

336. *Connoissant les vitesses de deux corps élastiques* A, B, *qui viennent à se choquer directement, connoître leur vitesses après le choc.*

SOLUTION.

Si les corps A, B, avant le choc suivent une même direction, & que nous fassions abstraction du ressort, leur vitesse commune après le choc sera $\frac{MV+mu}{M+m}$ (*N.* 311.) ; or la force élastique agit sur ces corps avec une vitesse $V-u$, ainsi il ne s'agit plus que de sçavoir comment cette vitesse se distribue aux deux corps A, B.

Pour cela, supposons que la vitesse que le ressort donne à B soit x, il est sûr que le ressort de A ne pouvant vaincre le ressort de B, ni le ressort de B vaincre le ressort de A, les vitesses de ces ressorts doivent être réciproques aux masses A, B; ainsi nous avons $M, m :: x, V-u-x$, d'où je tire $mx=MV-Mu-Mx$, ou $Mx+mx=MV-Mu$, donc $x=\frac{MV-Mu}{M+m}$, & par conséquent la vitesse que le ressort donne au corps A est $V-u-\frac{MV+Mu}{M+m}=\frac{MV+mV-Mu-mu-MV+Mu}{M+m}=\frac{mV-mu}{M+m}$; mais la vitesse $\frac{MV-Mu}{M+m}$ que le ressort donne au corps B n'étant pas contraire à sa direction doit être ajoutée à la vitesse $\frac{MV+mu}{M+m}$

que ce corps a reçu par le choc indépendamment du reſſort; donc la viteſſe totale de B après le choc eſt $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$; au contraire la viteſſe que le reſſort donne au corps A étant contraire à ſa direction doit être retranchée de la viteſſe reçue par le choc indépendamment du reſſort; donc la viteſſe totale de A après le choc eſt $\frac{MV+mu}{M+m} - \frac{mV+mu}{M+m} = \frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$.

Et il faut remarquer que ſi en mettant les valeurs des lettres M, m, V, u, dans la viteſſe totale de A après le choc, il ſe trouve que cette viteſſe eſt une grandeur négative, c'eſt une marque que la viteſſe que le reſſort lui communique eſt plus grande que la viteſſe communiquée par le ſeul choc, & que par conſéquent le corps A doit rebrouſſer chemin.

En ſecond lieu, ſi les corps A, B, ſe choquent directement avec des directions contraires, leur viteſſe commune après le choc & indépendamment du reſſort eſt $\frac{MV - mu}{M + m}$ (*N.* 316.); or le reſſort agit ſur ces corps avec une viteſſe $V + u$ (*N.* 335.); nommant donc $= x$ la partie de cette viteſſe qui eſt communiquée à B, nous aurons $M, m :: x, V + u - x$, d'où je tire $mx = MV + Mu - Mx$, ou $Mx + Mx = MV + Mu$; donc $x = \frac{MV + Mu}{M + m}$, ainſi la viteſſe communiquée à A eſt $V + u - \frac{MV - Mu}{M+m}$ $= \frac{MV + Mu + mV + mu - MV - Mu}{M + m} = \frac{mV + mu}{M+m}$.

Suppoſant donc comme nous faiſons que le corps B rebrouſſe chemin, la viteſſe que le reſſort lui donne n'étant pas contraire à ſa nouvelle direction, doit être ajoutée à la viteſſe que le choc lui communique, ainſi ſa viteſſe totale après le choc eſt $\frac{MV - mu + MV + Mu}{M+m} = \frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, & au contraire la viteſſe communiquée par le reſſort au corps A étant contraire à ſa direction, doit être retranchée de celle que le choc lui a communiquée, ainſi ſa viteſſe totale après le choc eſt $\frac{MV - mu - mV - mu}{M + m}$ $= \frac{MV - mV - 2mu}{M+m}$.

Et il faut remarquer que ſi MV eſt moindre que $mV - 2mu$, la viteſſe totale de A devient négative, ce qui fait voir que la viteſſe que le reſſort a communiqué à A eſt plus grande que celle que le choc lui avoit donnée, & que par conſéquent A doit rebrouſſer chemin.

Nota.

Nota. Que dans cette Propofition & les fuivantes, nous fuppofons toujours la force du corps A plus grande que la force du corps B, c'eft-à-dire MV plus grand que *mu* ; & fi cela arrivoit autrement, il faudroit attribuer à B ce que nous attribuons à A, & attribuer à A ce que nous attribuons à B, en mettant partout *m* au lieu de M, & M au lieu de *m*, de même *u* au lieu de V, & V au lieu de *u*.

COROLLAIRE I.

337. Dans le premier cas de cette Propofition, nous avons pour la viteffe totale de A après le choc $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ $= \frac{MV + mV - 2mV + 2mu}{M + m} = V - \frac{2mV + 2mu}{M + m} = V - \overline{\frac{2mV - 2mu}{M + m}}$.

Or la derniere partie de cette valeur, c'eft-à-dire $\frac{2mV - 2mu}{M + m}$ donne cette analogie $M + m, 2m :: V - u, \frac{2mV - 2mu}{M + m}$, & par conféquent *la fomme des maffes eft au double de la feconde maffe comme la difference des viteffes avant le choc eft à un quatriéme terme, lequel étant retranché de la viteffe de la premiere maffe avant le choc, donne la viteffe de cette même premiere maffe après le choc.*

De même nous avons dans le même premier cas de cette Propofition la viteffe totale de B après le choc $\frac{2MV + mu - Mu}{M + m}$ $= \frac{Mu + mu + 2MV - 2Mu}{M + m} = u + \frac{2MV - 2Mu}{M + m}$; or la derniere partie $\frac{2MV - 2Mu}{M + m}$ de cette valeur donne $M + m, 2M :: V - u, \frac{2MV - 2Mu}{M + m}$; donc *la fomme des maffes eft au double de la premiere maffe comme la difference des viteffes avant le choc eft à un quatriéme terme, lequel étant ajoûté à la viteffe de la feconde maffe* B *avant le choc, donne la viteffe totale de cette maffe* B *après le choc ;* ainfi on a deux regles pour trouver les viteffes de A & B après le choc dans le premier cas de cette Propofition.

COROLLAIRE II.

338. Dans le fecond cas de cette Propofition on a la viteffe totale de A après le choc $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m} = \frac{MV + mV - 2mV - 2mu}{M + m} = V$ $- \overline{\frac{2mV + 2mu}{M + m}}$; or la feconde partie de cette valeur donne $M + m$,

$2M :: V + u,\ \frac{2mV + 2mu}{M + m}$, donc *la somme des masses est au double de la seconde masse* B *comme la somme des vitesses avant le choc est à un quatrième terme, lequel étant retranché de la vitesse de la premiere masse* A *avant le choc, donne la vitesse de cette même masse* A *après le choc.*

De même la vitesse totale de B après le choc est $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$ $= \frac{2MV + 2Mu - Mu - mu}{M + m} = \frac{2MV + 2Mu}{M + m} - u$; or la premiere partie de cette valeur donne $M + m, 2M :: V + u,\ \frac{2MV + 2Mu}{M + m}$, donc *la somme des masses est au double de la premiere masse* A *comme la somme des vitesses avant le choc est à un quatrieme terme duquel retranchant la vitesse de la seconde masse* B *avant le choc, le reste sera la vitesse de cette même masse* B *après le choc*; ainsi voilà deux autres regles pour trouver les vitesses des corps A, B, après le choc dans le second cas de la Proposition.

COROLLAIRE III.

339. *Si* A *&* B, *mûs avec des directions contraires s'entrechoquent directement avec des vitesses proportionnelles aux masses, ils rebrousseront chemin après le choc avec les mêmes vitesses.*

Après le choc la vitesse totale de A sera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$; or par la supposition, on a $M, m :: u, V$; donc $MV = mu$; mettant donc dans la vitesse totale de A, $2MV$ au lieu de $2mu$, on aura pour sa vitesse totale après le choc $- \frac{MV - mV}{M + m} = -V$, c'est-à-dire que le corps A rebroussera chemin avec une vitesse V égale à la vitesse qu'il avoit avant le choc.

De même, la vitesse totale de B après le choc est $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$ & mettant $2mu$ au lieu de $2MV$, on a $\frac{Mu + mu}{M + m} = u$, c'est-à-dire le corps B rebroussera chemin avec une vitesse u égale à celle qu'il avoit avant le choc.

COROLLAIRE IV.

340. *Si* B *est en repos avant le choc, la vitesse de* A *après le choc est à sa vitesse avant le choc comme la difference des masses est à leur somme, & la vitesse de* B *après le choc est à la vitesse de* A *avant le choc, comme le double de la masse* A *est à la somme des poids.*

Si les corps A, B, étoient en mouvement, & qu'après le choc ils suivissent la même direction, la vitesse totale de A après le choc seroit $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ (*N.* 336.), mais par la supposition, B est en repos, donc $u = 0$, & $2mu = 0$; par conséquent la vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV - mV}{M + m}$; or la vitesse de A avant le choc est V, ou $\frac{MV + mV}{M + m}$, donc la vitesse après le choc est à la vitesse avant le choc comme $MV - mV$ est à $MV + mV$, ou comme $M - m$ est à $M + m$.

De même la vitesse totale de B après le choc seroit $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$ (*N.* 336.) si les deux corps étoient en mouvement, & qu'après le choc ils suivissent la même direction; or B étant en repos par la supposition, on a $u = 0$, $mu = 0$, & $Mu = 0$, donc la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV}{M + m}$, mais la vitesse de A avant le choc est V, ou $\frac{MV + mV}{M + m}$; donc la vitesse de B après le choc est à la vitesse de A avant le choc comme $2MV$ est à $MV + mV$, ou comme $2M$ est à $M + m$.

Et de là il suit que la vitesse de A après le choc est à la vitesse de B après le choc comme $M - m$ est à $2M$, c'est-à-dire comme la différence des masses est au double de la masse de A.

COROLLAIRE V.

341. *Si les deux corps* A, B, *suivent la même direction avant & après le choc, la difference de leur vitesses après le choc est égale à la difference de leur vitesses avant le choc.*

La vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ (*N.* 336.) & celle de B est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$; or après le choc le corps A va moins vite que B, à cause que le ressort a augmenté la vitesse que B a reçu par le choc, au lieu qu'il a diminuée la vitesse de A reçue par le choc, laquelle lui étoit commune avec B; donc retranchant la vitesse totale de A de la vitesse totale de B, le reste sera $\frac{2MV - Mu + mu - MV + mV - 2mu}{M + m} = \frac{MV + mV - Mu - mu}{M + m}$ $= V - u$, c'est-à-dire la différence des vitesses après le choc est égale à leur différence avant le choc.

COROLLAIRE VI.

342. *Si les deux corps* A, B *ont la même direction avant le choc, & des directions contraires après le choc, la somme des vitesses après le choc est égale à la différence des vitesses avant le choc.*

Par l'hypotèse le corps A va plus vite que le corps B avant le choc, donc la différence des vitesses est $V - u$; or par la même hypotèse le corps A rebrousse chemin après le choc, donc la vitesse qu'il reçoit par le ressort est plus grande que la vitesse commune reçûe par le choc, ainsi sa vitesse totale $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ devenant négative est $\frac{mV - 2mu - MV}{M + m}$; or la vitesse totale de B est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$; ajoûtant donc ensemble ces deux vitesses, leur somme est $\frac{MV + mV - Mu - mu}{M + m} = V - u$, c'est-à-dire la somme des vitesses après le choc est égale à la différence des vitesses avant le choc.

COROLLAIRE VII.

343. *Si les deux corps* A, B *ont des directions contraires avant le choc, & qu'après le choc ils suivent la même direction, la somme des vitesses avant le choc est égale à la différence des vitesses après le choc.*

La vitesse totale de A après le choc sera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ & celle de B $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$; or la vitesse de B sera plus grande que celle de A parce que la vitesse que le ressort lui donne augmente la vitesse reçûe par le choc, au lieu que la vitesse que le ressort donne à A diminue la vitesse que A reçoit par le choc, laquelle lui est commune avec B, ôtant donc de la vitesse totale de B la vitesse totale de A, le reste sera $\frac{MV + mV + Mu + mu}{M + m} = V + u$; c'est-à-dire la différence des vitesses après le choc est égale à la somme des vitesses avant le choc.

COROLLAIRE VIII.

344. *Si les deux corps* A, B, *ont des directions contraires avant & après le choc, la somme des vitesses est égale avant & après le choc.*

retranchant donc la premiere quantité de la feconde, le refte fera $\frac{M^2V+MmV-Mmu-m^2u}{M+m}=MV-mu$; or $MV-mu$ eft la différence des quantités de mouvement avant le choc, donc la différence des quantités après le choc eft égale à la différence avant le choc.

COROLLAIRE XI.

347. *Si les corps* A, B *ont la même direction avant le choc, & des directions contraires après le choc, la différence des quantités de mouvement après le choc, eft égale à la fomme des quantités de mouvement avant le choc.*

Puifque A rebrouffe chemin, fa viteffe totale $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$ devient négative, & eft $\frac{mV-2mu-MV}{M+m}$; donc fa quantité de mouvement eft $\frac{MmV-2Mmu-M^2V}{M+m}$; de même la viteffe totale de B eft $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$, & fa quantité de mouvement eft $\frac{2MmV-Mmu+m^2u}{M+m}$; ôtant donc la premiere quantité de la feconde, le refte eft $\frac{M^2V+MmV+Mmu+m^2u}{M+m}=MV+mu$; or $MV+mu$ eft la fomme des quantités de mouvement avant le choc; donc cette fomme eft égale à la différence des quantités après le choc.

COROLLAIRE XII.

348. *Si les deux corps* A, B *ont des directions contraires avant le choc, & la même direction après le choc, la fomme des quantités de mouvement après le choc eft égale à la différence des quantités avant le choc.*

La viteffe totale de A après le choc eft $\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$, & fa quantité de mouvement $\frac{M^2V-MmV-2Mmu}{M+m}$; de même la viteffe totale de B eft $\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$, & fa quantité de mouvement $\frac{2MmV+Mmu-m^2u}{M+m}$; ajoûtant donc enfemble ces deux quantités de mouvement, la fomme eft $\frac{M^2V+MmV-Mmu-m^2u}{M+m}=MV-mu$; or $MV-mu$ eft la différence des quantités avant le choc, donc cette différence eft égale à la fomme des quantités après le choc.

REMARQUE.

349. On voit par les quatre derniers Corollaires que la somme des quantités de mouvement avant & après le choc, n'est la même que lorsque les corps A, B, que nous supposons inégaux d'inégales vitesses, & dont les vitesses ne sont pas reciproques aux masses, ont la même direction avant & après le choc; ainsi il semble qu'on pourroit condamner ceux qui disent qu'il y a toujours une égale quantité de mouvement avant & après le choc; mais il faut prendre garde que les Geométres qui pensent ainsi, entendent par le mot de quantité de mouvement, ce que nous entendons par celui de différence de quantité de mouvement, lorsque les deux corps vont avec des directions contraires avant ou après le choc, c'est-à-dire, qu'ils ne prennent pour quantité de mouvement que celle qui est selon la direction qui avoit le plus de force avant le choc, en retranchant de cette quantité celle qui a une direction contraire. Or dans ce sens on ne sçauroit les condamner, puisque la différence entr'eux & nous ne consiste que dans les mots; après tout, leur façon de s'exprimer ne laisse pas que d'avoir son utilité, comme on le verra dans la suite.

COROLLAIRE XIII.

350. *Si les corps* A, B *ont la même direction avant le choc & des directions contraires après le choc, la quantité de mouvement après le choc est plus grande qu'elle n'étoit auparavant.*

Par le Corollaire XI. (*N.* 347.) la différence des quantités de mouvement après le choc est égale à la somme des quantités de mouvement avant le choc; or la différence des quantités de mouvement après le choc, est moindre que la somme de ces mêmes quantités; donc la somme des quantités après le choc est plus grande que la somme des quantités avant le choc.

COROLLAIRE XIV.

351. *Si le corps* A, B *ont des directions contraires avant le choc, & la même direction après le choc, la quantité de mouvement est moindre après le choc qu'elle n'étoit auparavant.*

Par le Corollaire XII. (*N.* 348.) la somme des quantités de mouvement après le choc est égale à la différence des quantités avant le choc; mais la somme des quantités avant le choc est plus grande que leur différence, donc la somme des quantités après le choc est moindre que la somme des quantités avant le choc.

des vitesses après le choc (*N.* 344), donc les deux corps s'éloignent aussi vite qu'ils s'étoient approchés.

COROLLAIRE I.

353. Donc dans des tems égaux avant & après le choc, les corps A, B se trouvent également éloignés, c'est-à-dire que s'il leur a fallu une minute pour se joindre lorsqu'ils étoient à la distance d'un pied, il leur faudra aussi une minute pour se trouver éloignés d'un pied, &c.

COROLLAIRE II.

354. La somme des vitesses lorsque les corps ont des directions contraires, ou la différence des vitesses lorsqu'ils ont une même direction est appellée par quelques Auteurs *vitesse respective*, ainsi on peut énoncer la Proposition que nous venons de démontrer, en disant, que *dans le choc de deux corps la vitesse respective est la même avant & après le choc.*

PROPOSITION CXXII.

355. *Si deux corps élastiques* A, B *se choquent directement avec la même direction, ou avec des directions contraires, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses est la même avant ou après le choc.*

DEMONSTRATION.

Si les corps A, B ont la même direction, la vitesse de A après le choc est $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$; donc son quarré est $\frac{M^2V^2 - 2MmV^2 + m^2V^2 + 4MmVu - 4m^2uV + 4m^2u^2}{M^2 + 2mM + mm}$, & multipliant ce quarré par la masse M, j'ai $\frac{M^3V^2 - 2M^2mV^2 + Mm^2V^2 + 4M^2mVu - 4Mm^2uV + 4Mm^2u^2}{M^2 + 2mM + mm}$; de même la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$, & son quarré est $\frac{4M^2V^2 - 4M^2uV + M^2u^2 + 4MVmu - 2Mmu^2 + m^2u^2}{M^2 + 2Mm + mm}$, lequel multiplié par m donne $\frac{4M^2V^2m - 4M^2Vum + M^2u^2m + 4MVm^2u - 2Mm^2u^2 + m^3u^2}{M^2 + 2Mm + mm}$, ajoûtant donc ensemble ces deux produits de M & de m, mul-

$\frac{mz - Mz + 2MZ}{M + m}$, & mettant au lieu de z & Z leur valeur, j'aurai

$$\frac{2mMV - Mmu + m^2u - 2M^2V + M^2u - Mmu + 2M^2V - 2MmV + 4Mmu}{M^2 + 2Mm + mm}$$

$= \frac{M^2u + 2Mmu + m^2u}{M^2 + 2Mm + mm} = u$, donc la viteſſe de B après le ſecond choc eſt égale à la viteſſe qu'il avoit avant le premier choc.

De même la viteſſe de A après le ſecond choc ſera $\frac{2mz - mZ + MZ}{M + m}$, & mettant la valeur de z & Z, j'aurai

$$\frac{4mMV - 2mMu + 2m^2u - mMV + m^2V - 2m^2u + M^2V - MmV + 2Mmu}{M^2 + 2Mm + mm}$$

$= \frac{M^2V + 2MmV + m^2V}{M^2 + 2Mm + m^2} = u$, donc la viteſſe de A après le ſecond choc eſt la même que ſa viteſſe avant le premier choc.

Et on prouvera la même choſe lorſque les corps A, B auront des directions contraires, &c.

PROPOSITION CXXIV.

357. *Si deux corps élaſtiques* A, B *viennent à ſe choquer, leur centre de gravité commun eſt ou en repos, ou il ſe meut uniformement toujours vers le même côté, & dans des tems égaux avant & après le choc les deux corps ſe trouvent à même diſtance de ce centre.*

DEMONSTRATION.

Dans des tems égaux pris avant & après le choc, les corps ſe trouvent à la même diſtance entr'eux (*N.* 353), donc la droite qui joint ces deux corps eſt la même; or le centre de gravité commun eſt ſur cette droite, de façon que les diſtances des corps à ce centre ſont reciproques aux maſſes, donc le centre de gravité eſt également diſtant de A après le choc qu'avant le choc, & il faut dire la même choſe à l'égard de B; or il ne peut ſe faire que les deux corps avant & après le choc ayent la même diſtance à l'égard de ce centre, à moins que ce centre ne reſte en repos, ou qu'après le choc il ne ſe meuve en gardant toujours les mêmes diſtances, donc, &c.

Nous allons déterminer dans les Corollaires ſuivans les cas où le centre de gravité eſt en repos, & ceux où il ſe meut, & nous ferons voir en même tems que le mouvement du centre de gravité ſe fait du même côté avant & après le choc.

COROLLAIRE I.

358. *Si les deux corps* A, B *se meuvent avant le choc avec des directions contraires & des vitesses reciproques aux masses, leur centre de gravité commun est toujours en repos.*

Le mouvement des deux corps étant uniforme les espaces parcourus sont comme les vitesses, ainsi les espaces qu'ils parcourront dans une minute en s'approchant seront reciproques à leurs masses; or avant qu'ils fussent en mouvement les espaces qui se trouvoient entr'eux & le centre de gravité étant aussi reciproques à leurs masses, donc supposé qu'ils ne se soient pas joints dans une minute, les espaces qui resteront entr'eux & le centre de gravité seront encore reciproques à leurs masses, & par conséquent ce centre de gravité n'aura pas bougé. Supposons donc qu'ils se meuvent encore pendant une minute, les espaces qu'ils auront parcouru seront encore reciproques à leurs masses, donc si après cette minute ils ne se sont pas encore joints, les espaces qui resteront entr'eux & le centre de gravité seront encore reciproques à leurs masses, & par conséquent ce centre n'aura pas bougé; & continuant le même raisonnement, on trouvera qu'ils se choqueront dans leur centre commun de gravité, lequel aura toujours resté immobile.

Maintenant après le choc les deux corps rebrousseront chemin avec les mêmes vitesses (*N.* 339), donc les espaces qu'ils parcourront dans des tems égaux en s'éloignant du point du choc seront encore reciproques aux masses, & par conséquent le point du choc sera encore leur centre de gravité commun.

Comme deux corps élastiques de même masse & de même vitesse ont leurs vitesses reciproques aux masses, il s'ensuit que si ces deux corps ont des directions contraires avant le choc, leur centre de gravité sera en repos avant le choc, & après le choc aussi, parce que ces corps s'éloigneront de part & d'autre du point du choc avec des vitesses égales (*N.* 327).

COROLLAIRE II.

359. *Si deux corps élastiques* A, B, *se choquent avec des vitesses qui ne soient pas reciproques aux masses, leur centre de gravité commun se mouvra uniformement avec eux, & toujours d'un même côté avant & après le choc.*

Supposons en premier lieu que les corps A, B étant inégaux & leurs vitesses égales, ils s'approchent l'un de l'autre selon des directions contraires ; il est sûr que leur centre de gravité commun sera sur la ligne qu'on tireroit de l'un & l'autre, ensorte que les distances des corps à ces points seront reciproques aux masses ; concevant donc que les corps venant à se mouvoir, ils ayent parcouru dans une minute chacun l'espace d'un pied à cause des vitesses égales, il est encore évident que le pied parcouru par le corps A, sera plus grand par rapport au pied parcouru par le petit corps B, que le corps B par rapport au corps A ; donc ces espaces ne seront pas reciproques aux masses, & par conséquent le reste de distance du corps A au point qui étoit le centre de gravité commun lorsque les corps étoient en repos, sera moindre par rapport au reste de distance du corps B à ce même point que le corps B, par rapport au corps A, ainsi ces restes de distances n'étant plus reciproques aux masses, le point qui étoit le centre de gravité commun ne le sera plus à present, & il faudra en prendre un autre qui soit plus près du corps B.

Que si nous concevons que les corps A, B s'approchant d'avantage ayent encore parcouru dans une autre minute chacun un pied, on trouvera par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, que le centre de gravité commun à la fin de cette minute doit s'approcher encore de B, & ainsi de suite jusqu'à ce que les deux corps se soient joints.

Maintenant après le choc la vitesse totale de A sera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ ou $\frac{MV - mV - 2mV}{M + m} = \frac{MV - 3mV}{M + m}$, à cause que nous supposons les vitesses égales ; or si $MV = 3mV$ le corps A sera en repos, puisque sa vitesse totale sera nulle, & comme B sera en mouvement, il est visible que le centre de gravité continuera à se mouvoir du même côté qu'il se mouvoit avant le choc ; que si MV est plus grand que $3mV$, la vitesse du corps A sera positive, & par conséquent A se mouvra toujours dans la même direction ; donc le centre de gravité commun se mouvra encore du même côté qu'auparavant, puisqu'il doit toujours se trouver entre les deux corps ; enfin si MV est moindre que $3mV$, la vitesse totale de A étant négative, ce corps rebroussera chemin ; or les deux corps reçoivent par le seul choc une vitesse égale que nous nommerons x, & par la force du ressort ils reçoivent des vitesses réciproques à leur masses (*N. 336.*) que nous nomme-

rons y, z ; ainſi la viteſſe de B ſera $x+z$, & la viteſſe de A ſera $y-x$, parce que la force y détruit la force x. Mais par la ſuppoſition y, z :: B, A, donc $y-x$ eſt moindre par rapport à $z+x$ que B par rapport à A. Concevant donc qu'après le choc les deux corps ſe meuvent, l'eſpace que A aura parcouru pendant une minute ſera moindre par rapport à l'eſpace que B aura parcouru dans la même minute, que B par rapport à A, donc le point où s'eſt fait le choc ne ſera plus le centre de gravité commun, ainſi qu'il l'étoit dans le moment du choc, mais il faudra l'avancer du côté de B, donc ce centre de gravité avance toujours du même côté avant & après le choc.

Suppoſons en ſecond lieu que les viteſſes ſoient inégales de même que les maſſes & que les directions ſoient contraires avant le choc, la viteſſe du plus grand corps A n'étant pas à la viteſſe du corps B réciproquement comme B eſt à A, ſera par conſéquent plus grande ou moindre qu'il ne faut. Suppoſons-là d'abord plus grande, l'eſpace parcouru par A dans une minute ſera plus grand par rapport à l'eſpace parcouru par B dans le même tems, que B par rapport à A, donc le reſte de diſtance du corps A au point qui étoit le centre commun de gravité avant le mouvement ſera moindre par rapport au reſte de diſtance du corps B à ce même point, que B par rapport à A, ainſi ce point ne ſera plus le centre de gravité, mais il faudra l'approcher du côté de B, & par un ſemblable raiſonnement on prouvera que ce centre avance toujours du côté de B juſqu'au moment du choc.

Après le choc le corps A ſera ou en repos ou en mouvement ſelon la même direction, ou en mouvement ſelon la direction contraire. Or dans ces trois cas on prouvera comme ci-deſſus que le centre de gravité avance du même côté qu'il avançoit avant le choc.

Maintenant ſuppoſons que la viteſſe de A ſoit moindre par rapport à la viteſſe de B, que B par rapport à A ; on prouvera facilement que le centre de gravité s'avancera du côté de A, juſqu'à ce que les deux corps ſe choquent.

Le mouvement de B avant le choc étant plus grand que le mouvement de A, puiſque VA eſt moindre que uB ; par la ſuppoſition, il faut regarder le corps B comme le corps qui choque A, ainſi ſa viteſſe après le choc eſt $\frac{mu - mV - 2MV}{m+M}$ (*N.* 336.), donc ſi mu eſt plus grand que $mV+2MV$, il continue à ſe mouvoir

du côté de A, si mu est égal à $mV+2MV$, il reste en repos, & enfin si mu est moindre que $mV+2MV$, il rebrousse chemin; or dans les deux premiers cas, il est visible que le centre de gravité doit se mouvoir encore du côté de A, de même qu'avant le choc, & dans le dernier cas, nommant x la vitesse commune que le choc donne aux deux corps, & y, z, les vitesses que le ressort leur donne, lesquelles sont réciproques aux corps, la vitesse de A sera $x+y$, & celle de B sera $z-x$; or puisque z, y :: A, B; donc $z-x$ est moindre par rapport à $x+y$, que A par rapport à B; donc si après le choc nous concevons que les deux corps se meuvent, les espaces parcourus par B seront moindres par rapport aux espaces parcourus par A dans le même tems que A par rapport à B; donc le point du choc ne sera plus le centre de gravité des deux corps, mais il faudra l'avancer du côté de A; ainsi ce centre avance encore du même côté qu'avant le choc.

On prouvera de même que le centre de gravité avance toujours d'un même côté avant ou après le choc, lorsque les vitesses ne sont pas réciproques aux masses dans les cas où les corps se choquent avec la même direction.

PROPOSITION CXXV.

360. *Si deux corps élastiques* A, B, *se choquent avec des directions contraires, la vitesse que l'un d'entr'eux perd est à la vitesse qu'il perdroit si l'autre corps étoit en repos avant le choc, comme la somme des deux vitesses avant le choc est à la vitesse avant le choc de celui qui choqueroit l'autre qui seroit en repos.*

DEMONSTRATION.

Si les deux corps sont en mouvement, la vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$, donc la vitesse perdue par le choc est $V-\frac{MV-mV-2mu}{M+m}=\frac{MV+mV-MV+mV+2mu}{M+m}=\frac{2mV+2mu}{M+m}$, maintenant si le corps B étoit en repos avant le choc, la vitesse totale de A après le choc seroit $\frac{MV-mV-2mu}{M+m}=\frac{MV-mV}{M+m}$, à cause de u égal à zero; donc la vitesse perdue par le choc seroit $V-\frac{MV-mV}{M+m}=\frac{VM+Vm-VM+Vm}{M+m}=\frac{2MV}{M+m}$; donc la vitesse perdue par le corps A quand les deux corps sont en mouvement, est à la

vitesse perdue par le même corps quand B est en repos, comme $\frac{2mV+2mu}{M+m}$ est à $\frac{2MV}{M+m}$, ou comme $V+u$ est à V.

PROPOSITION CXXVI.

361. *Si un corps élastique* A *choque un autre corps* B *qui se meut dans la même direction & avec moins de vitesse, la vitesse que* A *perd par le choc est à celle qu'il perdroit si* B *étoit en repos avant le choc, comme la difference des vitesses avant le choc est à la vitesse de* A *avant le choc.*

DEMONSTRATION.

Quand les deux corps se meuvent, la vitesse de A après le choc est $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$ (*N.* 336.), donc la vitesse perdue par le choc est $V-\frac{MV-mV+2mu}{M+m}=\frac{MV+mV-MV+mV-2mu}{M+m}=\frac{2mV-2mu}{M+m}$. Or si B étoit en repos, la vitesse de A après le choc seroit $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}=\frac{MV-Mu}{M+m}$, à cause de $u=o$; donc sa vitesse perdue par le choc seroit $V-\frac{MV-Mu}{M+m}=\frac{MV+mV-MV+mV}{M+m}=\frac{2MV}{M+m}$; & par conséquent la vitesse perdue lorsque les deux corps sont en mouvement, est à la vitesse perdue lorsque B est en repos comme $\frac{2MV-2mu}{M+m}$ est à $\frac{2mV}{M+m}$, ou comme $V-u$ est à V.

PROPOSITION CXXVII.

362. *Si un corps élastique* A *choque un corps* B *qui est en repos, il lui communique une vitesse qui n'est pas tout-à-fait double de la vitesse qu'il avoit avant le choc.*

DEMONSTRATION.

Si les deux corps se mouvoient avec la même direction, la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$, & comme lorsque B est en repos, on a $u=o$, il s'ensuit qu'en ce cas la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV}{M+m}$, & supposant que l'excès de M sur m soit n, nous aurons $M=m+n$, c'est pourquoi mettant cette valeur de M dans la vitesse de B après le choc, nous aurons $\frac{2mV+2nV}{2m+n}$; ainsi cette vitesse sera à la vitesse V du corps

A

A avant le choc comme $\frac{2MV+2nV}{2m+n}$ eſt à V, ou $\frac{2mV+nV}{2mV+nV}$, ou comme $2mV+2nV$ eſt à $2mV+nV$, ou comme $2m+2n$ eſt à $2m+n$, ou comme 2 eſt à $1+\frac{m}{m+n}$, c'eſt-à-dire que la viteſſe de B après le choc n'eſt pas tout-à-fait double de la viteſſe de A avant le choc, car ſi elle étoit double, le rapport ſeroit comme 2 à 1, au lieu qu'il eſt comme 2 à 1 augmenté d'une fraction $u \frac{m}{m+n}$; donc, &c.

PROPOSITION CXXVIII.

363. *Si un corps élaſtique* A *choque un corps* B *moindre que lui, & qui eſt en repos, la viteſſe du corps* B *après le choc ſera égale à la ſomme des viteſſes de* A *avant & après le choc.*

DEMONSTRATION.

La viteſſe du corps B après le choc ſera par la Propoſition précédente $\frac{2MV}{M+m}$. Or ſuppoſant $M=m+n$, cette viteſſe ſera $\frac{2mV+2nV}{2m+m}=V+\frac{nV}{2m+n}$. Or la viteſſe du corps A après le choc eſt $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}=\frac{MV-mV}{M+m}$ à cauſe de $u=0$; donc mettant au lieu de M ſa valeur, nous aurons $\frac{mV+nV-mV}{2m+n}=\frac{nV}{2m+n}$; ainſi la viteſſe de B après le choc étant $V+\frac{nV}{2m+n}$ eſt égale à la ſomme de la viteſſe V du corps A avant le choc, & de la viteſſe $\frac{nV}{2m+n}$ du même corps après le choc.

PROPOSITION CXXIX.

364. *Si un corps élaſtique* A *choque un autre corps* B *moindre que lui, & qui eſt en repos avec une viteſſe qui ſoit comme la ſomme des deux maſſes, le corps* B *après le choc aura une viteſſe qui ſera comme* 2A, *& le corps* A *aura perdu une viteſſe qui ſera comme* 2B.

DEMONSTRATION.

La viteſſe du corps A après le choc eſt $\frac{MV-mV}{M+m}$; or par la ſuppoſition, V eſt comme $M+m$, mettant donc cette valeur de V dans la viteſſe du corps A après le choc, nous aurons

$\frac{M^2+Mm-mM-m^2}{M+m} = \frac{M^2-m^2}{M+m} = M-m$; de même la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV}{M+m}$, & mettant la valeur de V, j'ai $\frac{2M^2+2Mm}{M+m} = 2M$; donc la vitesse du corps B après le choc est comme le double du corps A ; or la vitesse du corps A avant le choc étant $M+m$, & après le choc $M-m$, la différence des deux, c'est-à-dire, la vitesse perdue par le choc est $2m$ ou le double de B, donc, &c.

COROLLAIRE.

365. Si le corps A est moindre que B, la même chose subsiste encore comme il est aisé de le prouver par les mêmes raisonnemens.

PROPOSITION CXXX.

366. *Si un corps élastique* A *choque un autre corps élastique* B *plus grand que lui & qui est en repos, le corps* A *rebrousse toujours chemin, & le corps* B *reçoit une vitesse moindre que la vitesse du corps* A *avant le choc.*

DEMONSTRATION.

La vitesse du corps A après le choc est $\frac{MV-mV}{M+m}$, mais par la supposition m est plus grand que M ; donc la vitesse du corps A après le choc est négative, & ce corps rebrousse chemin.

La vitesse du corps B après le choc est $\frac{2MV}{M+m}$; or la vitesse du corps A avant le choc est $V = \frac{MV+mV}{M+m}$, mais à cause de m plus grand que M, j'ai $MV+mV$ plus grand que $2MV$, donc la vitesse du corps B après le choc, c'est-à-dire $\frac{2MV}{M+m}$ est moindre que la vitesse $\frac{MV+mV}{M+m}$ du corps A avant le choc.

COROLLAIRE.

367. La somme des vitesses des deux corps après le choc est égale à la vitesse du corps A avant le choc ; car la vitesse du corps A après le choc étant négative [illegible] $\frac{mV-MV}{M+m}$, ainsi ajoutant cette vitesse à la vitesse $\frac{2MV}{M+m}$ du corps B, la somme est $\frac{MV+mV}{M+m} = V$.

PROPOSITION CXXXI.

368. *Si un corps élastique* A *choque un corps élastique* B *plus grand que lui* (Fig. 124.), *& qui est en repos, & que celui-ci par la vitesse acquise choque un autre corps élastique* C *plus grand & qui est en repos, la vitesse de* C *après le choc sera plus grande que la vitesse qu'il auroit reçue si le corps* A *l'avoit choqué immédiatement.*

DEMONSTRATION.

Je nomme M la masse du premier corps A, rM celle du second B, & sM celle du troisiéme C, les lettres r, s, sont des nombres au-dessus de l'unité, & s est plus grand que r, ce qui fait que rM est plus grand que M, & sM plus grand que rM, ainsi qu'il est porté par le Problême. Maintenant par le Corollaire IVe. de la CXIX^e^. Proposition (*N.* 336.) la somme des corps A, B, est au double du corps A comme la vitesse de A avant le choc est à la vitesse de B après le choc, donc $M+rM, 2M :: V, \frac{2MV}{M+rM}$ = vitesse de B après le choc.

Par la même raison, la somme B+C des corps B, C, est au double de B comme la vitesse de B avant de choquer C est à la vitesse de C après le choc de B; donc $rM+sM, 2rM :: \frac{2MV}{M+rM}, \frac{4rM^2V}{rM^2+r^2M^2+sM^2+rsM^2} = \frac{4rV}{r+r^2+s+sr}$ = vitesse de C après le choc de B.

Par la même raison encore la somme des corps A, C, est au double de A comme la vitesse de A avant aucun choc est à la vitesse que C acquerroit si A le choquoit immédiatement, donc $M+sM, 2M :: V, \frac{2MV}{M+sM}, \frac{2V}{1+s}$ = vitesse que C acquerroit par le choc immédiat de A.

Donc la vitesse que C acquiert par le choc de B est à celle qu'il acquerroit par le choc immédiat de A comme $\frac{4rV}{r+r^2+s+sr}$ est à $\frac{2V}{1+s}$, ou comme $\frac{2r}{r+r^2+s+sr}$ est à $\frac{1}{1+s}$, ou bien en réduisant tout au même dénominateur, & négligeant ce dénominateur, comme $2r+2rs$ est à $r+r^2+s+sr$, ou enfin en retranchant $r+sr$ de part & d'autre, comme $r+rs$ est à r^2+s.

Or par la supposition s est plus grand que r, ainsi supposant $nr=s$, & mettant cette valeur dans le rapport que nous venons

de trouver, ce rapport sera $r + nr^2$, $r^2 + nr$, & divisant tout par r, nous aurons $1 + nr$, $r + n$; mais rn est plus grand que $n + r$, car le produit de deux grandeurs qui surpassent l'unité est plus grand que leur somme, donc à plus forte raison $1 + nr$ est plus grand que nr.

Puis donc que la vitesse de C après le choc de B est à la vitesse que C acquerroit s'il étoit choqué immédiatement par A comme $1 + nr$ est à $r + n$, & que $1 + nr$ est plus grand que $r + n$, il s'ensuit que la vitesse de C après le choc de B est plus grande que la vitesse que C acquerroit s'il étoit choqué immédiatement par A.

M. Huguens a démontré ceci autrement, & a fait voir que la même chose arriveroit si le corps B étoit moindre que A, & C moindre que B, ce qu'on peut démontrer aisément par la méthode que nous venons d'employer.

COROLLAIRE I.

369. *Si le corps* B *plus grand que* A *se meut daus la même direction mais moins vite, & que le corps* C *plus grand que* B *soit en repos & soit choqué par* B *après que* A *a choqué* B, *la vitesse que* C *reçoit par le choc de* B *est plus grande que celle qu'il recevroit par le choc immédiat de* A.

Je nomme comme auparavant M la masse de A, rM la masse de B, sM la masse de C; de plus je nomme V la vitesse de A, & qV la vitesse de B, la lettre q est un nombre rompu puisque nous supposons la vitesse de B moindre que celle de A.

Maintenant la vitesse de B après le choc sera $2MV - \frac{MqV + rMqV}{M + rM}$; or comme la somme des corps B, C est au double de B, ainsi la vitesse avec laquelle B choque C, est à la vitesse que C acquiert par le choc de B, donc $rM + sM$, $2rM$: : $\frac{2MV - MqV + rMqV}{M + rM}$, $\frac{4rM^2V - 2rM^2qV + 2r^2M^2qV}{rM^2 + r^2M^2 + sM^2 + srM^2} = \frac{4rV - 2rqV + 2r^2qV}{r + r^2 + s + sr}$ = vitesse de C acquise par le choc de B.

De même comme la somme des corps A, C est au double de A, ainsi la vitesse de A avant aucun choc est à la vitesse que C acquerroit si A le choquoit immédiatement; donc $M + sM$, $2M$: : V, $\frac{2MV}{M + sM} = \frac{2V}{1 + s}$ = vitesse acquise de C par le choc immediat de A.

Donc la vitesse acquise de C par le choc de B est à la vitesse que C acquerroit par le choc immediat de A, comme $\frac{4rV - 2rqV + 2r^2qV}{r + r^2 + s + sr}$ est à $\frac{2V}{1 + s}$, ou comme $\frac{2r - rq + r^2q}{r + r^2 + s + sr}$ est à $\frac{1}{1 + s}$, ou bien en reduisant tout au même dénominateur, & négligeant ensuite ce dénominateur, comme $2r - rq + r^2q + 2sr - rsq + r^2sq$, est à $r + r^2 + s + sr$, & retranchant de part & d'autre $r + rs$, le rapport sera r [illegible] $+ r^2q + sr - rsq + r^2sq$, $r^2 + s$.

Or s est plus grand que r par la supposition, donc faisant $nr = s$, & mettant cette valeur de s dans le rapport que nous venons de trouver, ce rapport sera $r - rq + r^2q + nr^2 - nr^2q + nr^3q$, $r^2 + nr$, & divisant par r nous aurons $1 - q + rq + nr - nrq + nr^2q$, $r + n$; or le premier terme de ce rapport est plus grand que le second, car le seul nr est plus grand que $n + r$, & il est visible que les grandeurs négatives qui se trouvent dans ce terme sont moindres que les autres grandeurs positives, puis donc que la vitesse de C acquise par le choc de B est à la vitesse que C acquerroit par le choc immediat de A, comme $1 - q + rq + nr - nrq + nr^2q$, est à $r + n$, il s'ensuit que la vitesse acquise par le choc de B est plus grande que ne seroit la vitesse acquise par le choc immediat de A.

COROLLAIRE II.

370. Les deux corps élastiques A, C étant donnés, & C étant en repos, si l'on veut trouver un autre corps élastique, lequel étant mis entre A & C & venant à être choqué par A, puis choquant à son tour C, produise dans C la plus grande vitesse qu'un corps interposé entre A & C, puisse lui communiquer, on resoudra la question en cette sorte.

Je nomme X le corps qu'on demande, & V la vitesse du corps A avant le choc, le corps X étant en repos avant le choc, sa vitesse après le choc sera $\frac{2AV}{A + X}$; or la somme des corps X, C est au double de X, comme la vitesse de X est à la vitesse de C acquise par le choc de X, donc $X + C$, $2X$ :: $\frac{2AV}{A + X}$, $\frac{4AVX}{AX + XX + AC + CX}$ = vitesse de C acquise par le choc de X.

Maintenant par la supposition cette vitesse est un *plus grand*; donc selon la regle *des plus grandes & des moindres quantités*, je prens la différence de cette vitesse qui est

$$\frac{4A^2VXdX + 4AVX^2dX + 4A^2VCdX + 4ACVXdX - 4A^2VXdX - 8AVX^2dX}{\overline{AX+XX+AC+CX}^2}$$

$\frac{-4AVCXdX}{\overline{AX+XX+AC+CX}^2}$, je fais cette quantité égale à zero, & multipliant tout par le dénominateur, le numérateur est encore égal à zero; corrigeant donc son expression, j'ai $4A^2VCdX - 4AVX^2dX = 0$; & divisant par dX, puis donnant de part & d'autre $4AVX^2$, & enfin divisant par $4AV$, j'ai $AC = XX$ d'où je tire $A, X :: X, C$, c'est-à-dire, que pour produire l'effet requis, il faut prendre un corps X moyen proportionnel entre les deux corps donnés A, C.

PROPOSITION CXXXII.

371. *Deux corps* A, B (Fig. 125.) *élastiques ou non élastiques qui se choquent obliquement en* C *étant donnés, déterminer leur mouvement après le choc.*

SOLUTION.

Je décris des parallelogrammes AC, BC autour des directions AC, BC des deux corps, & supposant que AC marque la force du corps A, cette force équivaudra à deux forces exprimées par les côtés AD, AE du parallelogramme AC; de même si BC marque la force du corps B, cette force équivaudra à deux forces exprimées par les côtés BF, BG du parallelogramme BC; or les forces AD, BG étant paralleles ne contribuent rien au choc, donc il n'y a que les deux forces AE, BF ou DC, CG qui y contribuent; ainsi ce choc oblique est le même qui se feroit selon les directions directes DC, CG, & avec des forces exprimées par ces directions; par conséquent on déterminera le mouvement des deux corps après le choc en suivant les regles enseignées dans ce Chapitre.

Supposons par exemple que les deux corps soient élastiques; & qu'ils rebroussent chemin, le premier avec une force égale à CI, & l'autre avec une force égale à CH; comme les forces AD, BG subsistent & agissent toujours, je fais IL = AD, & HP = BG, & achevant les parallelogrammes IM, HN, le corps A prendra la direction CL, & le corps B la direction CP, & ainsi des autres.

CHAPITRE XII.

De la Force Centrifuge & de la Force Centripete.

DEFINITIONS.

372. ON appelle *Force Centrifuge* d'un corps, la force qui fait que ce corps étant mû autour d'un centre de mouvement, tend à s'éloigner de ce centre.

Si on conçoit un polygone d'une infinité de côtés inſcrit dans une courbe ABCDE (*Fig.* 126), les petits côtés AB, BC, CD, &c. de ce polygone, ne différeront point des arcs qu'ils ſoutiennent, & par conſéquent la courbe entiere ne differera pas du polygone ; donc un corps qui ſe meut le long de la courbe parcourt les petits côtés AB, BC, CD, &c. & change à tout moment de direction ; or comme un corps qui eſt mû d'abord dans une direction, tend à ſe conſerver dans la même direction, il s'enſuit que le corps A mû autour de la courbe tend à s'échaper à chaque inſtant le long de la tangente ; ſuppoſant donc qu'au lieu de parcourir le côté infiniment petit BC, il ſe meuve le long de la tangente, & menant du point C la droite IC perpendiculaire à la tangente, cette droite IC exprimera la force centrifuge ou la quantité dont le corps s'eſt éloigné de la courbe.

373. On appelle *Force Centripete* la force qui fait qu'un corps qui devroit marcher dans la même direction AH, eſt à tout moment rappellé vers un centre O ; ſi donc au lieu de parcourir la petite droite BI il parcourt l'arc infiniment petit BC, la perpendiculaire CI exprimera la force centripete ; d'où il ſuit que la force centripete eſt égale à la force centrifuge.

374. La *force centripete* & la force centrifuge s'appellent d'un nom commun, *forces centrales.*

PROPOSITION CXXXIII.

375. *Si deux corps égaux* A, B (Fig. 127.) *parcourent dans des tems égaux avec des viteſſes uniformes des circonférences inégales de cercles, leurs forces centrales ſont entr'elles comme leurs diametres.*

DEMONSTRATION.

Je ſuppoſe que AC ſoit un arc infiniment petit de la circonfé-

rence ACD, & que les circonférences ACD, BEH ſoient concentriques; je mene du point C le rayon OC, & les ſecteurs AOC, BOE ſont ſemblables, à cauſe de l'angle AOC commun, donc l'arc AC eſt à l'arc BE, comme le rayon AO eſt au rayon BO, & par conſéquent comme la circonférence ACD eſt à la circonférence BEH; puis donc que les tems que les corps A, B employent à parcourir leurs circonférences ſont égaux, & que les mouvemens ſont uniformes, il eſt sûr que les tems que les corps A, B employeront à parcourir les arcs AC, BE ſeront entr'eux comme les tems employés à parcourir leurs circonférences, c'eſt-à-dire que ces tems ſeront égaux; car ſi AC étoit par exemple la dixiéme partie de la circonférence ACD; BC ſeroit auſſi la dixiéme partie de la circonférence; ainſi A n'employeroit à parcourir AC que la dixiéme partie du tems qu'il employoit à parcourir ACD, & par la même raiſon B n'employeroit à parcourir BE que la dixiéme partie du tems qu'il employe à parcourir BEH; or les tems employés à parcourir les circonférences ACD, BEH ſont égaux, donc les dixiémes de ces tems ſont auſſi égaux, &c.

Des points A, B, je mene les tangentes AG, BF, & des points C, E les droites CG, EF perpendiculaires ſur ces tangentes, ainſi ces droites CG, EF expriment les forces centrifuges des corps A, B (*N.* 372); or à cauſe de la ſimilitude des cercles & des arcs proportionnels AC, BE, les droites CG, EF ſemblablement poſées ſont entr'elles comme les arcs AC, BE, ou comme les rayons AO, BO, leſquels ſont entr'eux comme les diametres, donc les forces centrifuges CG, EF ſont entr'elles comme les diametres.

Mais les forces centripetes ſont égales aux forces centrifuges (*N.* 373), donc les forces centrales ſont entr'elles comme les diametres.

COROLLAIRE I.

376. Donc ſi les forces centrales de deux corps égaux qui ſe meuvent le long de deux circonférences de cercles inégaux, ſont entr'elles comme les diametres, les tems employés à parcourir les deux circonférences ſont égaux.

COROLLAIRE II.

377. *Les forces centrales des corps* A, B *ſont comme les quarrés des*

des arcs infiniment petits AC, BE *divisés par les diametres* AQ, BP.

Des points C, E je mene les droites CN, EM perpendiculaires aux diametres AQ, BP, & j'ai AN = CG, & BM = EF, or l'arc AC étant infiniment petit, n'est pas différent de sa corde & par la proprieté du cercle j'ai AQ, AC : : AC, AN, donc $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$ = AN = CG; par la même raison j'ai PB, BE : : BE, BM, donc $\frac{\overline{BE}^2}{PB}$ = BM = EF, & par conséquent CG, EF : : $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$, $\frac{\overline{BE}^2}{PB}$.

COROLLAIRE III.

378. *Les forces centrales sont donc des différences du second genre.* Car puisque AC est infiniment petit par rapport à AQ, & que nous avons AQ, AC : : AC, AN, il s'ensuit que AN est aussi infiniment petit par rapport à AC, donc AC étant une différence du premier genre, AN ou CG est une différence du second genre.

COROLLAIRE IV.

379. *Quand les deux corps* A, B *parcourent les circonférences* ACD, BEH *en des tems égaux, les forces centrales sont en raison composée de la raison directe des quarrés des vitesses, & de la raison inverse des diametres ou des rayons.*

Par le Corollaire second nous avons CG, EF : : $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$, $\frac{\overline{BE}^2}{PB}$, donc CG, EF : : $\overline{AC}^2 \times PB$, $\overline{BE}^2 \times AQ$, c'est-à-dire les forces CG, EF, sont en raison composée de la raison $\overline{AC}^2$, $\overline{BE}^2$, & de la raison PB, AQ; mais les arcs AC, PB, étant parcourus en même tems, expriment les vitesses des corps A, B, donc la raison $\overline{AC}^2$, $\overline{BE}^2$, est la raison directe des quarrés des vitesses; or la raison PB, AQ est la raison inverse des diametres, donc, &c.

COROLLAIRE V.

380. *Si les arcs* AC, BE *sont égaux, & qu'ils soient parcourus en même tems, les circonférences entieres seront par conséquent parcourues en des tems inégaux, & en ce cas les vitesses centrales seront entr'elles reciproquement comme les diametres.*

Par le Corollaire précédent nous avons CG, EF :: $\overline{AC}^2 \times PB$, $\overline{BE}^2 \times AQ$, mais la raison $\overline{AC}^2$, $\overline{BE}^2$ est une raison d'égalité, c'est-à-dire $\overline{AC}^2 = \overline{BE}^2$ par la supposition, donc CG, EF :: PB, AQ.

COROLLAIRE VI.

381. *Si les diametres* AQ, PB *sont égaux, & les arcs* AC, BE *décrits en même tems par les corps* A, B *sont inégaux, les forces centrifuges seront comme les quarrés des vitesses.*

CG, EF :: $\overline{AC}^2 \times PB$, $\overline{BE}^2 \times AQ$, mais par la supposition PB = AQ, donc, CG, EF :: $\overline{AC}^2$, $\overline{BE}^2$.

COROLLAIRE VII.

382 *Si les diametres étant inégaux les forces centrales sont égales; les diametres seront entr'eux comme les quarrés des vitesses.*

CG, EF :: $\overline{AC}^2 \times PB$, $\overline{BE}^2 \times AQ$, mais par la supposition CG = EF, donc $\overline{AC}^2 \times PB = \overline{BE}^2 \times AQ$, & par conséquent AQ, PC :: $\overline{AC}^2$, $\overline{BE}^2$.

PROPOSITION CXXXIV.

383. *Si les forces centrales de deux corps* A, B (Fig. 127.) *qui parcourent des circonférences inégales, sont égales, les tems employés à parcourir les circonférences sont entr'eux comme les racines quarrées des diametres.*

DEMONSTRATION.

Nommons le diametre D, d, les circonférences P, p, les tems employés à les parcourir T, t, & les vitesses uniformes des deux corps V, u, par le Corollaire 7 de la Proposition précédente nous avons D, d :: V^2, u^2, donc $\sqrt{D}$, $\sqrt{d}$ :: V, u; or à cause de la similitude des cercles nous avons D, d :: P, p; divisant donc les termes de cette proportion par les termes de la précédente $\frac{D}{\sqrt{D}}$, $\frac{d}{\sqrt{d}}$ :: $\frac{P}{V}$, $\frac{p}{u}$, ou $\sqrt{D}$, $\sqrt{d}$ :: $\frac{P}{V}$, $\frac{p}{u}$; mais dans le mouvement uniforme les tems sont en raison composée de la raison directe des espaces, & de la raison reciproque des vitesses (*N.* 24); donc T, t :: Pu, pV, & divisant la derniere raison par

V, & ensuite par u, j'ai $T, t :: \frac{P}{V}, \frac{p}{u}$, donc $T, t :: \sqrt{D}, \sqrt{d}$.

COROLLAIRE I.

384. Puisque $T, t :: \sqrt{D}, \sqrt{d}$, donc $T^2, t^2 : D, d$, c'est-à-dire les forces centrales étant égales, les diametres sont comme les quarrés des tems employés à parcourir les circonférences.

COROLLAIRE II.

385. Puisque $V^2, u^2 :: D, d$, & $T^2, t^2 :: D, d$, donc $V^2, u^2 :: T^2, t^2$, & $V, u :: T, t$, c'est-à-dire les forces centrales étant égales, les vitesses des corps sont comme les tems employés à parcourir les circonférences.

COROLLAIRE III.

386. *Si les forces centrales sont inégales, elles sont entr'elles en raison composée de la raison directe des diametres, & de la reciproque des quarrés des tems employés à parcourir les circonférences.*

Je nomme F, f les forces centrales, la force centrale de A est $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$, & celle de B est $\frac{\overline{BE}^2}{BP}$ (*N.* 377), donc $F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$; mais dans le mouvement uniforme les vitesses sont comme les espaces divisés par les tems (*N.* 21), donc $V, u :: \frac{P}{T}, \frac{p}{t}$, & mettant au lieu de P, p la raison D, d, qui est la même, j'ai $V, u :: \frac{D}{T}, \frac{d}{t}$, donc $V^2, u^2 :: \frac{D^2}{T^2}, \frac{d^2}{t^2}$ & $\frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d} :: \frac{D^2}{DT^2}, \frac{d^2}{dt^2} :: \frac{D}{T^2}, \frac{d}{t^2}$, puis donc que $F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$, donc $F, f :: \frac{D}{T^2}, \frac{d}{t^2} :: Dt^2, dT^2$.

COROLLAIRE IV.

387. *Si les forces centrales sont inégales, & que les tems employés à parcourir les circonférences soient entr'eux comme les diametres, les forces centrales sont entr'elles reciproquement comme les diametres.*

Puisque $T, t :: D, d$, & par conséquent $T^2, t^2 :: D^2, d^2$, & que par le Corollaire précédent $F, f :: \frac{D}{T^2}, \frac{d}{t^2}$, donc $F, f :: \frac{D}{D^2}, \frac{d}{d^2} :: d^2D, D^2d :: d, D$.

COROLLAIRE V.

388. Dans le cas du Corollaire précédent les vitesses sont égales; car puisque $F, f :: d, D$, & que par le Corollaire 3e on a $F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$, donc $\frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d} :: d, D$, & par conséquent $V^2, u^2 :: dD, dD :: 1, 1$.

REMARQUE.

389. La force centrale du corps A est $\frac{\overline{AE}^2}{AQ}$; or ce corps étant mû avec une vitesse uniforme, parcourt des arcs égaux dans des tems égaux; donc sa force centrifuge est toujours $\frac{\overline{AE}^2}{AQ}$, c'est-à-dire constante, ce qui n'arrive pas dans les autres courbes.

PROPOSITION. CXXXV.

390. *Si les deux corps* A, B (Fig. 127.) *parcourent d'un mouvement uniforme deux circonférences, & que leurs vitesses soient entr'elles reciproquement comme les racines quarrées des diametres ou des rayons, leurs forces centrifuges seront reciproquement comme les quarrés des rayons ou des distances aux centres.*

DEMONSTRATION.

$F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$ (*N.* 386), & par la supposition $V, u :: \sqrt{d}, \sqrt{D}$, donc $V^2, u^2 :: d, D$, & par conséquent $F, f :: \frac{d}{D}, \frac{D}{d} :: dd, DD :: \frac{1}{4}dd, \frac{1}{4}DD$.

COROLLAIRE I.

391. *Si les vitesses sont reciproquement comme les diametres, les forces centrales seront reciproquement comme les cubes des rayons.*

$F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$ (*N.* 386); mais par la supposition $V, u :: d, D$, donc $V^2, u^2 :: d^2, D^2$, & par conséquent $F, f :: \frac{d^2}{D}, \frac{D^2}{d} :: d^3, D^3$.

COROLLAIRE II.

392. *Si les vitesses sont reciproquement comme les quarrés des dia-*

metres, les forces centrifuges seront reciproquement comme les cinquiémes puissances des rayons.

$F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$ (*N.* 386); mais par la supposition $V, u :: d^2, D^2$, donc $V^2, u^2 :: d^4, D^4$, & par conséquent $F, f :: \frac{d^4}{D}, \frac{D^4}{d} :: d^5, D^5$.

Et il est facile de trouver les rapports des forces centrales si les vitesses étoient reciproquement comme quelques puissances plus élevées des diametres.

PROPOSITION CXXXVI.

393. *Si les vitesses des deux corps* A, B *sont reciproquement comme les racines quarrées des diametres, les quarrés des tems employés à parcourir les circonférences, sont comme les cubes des rayons.*

DEMONSTRATION

Le mouvement étant uniforme, les tems sont en raison composée de la raison directe des espaces & de la reciproque des vitesses (*N.* 24), donc $T, t :: Pu, pV :: \frac{P}{V}, \frac{p}{u}$, & mettant au lieu de P, p la raison D, d qui lui est égale, j'ai $T, t :: \frac{D}{V}, \frac{d}{u}$, mais par la supposition $V, u :: \sqrt{d}, \sqrt{D}$, donc $T, t :: \frac{D}{\sqrt{d}}, \frac{d}{\sqrt{D}}$, & par conséquent $T^2, t^2 :: \frac{D^2}{d}, \frac{d^2}{D} :: D^3, d^3$.

COROLLAIRE.

394 *Si les vitesses sont reciproquement comme les diametres, les tems sont comme les quarrés des rayons.*

$T, t :: \frac{D}{V}, \frac{d}{u}$ (*N.* 393); mais par la supposition $V, u :: d, D$, donc $T, t :: \frac{D}{d}, \frac{d}{D} :: D^2, d^2$.

PROPOSITION CXXXVII.

395. *Si un corps* A (Fig. 128.) *parcourt d'un mouvement uniforme une circonférence de cercle, avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise en descendant librement le long de la droite* HA *perpendiculaire à l'horizon, la force centrale de ce corps est à sa pesanteur comme le double de* HA *est au rayon* OA.

DEMONSTRATION.

Le mouvement le long de HA étant uniformement acceleré, le corps A auroit parcouru dans le même-tems un espace double de HA s'il s'étoit mû d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale acquise à la fin de HA (*N.* 63.), & comme le mouvement le long de AC est aussi uniforme, & avec la même vitesse que le mouvement le long de 2HA, il s'ensuit que le tems employé à parcourir uniformement AC est au tems employé à parcourir uniformement 2HA comme AC, 2HA.

Maintenant pour connoître l'espace que la pesanteur de A lui feroit parcourir dans le même-tems qu'il parcourt AC, en supposant que le corps commençât à descendre au point A, il faut observer que le mouvement pendant l'espace demandé étant acceleré de même que le mouvement pendant l'espace AH, ces espaces sont comme les quarrez des tems, c'est-à-dire comme les quarrez de AC & de 2HA, car les tems sont comme AC, 2HA ainsi qu'on vient de voir; donc on dira $4\overline{HA}^2, \overline{AC}^2 :: HA, \frac{\overline{AC}^2 \times HA}{4\overline{HA}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{4HA}$; ainsi $\frac{\overline{AC}^2}{4HA}$ sera l'espace que la pesanteur feroit parcourir au corps A dans le tems qu'il parcourt AC; or l'espace que la force centrale lui fait parcourir dans le même-tems est $CG = \frac{\overline{AC}^2}{AQ}$ (*N.* 377.); & par conséquent la vitesse causée par la pesanteur est à la vitesse causée par la force centrifuge comme $\frac{\overline{AC}^2}{4HA}$ est à $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$, mais la masse étant égale de part & d'autre, les forces sont comme les vitesses, donc la pesanteur est à la force centrale comme $\frac{\overline{AC}^2}{4HA}$ est à $\frac{\overline{AC}^2}{QA}$, ou comme $\overline{AC}^2 \times QA$ est à $\overline{AC}^2 \times 4HA$, ou comme QA est à 4HA, ou enfin comme $\frac{1}{2}$QA, 2HA, & par consequent la force centrale est à la pesanteur comme 2HA ou le double de HA est à $\frac{1}{2}$QA, ou à OA, c'est-à-dire au rayon.

COROLLAIRE I.

396. Si on nomme G la pesanteur, on aura OA, 2HA :: G, $\frac{2HA \times G}{OA}$, & ce sera la valeur de la force centrale.

COROLLAIRE II.

397. *Si* AH *est égal à la moitié du rayon* OA, *la force centrale est égale à la pesanteur;* car on aura OA, 2HA, ou OA :: G, $\frac{OA \times G}{OA} = G$.

COROLLAIRE III.

398. *Si la force centrale est égale à la pesanteur, le tems employé à parcourir la circonference entiere est au tems de la descente du corps* A *le long de la moitié du rayon, comme la circonference est au rayon.*

Le mouvement le long de la moitié du rayon étant un mouvement acceleré, le corps A parcourroit dans un même-tems avec un mouvement uniforme & une vitesse égale à la vitesse acquise à la fin de $\frac{1}{2}$AO un espace égal à AO.

Ainsi le mouvement le long de AO étant uniforme de même que le mouvement le long de la circonférence, & les vitesses étant égales par la supposition, puisque ces vitesses sont comme les forces à cause des masses égales, il s'ensuit que les tems employés à parcourir la circonférence avec une vitesse uniforme, & le demi-rayon avec une vitesse accelerée, sont comme la circonférence est au rayon.

PROPOSITION CXXXVIII.

399. *Si tandis qu'un corps* A (Fig. 129.) *se meut le long d'une courbe* ABCD *concave du côté de* C, *les droites tirées d'un point* O *qui est dans le plan de la courbe aux extremités des petits arcs* AB, BC, CD, *decrits dans des tems infiniment petits & égaux entr'eux forment des aires* ABO, BCO, CDO *égales entr'elles, le corps* A *est poussé vers* O *par une force centripete.*

DEMONSTRATION.

Si le corps A ayant décrit le petit arc AB qu'on peut prendre pour une ligne droite à cause de son infinie petitesse étoit abandonné à lui-même, il suivroit la même direction, & décriroit dans le second moment égal au premier une droite BE égale à l'arc AB; tirant donc du point E au point O la droite EO, les triangles ABO, BEO ayant les bases égales & le sommet O commun, seroient égaux; or par la supposition, le triangle BCO

eſt égal au triangle ABO ; donc le triangle BCO eſt auſſi égal au triangle BEO, mais ces deux triangles BCO, BEO ayant la baſe BO commune & étant égaux entr'eux, ils doivent avoir les hauteurs égales, ou ce qui revient au même, ils doivent ſe trouver entre mêmes paralleles ; donc joignant les ſommets par la droite EC, cette droite doit être parallele à la baſe BO ; ainſi menant CH parallele à BE, on voit que la force qui a pouſſé A de B en C, eſt équivalente à deux forces BE, BH, dont l'une pouſſe ſelon la direction BE, & l'autre la direction BH.

De même, ſi le corps étant en C étoit abandonné à lui-même, il ſuivroit ſa direction, & parcourroit la droite CF égale à CB dans un inſtant égal à celui pendant lequel il a parcouru CB ; donc tirant FO le triangle, FOC ſeroit égal au triangle CBO, mais par la ſuppoſition le triangle CDO eſt égal au triangle COB; donc les triangles CFO, CDO ſont égaux, & comme ils ont la baſe CO commune, il faut néceſſairement que la droite FD qui joint leur ſommets ſoit parallele à la baſe CO ; donc menant du point D la droite DR parallele à FC, on voit que la force qui pouſſe A de C en D eſt équivalente à deux forces CF, CR, dont l'une pouſſe ſelon la direction CF, & l'autre ſelon la direction CR, & ainſi de ſuite.

Or puiſque pendant le mouvement le long de la courbe, le corps A eſt toujours empêché de ſuivre ſa direction par des forces dont les directions BH, CR, &c. tendent au centre O, il s'enſuit que le corps eſt toujours pouſſé par une force centripete vers le centre O.

COROLLAIRE. I.

400. Si du ſommet A de la courbe on mene la tangente AT & du point B la droite BT perpendiculaire ſur cette tangente, la droite BT ou AV ſera la force centripete correſpondante à l'arc BA ; & les droites BH, CR, &c. ſeront les forces centripetes correſpondantes aux autres arcs BC, CD, &c.

COROLLAIRE II.

401. Les droites BE, CF, &c. le long deſquelles le corps s'échaperoit à chaque inſtant s'il étoit livré à lui-même, ſont tangentes de la courbe, puiſqu'elles ſont les prolongemens de ſes petits arcs ; donc elles ſont perpendiculaires aux rayons BO, CO, &c.

si la courbe est un cercle dont le centre soit le point O, & par conséquent les triangles ABO, BCO, &c. sont rectangles, ce qui n'arrive que dans le cercle.

COROLLAIRE III.

402. Les aires ou triangles ABO, BCO, étant rectangles dans le cercle, il s'ensuit à cause de leur égalité que leurs hauteurs BA, CB, &c. sont entr'elles reciproquement comme les bases BO, CO, mais les bases sont égales puisqu'elles sont rayons d'un même cercle, donc les hauteurs, c'est-à-dire les petits arcs décrits dans des tems égaux sont égaux, ce qui n'arrive encore que dans le cercle.

COROLLAIRE IV.

403. Les diagonales BA, BC, CD, &c. étant égales entr'elles dans le cercle, les côtés AT, BE, CF des parallelogrammes TV, EN, FQ, &c. sont aussi égaux entr'eux & aux diagonales; car par la construction EB = BA, or BA, BC, donc EB = BC, & ainsi des autres, mais les angles de ces parallelogrammes sont déterminés, puisqu'ils sont tous des angles droits, donc ces parallelogrammes sont tous semblables & égaux entr'eux, & par conséquent les côtés AV, BH, CR, &c. sont égaux, c'est-à-dire la force centripete est constante, ainsi que nous l'avons déja remarqué plus haut, & ceci n'arrive encore que dans le cercle.

Au reste, il ne faut pas objecter que les parallelogrammes ayant un côté égal à la diagonale ne sçauroient être rectangles; car quoique cela soit vrai à l'égard des rectangles dont tous les côtés sont des grandeurs assignables, il n'en est pas de même à l'égard des parallelogrammes qui ont un côté infiniment petit par rapport à l'autre; car supposé, comme nous l'avons démontré (*N.* 378.) que le côté AV qui marque la force centrale du cercle soit infiniment petit par rapport à AB, l'angle ABV sera infiniment petit, or l'angle BVA est droit, donc l'angle BAV plus l'angle ABV valent un angle droit, & comme ABV est infiniment petit, il s'ensuit que BAV ne differant de l'angle droit que d'un infiniment petit, peut être regardé comme droit.

COROLLAIRE V.

404. Dans les autres courbes, les arcs AB, BC, étant infiniment petits, on peut regarder AB comme un arc de cercle dé-

crit par le rayon OA, l'arc BC comme un arc de cercle décrit par le rayon BO, & ainſi des autres; donc la force centrale par rapport à AB ſera la même que la force centrale par rapport à un cercle dont le rayon ſeroit OA, de même la force centrale BH par rapport à l'arc BC ſera la même que la force centrale par rapport à un cercle dont le rayon ſeroit BO, & ainſi des autres. Mais les forces centrales des cercles ſont infiniment petites par rapport aux arcs infiniment petits de ces cercles (*N.* 378.), donc les forces centrales par rapport aux arcs AB, BC, CD, &c. des courbes différentes du cercle, ſont infiniment petites par rapport à ces arcs.

COROLLAIRE VI.

405. Le Corollaire précédent fournit la réponſe à une difficulté qu'on pourroit faire touchant la Propoſition que nous venons d'établir. J'ai dit dans la Demonſtration de cette Propoſition que ſi le corps A après avoir parcouru l'arc AB étoit livré à lui-même, il parcourroit la droite BE dans un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir AB; or là-deſſus on peut m'objecter que la force de la direction AB étant équivalente aux deux forces AT, AV dont la premiere donne une viteſſe uniforme, & la ſeconde une viteſſe qui peut être accelerée ou retardée ſelon que les forces centrales de la courbe vont en augmentant ou en diminuant, il arrivera que le corps A étant en B, aura une viteſſe qui lui fera parcourir dans le ſecond inſtant un eſpace BE plus grand ou moindre que l'eſpace AB parcouru dans le premier; mais à cela je répons 1°; que la force AV étant infiniment petite par rapport à la force AT qui donne une viteſſe uniforme, l'augmentation ou la diminution de viteſſe que la force AV donne lorſque le corps A eſt en B eſt un infiniment petit par rapport à la viteſſe uniforme que donne la force AT. 2°. Que l'eſpace AB étant infiniment petit, la viteſſe accelerée ou retardée que donne la force AV, devroit être regardée comme uniforme pendant le mouvement le long de AB quand même cette viteſſe ne ſeroit pas infiniment petite par rapport à la force AT, & par conſéquent de l'un & l'autre de ces deux chefs, il s'enſuit que l'eſpace BE parcouru dans le ſecond inſtant doit être égal à l'eſpace AB parcouru dans le premier, puiſque la différence qui peut s'y trouver ne peut être qu'une difference du ſecond genre, laquelle n'empêche pas plus l'égalité entre deux grandeurs qui ſont de

différences du premier genre, qu'une difference du premier genre ne l'empêche entre deux grandeurs qui sont finies & assignables.

COROLLAIRE VII.

406. *Si un corps* A *est mû uniformement selon une droite* AB, *& qu'en même-tems il soit attiré vers un centre* O *par une force centripete, je dis qu'il decrira une courbe* ABCD *concave du côté de* C, *& que si des extremités des espaces parcourus à la fin des tems égaux, on mene des rayons* BO, CO, DO, &c. *au centre* O, *les aires* ABO, BCO, CDO, &c. *seront égales.*

Ce Corollaire est l'inverse de la Proposition que nous venons d'établir, car il est visible que si le corps A a parcouru dans un instant la petite droite AB, il parcourroit dans le second instant la petite droite BE s'il étoit livré à lui-même ; mais comme la force centripete est BH, il se mouvra selon la direction BC, & par conséquent les deux AB, BC, feront un angle du côté de C, & comme cela arrivera partout, la courbe décrite sera concave du côté de C.

En second lieu, le triangle BEO sera égal au triangle ABO ; mais à cause du parallelogramme EH des forces BE, BH, équivalentes à la force BC, la droite EC sera parallele à la droite BH; donc les triangles BCO, BEO seront égaux ; mais le triangle BEO est égal au triangle BAO, donc BCO est aussi égal au triangle BAO, & on prouvera la même chose à l'égard des aires suivantes ; donc, &c.

COROLLAIRE VIII.

407. *Lorsque la courbe n'est pas un cercle, les vitesses dont les arcs* AB, BC *sont décrits, sont réciproquement comme les perpendiculaires menées du centre* O *sur ces arcs prolongés s'il le faut.*

Les triangles ABO, BCO sont égaux, donc leurs bases AB, BC, sont entr'elles réciproquement comme leurs hauteurs, ou comme les perpendiculaires tirées du sommet commun O sur leurs bases, mais les bases AB, BC, étant parcourues dans des tems égaux, expriment les vitesses ; donc les vitesses sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées sur les bases.

COROLLAIRE IX.

408. Si la force centripete est la même partout, nous avons

déja' dit que la courbe eſt un cercle ; donc ſi la force centripete va en diminuant, la courbe eſt moins courbe que le cercle, & ſi elle va en augmentant, elle eſt plus courbe que le cercle.

REMARQUE.

409. Quoique nous ayions pris pour la force centrale, la droite CG (*Fig.* 127.) pependiculaire à la tangente AG, on peut prendre auſſi pour la même force la droite CV qui eſt le prolongement du rayon ; car les droites CG, CV étant des infiniment petits du ſecond genre, leur différence eſt un infiniment petit du troiſiéme genre auquel il ne faut pas avoir égard, ainſi ces deux lignes CG, CV peuvent paſſer pour égales & être priſes l'une pour l'autre.

DEFINITION.

410. On appelle *centre des forces* le point O (*Fig.* 130.) auquel la force centripete ramene continuellement un corps qui ſe meut le long d'une courbe AMB, & cette courbe ſe nomme *orbite*, ou *courbe du trajet*.

La droite MO tirée d'un point quelconque de la courbe au centre O ſe nomme *rayon vecteur*, & ſi après avoir mené deux rayons vecteurs infiniment proches M*o*, *m*O, on éleve aux points M, *m*, des perpendiculaires à la courbe MC, *m*C, qui ſe rencontrent en C, chacune des droites MC, *m*C, s'appellera *rayon de la developpée*, parce que ſelon ce que nous avons enſeigné dans *le Calcul Differentiel & Integral* toute courbe AMB peut être regardée comme étant la ligne de developpement d'une autre courbe, en ſorte que les perpendiculaires MC à la ligne de developpement ſont tangentes de la développée.

LEMME.

411. *Si deux grandeurs a, b, ſont réciproques à deux autres grandeurs m, n, c'eſt-à-dire, ſi a, b :: n, m, ces deux grandeurs ſeront entr'elles comme deux fractions dont les numerateurs ſeront l'unité, & dont les dénominateurs ſeront les grandeurs m, n, priſes directement.*

DEMONSTRATION.

Par la ſuppoſition *a*, *b* :: *n*, *m*, donc diviſant la ſeconde raiſon

par n, j'ai $a, b :: 1, \frac{m}{n}$, & divifant encore la feconde raifon par m, j'ai $a, b :: \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$; donc, &c.

PROPOSITION CXXXIX.

412. *Dans toute courbe* (Fig. 130.) *les forces centrales correfpondantes à leurs arcs infiniment petits, font entr'elles en raifon compofée de la raifon directe des rayons vecteurs, de la raifon reciproque des rayons de la developpée, & de la réciproque des cubes des perpendiculaires tirées fur les tangentes du centre* O.

DEMONSTRATION.

L'arc M*m* de la courbe étant infiniment petit peut être pris pour un arc de cercle décrit par le rayon CM ; donc fa force centrale confidérée comme agiffant vers le centre C eft comme *m*R (*N.* 409.), & cette force centrale confiderée comme agiffant vers le centre O des forces eft *m*N.

Le rayon de la développée MC étant perpendiculaire à la courbe, l'angle CMR eft droit; or à caufe de l'arc infiniment petit M*m* l'angle MCR eft infiniment petit, donc l'angle MRC qui ne differe de l'angle droit CMR que de l'angle MCR, n'en differe que d'un infiniment petit, & par conféquent les deux angles CMR, MRC peuvent paffer pour égaux, & l'angle MRC peut être pris pour un angle droit; donc fi du point O je mene OP perpendiculaire à la tangente PN, les triangles POM, R*m*N pourront être regardés comme femblables ; car l'angle PMO ne differe auffi de l'angle RN*m* que d'un infiniment petit, puifque l'angle PMO eft égal à l'angle RN*m* plus l'angle MON qui eft infiniment petit ; donc j'ai *m*R, *m*N :: PO, OM, c'eft-à-dire, la force centripete vers le centre du rayon de la développée eft à la force centripete vers le centre des forces comme PO eft à MO. Si j'appelle donc V la viteffe dont le corps parcourt l'arc infiniment petit M*m*, la force centripete vers C fera comme $\frac{Mm^2}{MC}$ (*N.* 379.), & comme M*m* exprime la viteffe, cette force fera $\frac{V^2}{MC}$; or les arcs parcourus M*m* en tems égaux, font réciproquement comme les perpendiculaires menées du centre des forces fur ces arcs (*N.* 407.), donc l'arc M*m* fera comme $\frac{1}{PO}$ (*N.* 411.) ; mais les arcs font comme les viteffes, donc V

$=\frac{1}{PO}$, & mettant cette valeur de V dans la force centripete $\frac{V^2}{MC}$, j'ai $\frac{1}{PO^2 \times MC}$; or la force centripete vers C est à la force centripete vers O comme PO est à MO, ainsi qu'on vient de voir; donc j'ai PO, MO :: $\frac{1}{PO^2 \times MC}$, $\frac{MO}{PO^3 \times MC}$, force centripete vers O.

Si nous avions donné un autre rayon vecteur que nous eussions nommé *mo*, un autre rayon de la développée que nous eussions nommé *mc*, & un autre perpendiculaire sur la tangente correspondante que nous eussions nommé *po*, nous aurions pour la force centripete vers O $\frac{mo}{po^3 \times mc}$; donc les deux forces centripetes seroient comme $\frac{MO}{PO^3 \times MC}$, $\frac{mo}{po^3 \times mc}$, ou comme MO × po^3 × mc, mo × PO^3 × MC, c'est-à-dire en raison composée de la raison directe MO, mo, des rayons vecteurs, de la réciproque des rayons mc, MC, de la développée, & de la réciproque des cubes po^3, PO^3 des perpendiculaires menées du centre des forces sur les tangentes correspondantes.

COROLLAIRE I.

415. *Si la courbe est un cercle* (Fig. 151), *& que le centre O des forces soit sur la circonférence, les forces centrifuges sont entr'elles réciproquement comme les cinquièmes puissances des rayons vecteurs* OM.

Les rayons de la développée sont tous égaux entr'eux dans le cercle, puisque toutes les perpendiculaires menées à un point quelconque de la circonférence se rencontrent toutes dans le centre; cela posé, je prolonge le rayon MC en N, & je mene la droite ON, les droites OP, NM étant perpendiculaires à PR sont par conséquent paralleles entr'elles; donc l'angle POM est égal à son alterne OMN; or l'angle OPM est droit de même que l'angle MON, donc les triangles OPM, MON sont semblables, ainsi MN, MO :: MO, OP, d'où je tire $OP = \frac{\overline{MO}^2}{MN}$, & $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{MO}^6}{\overline{MN}^3}$; mais par la Proposition présente la force centripete au point M est $\frac{MO}{\overline{OP}^3 \times MC}$, mettant donc la valeur de $\overline{OP}^3$ la

force centripete sera $\frac{MO \times \overline{MN}^3}{\overline{MO}^6 \times MC} = \frac{\overline{MN}^3}{\overline{MO}^5 \times MC}$; mais MN, MC sont toujours les mêmes à l'égard de tous les points M de la circonférence, donc les forces centripetes sont entr'elles comme $\frac{\overline{MN}^3}{\overline{MO}^5 \times MC}$ est à $\frac{\overline{MN}^3}{\overline{mo}^3 \times MC}$ ou comme $\frac{1}{\overline{MO}^5}$ est à $\frac{1}{\overline{mo}^5}$.

COROLLAIRE II.

414. *Si la courbe est un cercle & que le centre* O *des forces* (Fig. 132.) *soit dans l'aire hors du centre du cercle, les forces centripetes sont entr'elles en raison composée de la raison inverse des quarrés des rayons vecteurs* OM, *&c. & de la raison inverse des cubes des cordes* MA, *c'est-à-dire des rayons vecteurs prolongés jusqu'à la circonférence.*

Du centre des forces O je mene OP perpendiculaire à la tangente RP ; je prolonge le rayon vecteur en A d'où je mene le diametre AB, & du point B la corde BM ; l'angle OPM est droit de même que l'angle AMB par la construction, de plus l'angle AMP du segment est égal à l'angle ABM dont le sommet est à la circonférence, donc les deux triangles rectangles MOP, BAM sont semblables, ainsi AB, AM :: MO, OP, d'où je tire $OP = \frac{AM \times MO}{AB}$ & $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^3}{\overline{AB}^3}$. ; mais par la Proposition présente la force centripete en M est $\frac{MC}{\overline{OP}^3 \times MC}$; mettant donc la valeur de $\overline{OP}^3$, la force centripete sera $\frac{MO \times \overline{AB}^3}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^3 \times MC} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^2 \times MC}$; mais AB & MC sont toujours les mêmes à l'égard de quelque point M que ce soit, donc les forces centripetes sont entr'elles comme $\frac{\overline{AB}^3}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^2 \times MC}$ est à $\frac{\overline{AB}^3}{\overline{am}^3 \times \overline{mo}^2 \times MC}$ ou comme $\frac{1}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^2}$ est à $\frac{1}{\overline{am}^3 \times \overline{mo}^2}$.

LEMME.

415. *Dans toute section conique* (Fig. 133), *dont la droite* TM *est tangente, a droite* MC *perpendiculaire à la courbe, & la droite*

OC *eſt menée du foyer au point d'attouchement, ſi du point* C *on mene* CS *perpendiculaire à* OM,*la partie* MS *que cette perpendiculaire coupe eſt égale à la moitié du parametre.*

Demonſtration pour la Parabole.

Du point M je mene l'ordonnée MQ, & du point O la droite OP perpendiculaire à la tangente; je nomme le parametre a, & l'abſciſſe $AQ=x$, donc par les proprietés de la parabole que nous avons expliquées dans *la Théorie & la Pratique du Geométre*, j'ai $OM=x+\frac{1}{4}a$, $QC=\frac{1}{2}a$, & $QT=2x$, & par conſéquent $TO=TA+AO=x+\frac{1}{4}a=OM$.

Le triangle TOM étant iſoſcelle, & la droite OP perpendiculaire ſur TM, j'ai $TP=PM$; or le triangle rectangle TQM donne $\overline{TM}^2=\overline{TQ}^2+\overline{QM}^2$, donc $\overline{TM}^2=4x^2+ax$, & $\overline{PM}^2=x^2+\frac{1}{4}ax$; de même le triangle rectangle POM donne $\overline{PO}^2=\overline{OM}^2-\overline{PM}^2$, donc $\overline{PO}^2=x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa-x^2-\frac{1}{4}ax=\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}ax$.

Maintenant les droites OP, MC étant perpendiculaires à la tangente, les angles POM, OMC alternes ſont égaux, donc les triangles rectangles OMP, CMS ſont ſemblables, & par conſéquent OM, OP :: MC, MS, & $\overline{OM}^2$, $\overline{OP}^2$ :: $\overline{MC}^2$, $\overline{MS}^2$, mais à cauſe du triangle rectangle MQC, j'ai $\overline{MC}^2=\overline{MQ}^2+\overline{QC}^2=ax+\frac{1}{4}aa$, mettant donc les valeurs analytiques dans $\overline{OM}^2$, $\overline{OP}^2$ :: $\overline{MC}^2$, $\overline{MS}^2$, j'ai $x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}a^2$, $\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}ax$ :: $ax+\frac{1}{4}a^2$, $\overline{MS}^2$, & diviſant la premiere raiſon par $x+\frac{1}{4}a$, j'ai $x+\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{4}a$ :: $ax+\frac{1}{4}a^2$, $\overline{MS}^2$, & diviſant les deux antecedens par $x+\frac{1}{4}a$, j'ai 1, $\frac{1}{4}a$ :: a, $\overline{MS}^2$, d'où je tire $\overline{MS}^2=\frac{1}{4}a^2$, donc $MS=\frac{1}{2}a$.

Demonſtration pour l'Ellipſe.

Je nomme l'axe $AB=b$ (*Fig.* 134), le parametre $=a$, la diſtance $OR=c$, & l'abſciſſe $AQ=x$, donc $QR=AR-AQ=\frac{1}{2}b-x$, & $OQ=OR-QR=c-\frac{1}{2}b+x$, & $AO\times OB=\overline{AR}^2-\overline{OR}^2=\frac{1}{4}b^2-c^2$; or par la proprieté de l'ellipſe le rectangle

tangle AO × OB eſt égal au quarré du demi-petit axe RH, & d'autre part l'on a $\overline{AR}^2$, $\overline{RH}^2$: : AQ × QB , $\overline{QM}^2$; mettant donc les valeurs analytiques , j'ai $\frac{1}{4}b^2$, $\frac{1}{4}b^2 - c^2$: : $bx - xx$, $\overline{QM}^2$, donc $\overline{QM}^2 = bx - xx - \frac{4c^2x}{b} + \frac{4c^2x^2}{bb}$; or $\overline{QO}^2 = c^2 - bc + \frac{1}{4}bb + 2cx - bx + xx$, donc $\overline{OM}^2 = \overline{QO}^2 + \overline{QM}^2 = c^2 - bc + \frac{1}{4}bb + 2cx - bx + xx + bx - xx - \frac{4c^2x}{b} + \frac{4c^2x^2}{bb} = c^2 - bc + \frac{1}{4}bb + 2cx - \frac{4c^2x}{b} + \frac{4c^2x^2}{bb}$.

Maintenant en ſuivant les regles du Calcul Différentiel, nous trouverons que la ſoutangente $TQ = \frac{2bx - 2x^2}{b - 2x}$,& par conſéquent $TA = TQ - AQ = \frac{2bx - 2x^2}{b - xx} - x = \frac{2bx - 2x^2 - bx + 2x^2}{b - 2x} = \frac{bx}{b - 2x} = \frac{\frac{1}{2}bx}{\frac{1}{2}b - x}$; & que la ſouperpendiculaire $QC = \frac{ba - 2ax}{2b} = \frac{\frac{1}{2}ba - ax}{b}$, d'où il ſuit que $TO = TA + AO = TA + AR - OR = \frac{\frac{1}{2}bx}{\frac{1}{2}b - x} + \frac{1}{2}b - c = \frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x}$.

Les triangles rectangles TMQ, MCQ ſont ſemblables, à cauſe que le triangle TMC eſt rectangle, mais les triangles rectangles TMQ, TPO ſont auſſi ſemblables à cauſe de l'angle aigu T qui leur eſt commun, donc MC, CQ : : TO, OP, & par conſéquent $OP = \frac{CQ \times TO}{MC}$; mais les triangles rectangles MOP, MCS ſont auſſi ſemblables, à cauſe de l'angle aigu MOP égal à ſon alterne SMC, donc OM, OP : : MC, MS ou OM, $\frac{CQ \times TO}{MC}$: : MC, MS; donc $MS = \frac{CQ \times TO}{OM}$, & par conſéquent OM, CQ : : TO, MS, donc $\frac{1}{2}b - c + \frac{2cx}{b}$, $\frac{ba - 2ax}{2b}$: : $\frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x}$ MS, & multipliant la premiere raiſon par $2b$, j'ai $bb - 2bc + 4cx$, $ba - 2ax$: : $\frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x}$, MS, & diviſant la premiere raiſon par $b - 2x$, j'ai $\frac{bb,\ 2bc + 4cx}{b - 2x}$, a : : $\frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x}$, MS, mais le premier antecedent eſt double du ſecond antecedent, donc le premier conſéquent a eſt double du ſecond conſéquent MS, donc $MS = \frac{1}{2}a$.

Demonstration pour l'Hyperbole.

Nommant le parametre $= a$, le diametre VA $= b$ (*Fig.* 135), l'abscisse AQ $= x$, la distance RO $= c$, j'ai QR $= \frac{1}{2}b + x$, OQ $=$ QR $-$ RO $= \frac{1}{2}b + x - c$, & VO $\times$ AR $= \overline{RO}^2 - \overline{RA}^2 = c^2 - \frac{1}{4}bb$, mais par la proprieté de l'hyperbole le rectangle VO $\times$ AR est égal au quarré du demi-petit axe RH, & de plus l'on a $\overline{RA}^2, \overline{RH}^2 :: VQ \times QA, \overline{QM}^2$, donc $\frac{1}{4}bb, c^2 - \frac{1}{4}bb :: bx + xx, \overline{QM}^2$, donc $\overline{QM}^2 = -bx - xx + \frac{c^2x}{4b} + \frac{c^2yx}{4bb}$, donc $\overline{OM}^2 = = \overline{QM}^2 + \overline{QO}^2 = -bx - xx + \frac{c^2x}{4b} + \frac{c^2x^2}{4bb} + \frac{1}{4}bb + bx + xx - bc - 2cx + cc = \frac{1}{4}bb - bc + cc - 2cx + \frac{c^2x}{4b} + \frac{c^2x^2}{4bb}$, d'où je tire OM $= c - \frac{1}{2}b + \frac{2cx}{b}$.

Selon les regles du Calcul Différentiel la soutangente TQ $= \frac{2bx + 2x^2}{b + 2x}$, & la souperpendiculaire QC $= \frac{ba + 2ax}{2b}$, donc TA $=$ TQ $-$ AQ $= \frac{2bx + 2x^2}{b + 2x} - x = \frac{2bx + 2x^2 - bx - 2x^2}{2 + 2x} = \frac{bx}{b + 2x}$ & TO $=$ TA $-$ RA $+$ RO $= \frac{bx}{b + 2x} - \frac{1}{2}b + c = b\,\frac{bx - \frac{1}{2}bb + bc - bx + 2cx}{b + 2x} = \frac{2cx + bc - \frac{1}{2}bb}{b + 2x}$.

Maintenant les triangles rectangles QMC, TPO étant semblables, j'ai MC, CQ :: TO, OP, donc OF $= \frac{CQ \times TO}{MC}$; & à cause des triangles semblables POM, CMS, j'ai OM, OP :: MC, MS, ou OM, $\frac{CQ \times TO}{MC}$ :: MC, MS, & par conséquent MS $= \frac{CQ \times TO}{OM}$ :: d'où je tire OM, CQ :: TO, MS, & mettant les valeurs analytiques, j'ai $c - \frac{1}{2}b + \frac{2cx}{b}, \frac{ba + 2ax}{2b} :: \frac{2cx + bc - \frac{1}{2}bb}{b + 2x}$, MS ; & multipliant la premiere raison par $2b$, j'ai $2bc - bb + 4cx, ba + 2ax :: \frac{2cx + bc - \frac{1}{2}bb}{b + 2x}$, MS, & divisant la premiere raison par $b + 2x$, j'ai $\frac{2bc - bb + 4cx}{b + 2x}, a :: \frac{bc - \frac{1}{2}bb + 2cx}{b + 2x}$, MS; mais le premier antecedent est double du second, donc a est double de MS, & par conséquent MS $= \frac{1}{2}a$.

COROLLAIRE III.

416. *Dans toute section conique* (Fig. 133, 134, 135.) *si le centre O des forces est le foyer, les forces centripetes sont entr'elles en raison reciproque des quarrés des rayons vecteurs.*

Les triangles semblables MOP, MCS donnent MO, OP :: MC, MS, donc $OP = \frac{MO \times MS}{MC}$; or par le Lemme précédent $MS = \frac{1}{2}a$; donc $OP = \frac{MO \times \frac{1}{2}a}{MC}$, & $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{MO}^3 \times \frac{1}{8}a^3}{\overline{MC}^3}$; mais par la Proposition précédente la force centripete en M est $\frac{MO}{\overline{PO}^3 \times MC}$; mettant donc la valeur de $\overline{PO}^3$ la force centripete sera $\frac{MO \times \overline{MC}^3}{MC \times \overline{MO}^3 \times \frac{1}{8}a^3}$ $= \frac{8MO \times \overline{MC}^3}{MC \times \overline{MO}^3 \times a^3} = \frac{4\overline{MC}^3 \times 2MO}{a^2 \times a \times MC \times \overline{MO}^2}$; or selon ce que nous avons enseigné dans le *Calcul Différentiel & Integral*, le rayon MC de la developpée est $\frac{4\overline{MC}^3}{a^2}$; mettant donc cette valeur de MC dans le dénominateur de l'expression de la force centripete que nous venons de trouver, cette force sera $\frac{4\overline{MC}^3 \times 2MO \times a^2}{a^3 \times 4\overline{MC}^3 \times \overline{MO}^2} = \frac{2}{a \times \overline{MO}^2}$; donc les forces centripetes sont comme $\frac{2}{a \times \overline{MO}^2}$, est à $\frac{2}{a \times \overline{mo}^2}$; or la raison $\frac{2}{a}$ est toujours la même, donc les forces centripetes sont comme $\frac{1}{\overline{MO}^2}$ est à $\frac{1}{\overline{mo}^2}$, & par conséquent reciproquement comme $\overline{mo}^2$ est à $\overline{MO}^2$ ou reciproquement comme les quarrés des rayons vecteurs.

LEMME.

417. *Trouver les équations des trois sections coniques en prenant le foyer pour l'origine des abscisses.*

Solution pour la Parabole.

Soit la parabole AM (*Fig.* 136), dont le foyer est O, je nomme le parametre $= a$, l'abscisse $OP = x$, & l'ordonnée PM

$=y$; par la proprieté de la parabole j'ai AO$=\frac{1}{4}a$; donc AP $=\frac{1}{4}a+x$; or par la nature de la même courbe j'ai $y^2=\text{AP}\times a$, donc j'ai $y^2=\frac{1}{4}a^2+ax$ qui eſt l'équation demandée.

Solution pour l'Ellipſe.

Soit l'Ellipſe ACB (*Fig.* 137.) dont l'un des foyers eſt O; je nomme AB$=b$, 2TC$=d$, & le parametre$=a$, ce qui donne AT$=\frac{1}{2}b$ & TC$=\frac{1}{2}$D; je nomme auſſi l'abſciſſe OP$=x$, & l'ordonnée PM$=y$, par la proprieté de l'éllipſe j'ai AB, 2CT :: 2CT, a, donc AT, TC :: TC, $\frac{1}{2}a$, ou :: $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}a$; donc $\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}cc$.

Je mene la droite OC, laquelle par la nature de l'ellipſe eſt égale à AT$=\frac{1}{2}b$; or le triangle rectangle OCT donne $\overline{\text{OT}}^2=\overline{\text{OC}}^2-\overline{\text{TC}}^2$, donc $\overline{\text{OT}}^2=\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}cc=\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab$, mais AO $=\text{AT}-\text{OT}=\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab}$, & AP$=AT-OT-$OP $=\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab}-x$, & PB$=TB+OT+OP=\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab}+x$, d'où il ſuit que $\text{AP}\times\text{PB}=\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab-2x\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab}-xx=\frac{1}{4}ab-2x\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab}-x^2$.

Or par la proprieté de l'ellipſe, j'ai $\overline{\text{PM}}^2$, AP$\times$PB :: a, b; donc y^2, $\frac{1}{4}ab-2x\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab}-x^2$ :: a, b, d'où je tire $y^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}ab}}{b}-\frac{ax^2}{b}$ & c'eſt l'équation demandée.

Solution pour l'Hyperbole.

Soit l'hyperbole AM dont l'un des foyers eſt O (*Fig.* 138), le premier axe eſt BA, & le ſecond 2TC, je nomme le parametre $=a$, l'axe BA$=b$, l'axe 2TC$=d$, l'abſciſſe OP$=x$, & l'ordonnée PM$=y$; par la formation de l'hyperbole, j'ai :: b, d, a, donc :: $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}a$, & par conſéquent $\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}dd$.

Par la même formation j'ai le rectangle BO$\times$OA$=\overline{\text{TC}}^2=\frac{1}{4}ab$; or par la proprieté de l'hyperbole, j'ai $\overline{\text{HO}}^2$, BO$\times$OA :: $\overline{\text{TC}}^2$, $\overline{\text{TA}}^2$, donc $\overline{\text{HO}}^2$, $\frac{1}{4}ab$ :: $\frac{1}{4}ab$, $\frac{1}{4}bb$, d'où je tire $\overline{\text{HO}}^2=\frac{a^2bb}{4bb}=\frac{1}{4}a^2$; or ſi je nomme AO$=z$, j'ai BO$\times$OA$=bz+zz$, & par conſéquent puiſque j'ai $\overline{\text{HO}}^2$, BO$\times$OA :: $\overline{\text{TC}}^2$, $\overline{\text{TA}}^2$ :: a, b, j'ai auſſi $\frac{1}{4}a^2$, $bz+zz$ :: a, b, donc $\frac{1}{4}a^2b=abz+azz$, ou $\frac{1}{4}ab=bz$

$+zz$; & ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}bb$, j'ai $zz+bz+\frac{1}{4}bb=\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab$, tirant donc la racine quarrée, j'ai $z+\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}$ & $z=\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}-\frac{1}{2}b=AO$, donc $AP=AO+OP=\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}-\frac{1}{2}b+x$, & $BP=BA+AO+OP=\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}+\frac{1}{2}b+x$, d'où je tire $BP\times AP=\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab-\frac{1}{4}bb+2x\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}+xx=\frac{1}{4}ab+2x\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}+x^2$; or par la proprieté de l'hyperbole j'ai $\overline{MP}^2$, $BP\times PA::a, b$, donc y^2, $\frac{1}{4}ab+2x\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}+x^2::a, b$, d'où je tire $y^2=\frac{1}{4}aa+\frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}ab}}{b}+\frac{ax^2}{b}$, & c'est l'équation demandée.

PROPOSITION CXL.

418. *Connoître la courbe qu'un corps parcourt avec des forces centrifuges qui suivent telle loi que l'on voudra d'acceleration ou de retardement.*

Soit la courbe AC (*Fig.* 139.) parcourue par le corps A, son axe AO, d'un point quelconque B de la courbe soit décrit l'arc BP dont le centre est en O; du même centre & avec le rayon OA soit décrit l'arc LA, enfin soit mené un autre rayon vecteur infiniment proche Ob, & du point b soit décrit un autre arc bp qui sera infiniment proche de BP, il est visible que si l'on prolonge les rayons vecteurs jusqu'à l'arc AL, les secteurs LlO, bNO seront semblables, de même que les secteurs LOA, BOP.

Je nomme $AO=b$, $OP=x$, & $AL=z$; donc $Pp=dx$ & $Ll=dz$; or à cause des secteurs semblables LOl, NOb, j'ai lO, Ll :: NO, Nb, donc b, dz :: x, $\frac{xdz}{b}=bN$.

Je nomme u la vitesse du corps au point B, & f la force centripete au même point, laquelle est la même chose que la sollicitation au mouvement; donc en suivant le raisonnement de la Proposition 28 (*N.* 84.) nous aurons $\frac{1}{2}mu^2=\int\!\!\int dx$, ou comme la masse est toujours la même, nous aurons $\frac{1}{2}u^2=\int\!\!\int dx$, c'est-à-dire les moitiés des quarrés des vitesses dans les différens endroits de la courbe, seront entr'eux comme les $\int\!\!\int dx$ correspondans; or comme les forces centripetes peuvent aller ou en diminuant ou en augmentant, & par conséquent les vitesses aussi, il s'ensuit que les différences des vitesses seront négatives si ces vitesses vont en diminuant, & par conséquent nous aurons $-udu=fdx$ &

$-\frac{1}{2}u^2 = \int f dx$, ou $-u^2 = \int f dx$; car la fraction $\frac{1}{2}$ ne fait rien, à cause que ne s'agissant que des rapports, il est visible que les quarrés des vitesses sont en même raison que leurs moitiés; supposant donc que les vitesses aillent en diminuant, nous avons, comme on vient de voir, $-u^2 = \int f dx$, ou $u^2 = -\int f dx$, mais comme $-\int f dx$ étant un quarré négatif seroit une valeur imaginaire de u^2, ce qui ne sçauroit être, parce que u^2 est une valeur réelle, il s'ensuit que l'integrale $-\int f dx$ n'est pas complette, & qu'il faut lui ajoûter une quantité constante selon les loix du Calcul Integral; & comme cette grandeur peut ici être prise à discretion, parce que nous n'avons rien qui la détermine, nous ajoûterons le plan cb afin de rendre tous les termes homogenes ou d'un même nombre de dimensions, ainsi nous aurons $u^2 = cb - \int f dx$, & $u = \sqrt{cb - \int f dx}$.

Le mouvement du corps A le long de l'arc infiniment petit Bb pouvant être regardé comme uniforme, l'espace Bb sera udt (*N.* 17), & mettant la valeur de u nous aurons $Bb = dt\sqrt{cb - \int f dx}$, mais les tems étant proportionnels aux aires décrites par le rayon vecteur pendant ces tems (*N.* 406), nous aurons $dt = BO \times bN$; or $BO = x$, & $bN = \frac{xdz}{b}$; donc $dt = \frac{x^2 dz}{b}$, & mettant cette valeur de dt dans celle de Bb, nous aurons $\overline{Bb}^2 = \frac{x^2 dz\sqrt{cb - \int f dx}}{b}$, donc $\overline{Bb}^2 = \frac{x^4 dz^2 \times \overline{cb - \int f dx}}{b^2}$.

Or $\overline{BN}^2 = dx^2$, & $\overline{bN}^2 = \frac{x^2 dz^2}{b^2}$, donc à cause du triangle rectangle bBN qui donne $\overline{bB}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{bN}^2$, nous avons $bB = dx^2 + \frac{x^2 dz^2}{b^2} = \frac{b^2 dx^2 + x^2 dz^2}{b^2}$. Comparant donc ensemble les deux valeurs de $\overline{bB}^2$, nous aurons

$$\frac{b^2 dx^2 + x^2 dz^2}{b^2} = \frac{x^4 dz^2 \times \overline{cb - \int f dx}}{b^2}$$

Et multipliant d'abord par b^2, puis prenant une quantité e, en sorte que $b^2 e^2$ soit égal à 1, & multipliant le premier membre par $b^2 e^2$, ce qui ne gâtera rien, & rendra cependant tous les termes homogenes, nous aurons

$$b^4e^2dx^2 + x^2b^2e^2dz^2 = x^4dz^2 \times \overline{cb - \int fdx}$$

$$\text{ou } b^4e^2dx^2 = x^4dz^2 \times \overline{cb - \int fdx} - b^2e^2x^2dz^2.$$

d'où je tire $dz^2 = \frac{b^4e^2dx^2}{x^4 \times \overline{cb - \int fdx} - b^2e^2x^2}$

$$\& \quad dz = \frac{b^2edx}{\sqrt{cbx^4 - x^4\int fdx - b^2e^2x^2}}$$

$$\text{donc } z = \int \frac{b^2edx}{\sqrt{cbx^4 - x^4\int fdx - b^2e^2x^2}}$$

Et c'eſt l'équation generale de la courbe quelque loi d'acceleration ou de mouvement qu'on veuille ſuppoſer pour le déterminer aux cas particuliers, il n'y a qu'à mettre au lieu de f l'expreſſion particuliere de chaque cas ſelon la loi donnée.

Suppoſons, par exemple, que les forces centripetes ſoient entr'elles réciproquement comme les quarrez des rayons vecteurs, nous aurons $f = \frac{1}{x^2}$, & prenant une grandeur g telle que nous ayons $b^2g = 1$, nous aurons $f = \frac{b^2g}{x^2}$, ce que nous faiſons pour rendre les termes toujours homogenes. Mettant donc cette valeur de f dans l'équation nous aurons

$$dz = \frac{b^2edx}{\sqrt{cbx^4 - x^4\int\frac{b^2gdx}{x^2} - b^2e^2x^2}}.$$

Or $\int\frac{b^2gdx}{x^2} = \int b^2gx^{-2}dx = -b^2gx^{-1}$, mettant donc cette valeur, & tirant x^2 hors du ſigne, nous aurons

$$dz = \frac{b^2edx}{x\sqrt{cbx^2 + b^2gx - b^2e^2}}$$

Et c'eſt l'expreſſion de l'Element de l'arc AL; or comme cette expreſſion n'eſt point ſous une forme qui nous faſſe connoître ni le rayon ni le ſinus de cet arc, il faut pour le réduire à une forme plus commode, avoir recours à des indéterminées en cette ſorte.

Prenons l'indéterminée y, & faiſons $x = \frac{b^2}{y}$, donc $dx = -\frac{b^2dy}{y^2}$, & $x^2 = \frac{b^4}{y^2}$, mettant donc ces valeurs dans celle de dz, nous aurons

$$dz = -\frac{b^4 e dy}{y b^2 \sqrt{\frac{c b^5}{y^2} + \frac{b^4 g}{y} - b^2 e^2}}$$

Et faisant passer y sous le signe, & retirant b^2 hors du signe; nous aurons

$$dz = -\frac{b^4 e dy}{b^3 \sqrt{c b^3 + b^2 g y - e^2 y^2}} = -\frac{b e dy}{\sqrt{c b^3 + b^2 g y - e^2 y^2}}$$

Cette expression de l'élement dz ayant encore le même défaut que la précédente, supposons $y = \frac{b^2 g}{2e^2} - t$, la lettre t est encore une indéterminée; donc $dy = -dt$, & $y^2 = \frac{b^4 g^2}{4e^4} - \frac{b^2 g t}{e^2} + tt$; & mettant ces valeurs dans celle de dz, nous aurons

$$dz = \frac{b e dt}{\sqrt{c b^3 + \frac{b^4 g^2}{4e^2} - e^2 tt}}$$

Enfin cette expression de dz ayant encore les mêmes défauts que les précédentes, je prens l'indéterminée r, & je fais $cb^3 + \frac{b^4 g^2}{4e^2} = e^2 r^2$, & mettant cette valeur dans celle de dz,

j'ai $$dz = \frac{b e dt}{\sqrt{e^2 r^2 - e^2 tt}} = \frac{b e dt}{e\sqrt{r^2 - tt}} = \frac{b dt}{\sqrt{r^2 - tt}},$$

d'où je tire $\frac{dz}{b} = \frac{dt}{\sqrt{r^2 - tt}} = \frac{r dt}{r\sqrt{r^2 - tt}}$.

Or $\frac{r dt}{r\sqrt{r^2 - tt}}$ est l'élement d'un arc de cercle dont le rayon est r, & le sinus $= t$, lequel élement est divisé par r; car si nous nommons $2r$ le diametre AB (*Fig.* 140.), x l'abscisse BP, & t l'ordonnée PM, ce qui donne $Pp = dx$, & $Rm = dt$, la proprieté du cercle nous donnera $2rx - xx = tt$, donc $2rdx - 2xdx = 2tdt$, ou $rdx - xdx = tdt$, d'où je tire $dx = \frac{tdt}{r - x}$, & $dx^2 = \frac{t^2 dt^2}{r^2 - 2rx + xx}$, ou $\frac{t^2 dt^2}{r^2 - t^2}$; donc $dx^2 + dt^2 = \frac{t^2 dt^2}{r^2 - t^2} + dt^2 = \frac{t^2 dt^2 + r^2 dt^2 - t^2 dt^2}{r^2 - t^2} = \frac{r^2 dt^2}{r^2 - t^2}$, & par conséquent $\sqrt{dx^2 + dt^2} = \frac{r dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}$; or $\sqrt{dx^2 + dt^2}$ est l'élement Mm de l'arc de cercle MB, donc $\frac{r dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}$ est l'élement du même arc; & $\frac{r dt}{r\sqrt{r^2 - t^2}}$ est le même élement divisé par le rayon.

Or

Or $\frac{dz}{b}$ eſt l'élement L*l* (*Fig.* 39.) diviſé par le rayon OA, & comme l'arc & le rayon étant connus, l'expreſſion $\frac{dz}{b}$ peut exprimer l'angle LO*l*, & $\int\frac{dz}{b}$ l'angle LOA ; mais $\frac{dz}{b} = \frac{rdt}{r\sqrt{r^2 - t^2}}$, donc $\frac{rdt}{r\sqrt{r^2 - t^2}}$ exprime un angle égal à l'angle LO*l*, & $\int\frac{rdt}{r\sqrt{r^2 - t^2}}$ exprime un angle égal à LOA.

Pour conſtruire donc la courbe, il faut prendre un rayon à volonté OT $= r$, & décrire un arc TV $= \frac{rdt}{\sqrt{r^2 - t^2}}$, d'où menant l'ordonnée VZ, on aura VZ $= t$, & pour trouver l'abſciſſe x correſpondante, voici comme on fera.

Nous avons $y = \frac{b^2g}{2e^2} - t = \frac{b^2g - 2e^2t}{2e^2}$, de plus nous avons $x = \frac{b^2}{y}$, donc $x = \frac{2b^2e^2}{b^2g - 2e^2t} = \frac{2e^2}{g - \frac{2e^2t}{b^2}}$, d'où l'on tire les analogies ſuivantes,

$$b,\ e :: \frac{2e^2}{b}\ ;\ b,\ \frac{2e^2}{b} :: t,\ \frac{2e^2t}{b^2}$$

Et enfin $g - \frac{2e^2t}{b^2},\ e :: 2e,\ \frac{2e^2}{g - \frac{2e^2t}{b^2}}$, & le rayon OP $= x$ étant trouvé par ce moyen, on décrira l'arc BP, & le point B où il coupera le rayon OV prolongé ſera un point de la courbe cherchée.

Ce qui embarraſſe ici, c'eſt de déterminer les indéterminées ; cependant dès qu'on peut prendre telle rayon r que l'on veut, t ſe trouve déterminé, b eſt connu, & par conſéquent l'on connoît e, puiſqu'on a $bbee = 1$, & g eſt auſſi connu, puiſque nous avons fait $b^2g = 1$, ce qui donne $g = \frac{1}{b^2}$; ainſi la conſtruction peut ſe faire aiſément comme il vient d'être enſeigné.

Pour trouver l'équation de cette courbe qui marque le rapport des ordonnées aux abſciſſes dont l'origine ſoit en O, & pour ſçavoir en même tems à laquelle des trois ſections coniques cette courbe appartient, car il eſt ſûr par la ſuppoſition que nous avons faite, & le Corollaire III. de la Propoſition 138. (*N.* 416.) que cette courbe eſt une des trois ſections, on agira ainſi.

Comme nous avons fait $y = \frac{b^2g}{2e^2} - t$, prenons une droite OM

$= \frac{b^2 g}{2e^2}$ (*Fig.* 141.), & ſur cette droite une partie $OP = t$, donc $PM = OM - QP = \frac{b^2 g}{2e^2} - t = y$, du centre O, & d'un rayon $= r$ décrivons le demi-cercle TVK, du point P élevons la perpendiculaire PV, & de O par le point V menons OB que nous ferons égal à $x = \frac{b^2}{y}$; enfin décrivant l'arc de cercle CBA, concevons que la courbe aye ſon ſommet ſur la droite O*a*, ce qui ne change rien, pourvû que la diſtance O*a* ſoit égale à la diſtance OA de la figure 130. & qu'on faſſe l'angle BOM (*Fig.* 141.) égal à l'angle AOL (*Fig.* 139.).

Cela fait comme les lettres x, y, t, que nous avons employées juſqu'ici, ne paroîtront plus dans le calcul ; je nomme t la droite OP, x, la droite B*b*, ou OF, & y la droite O*b* ou FB, ſans leur donner pour cela les valeurs que ces lettres avoient auparavant, les triangles ſemblables OPV, OFB, donnent OP, OV :: OF, OB, donc $t, r :: x, \frac{rx}{t} = OB$, mais nous avons trouvé ci-deſſus $OB = \frac{2b^2e^2}{b^2 g - 2e^2 t}$; car OB alors étoit la lettre x laquelle avoit cette valeur. Comparant donc enſemble les deux valeurs de OB nous aurons l'équation qu'on voit ici.

$$\frac{rx}{t} = \frac{2b^2e^2}{b^2g - 2e^2t}$$

$$b^2grx - 2e^2rxt = 2b^2e^2t$$

$$b^2grx = 2b^2e^2t + 2e^2rxt$$

$$t = \frac{b^2grx}{2b^2e^2 + 2e^2rx}$$

Et réduiſant tout à un dénominateur commun que je neglige, puis donnant de part & d'autre $2e^2rxt$, enfin diviſant par les grandeurs qui multiplient t, je trouve $t = \frac{b^2grx}{2b^2e^2 + 2e^2rx}$.

$$ty = x\sqrt{r^2 - t^2}$$

$$t^2y^2 = x^2r^2 - x^2t^2$$

$$t^2y^2 + x^2t^2 = x^2r^2$$

$$t^2 = \frac{x^2r^2}{y^2 + x^2}$$

Or les mêmes triangles ſemblables OPV, OFB, donent OP, PV :: OF, FB ; donc $t, \sqrt{r^2 - t^2} :: x, y$, donc $ty = x\sqrt{r^2 - t^2}$, & élevant tout au quarré, puis tranſpoſant à l'ordinaire, je trouve $t^2 = \frac{x^2r^2}{y^2 + x^2}$.

$$\frac{x^2r^2}{y^2 + x^2} = \frac{b^4g^2r^2x^2}{4b^4e^4 + 8b^2e^4rx + 4e^4r^2x^2}$$

$$\frac{1}{y^2 + x^2} = \frac{b^4g^2}{4b^4e^4 + 8b^2e^4rx + 4e^4r^2x^2}$$

$$4b^4e^4 + 8b^2e^4rx + 4e^4r^2x^2 = b^4g^2y^2 + b^4g^2x^2$$

$$y^2 = \frac{4e^4}{g^2} + \frac{8e^4rx}{b^2g^2} + \frac{4e^4r^2x^2}{b^4g^2} - x^2$$

Et élevant au quarré la valeur de t que nous avons trouvé auparavant, & comparant ces deux

valeurs, puis divisant par x^2r^2, ensuite réduisant tout au même dénominateur que je neglige ; enfin transposant à l'ordinaire, j'ai une équation de la courbe qui exprime le rapport des ordonnées aux abscisses.

Maintenant pour voir à quelle section conique cette courbe apartient, il n'y a qu'à comparer ses termes avec ceux des équations des sections coniques que nous avons trouvées dans le Lemme précédent ; ainsi l'équation à la parabole étant $y^2 = \frac{1}{4}aa + ax$, je vois qu'il n'y a point de termes ou x soit au second dégré, c'est pourquoi les termes de la courbe $\frac{4e^4r^2x^2}{b^4g^2} - x^2 = o$; donc $\frac{4e^4r^2}{b^4g^2} - 1 = o$, d'où je tire $4e^4r^2 = b^4g^2$, & $r^2 = \frac{b^4g^2}{4e^4}$, donc $r = \frac{b^2g}{2e^2}$, mais par la construction que nous venons de faire, nous avons $OM = \frac{b^2g}{2e^2}$, & OK, ou $OV = r = \frac{b^2g}{2e^2}$; donc quand la courbe est une parabole, on a $OM = OK$.

Or dans le calcul que nous avons fait pour la courbe, nous avons trouvé $r = \sqrt{\frac{cb^3}{e^2} + \frac{b^4g^2}{4e^4}}$, donc $\frac{cb^3}{e^2} = o$, & par conséquent $c = o$.

La comparaison des termes ax, $\frac{8e^4rx}{b^2g^2}$, où x se trouve au premier dégré, donne $a = \frac{8e^4r}{b^2g^2}$, & mettant la valeur de r, j'ai $a = \frac{8e^4b^2g}{2e^2b^2g^2} = \frac{4e^2}{g}$.

De même, la comparaison des termes tous connus $\frac{1}{4}aa$, $\frac{4e^4}{g^2}$, donne $aa = \frac{16e^4}{g^2}$, & $a = \frac{4e^2}{g}$ de même qu'auparavant.

L'équation à l'ellipse est $y^2 = \frac{1}{4}ax - \frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab}}{b} - \frac{xxa}{b}$, mais pour ne pas nous tromper sur la lettre b qui se trouve aussi dans l'équation de la courbe, nous mettrons à sa place la lettre n, ce qui donne $y^2 = \frac{1}{4}ax - \frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{1}{4}an}}{n} - \frac{xxa}{n}$.

La comparaison des termes connus $\frac{1}{4}aa$, $\frac{4e^4}{g^2}$ donne $a^2 = \frac{16e^4}{g^2}$, donc $a = \frac{4e^2}{g}$ de même que dans la parabole, ainsi le parametre est le même.

La comparaison des termes ou x^2 se trouve donne $-\frac{a}{n}$

$=\frac{4e^4r^2}{b^4g^2}-1$, ou $1-\frac{a}{n}=\frac{4e^4r^2}{b^4g^2}$, & mettant la valeur de a, j'ai $1-\frac{4e^2}{gn}=\frac{4e^4r^2}{b^4g^2}$, & multipliant tout par b^4g^2, j'ai $b^4g^2-\frac{4b^4e^2g}{n}=4e^4r^2$, d'où je tire $r^2=\frac{b^4g^2}{4e^4}-\frac{b^4g}{e^2n}$ & $r=\sqrt{\frac{b^4g^2}{4e^4}-\frac{b^4g}{e^2n}}$, donc r est moindre que $\frac{b^2g}{2e^2}$, ainsi dans l'ellipse CK est moindre que CM, & quand cela arrive, l'équation de la courbe est une ellipse.

L'équation à l'hyperbole en mettant n au lieu de b, est $y^2=\frac{1}{4}aa+\frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}nn+\frac{1}{4}an}}{n}+\frac{aax}{n}$; or la comparaison des termes entierement connus donne $\frac{1}{4}aa=\frac{4e^4}{g^2}$ ou $a^2=\frac{16e^4}{g^2}$; & $a=\frac{4e^2}{g}$, de même que dans l'ellipse & la parabole.

La comparaison des termes où se trouve x^2 donne $\frac{a}{n}=\frac{4e^4r^2}{b^4g^2}-1$, ou $1+\frac{a}{n}=\frac{4e^4r^2}{b^4g^2}$, & multipliant tout par b^4g^2, on a $b^4g^2+\frac{ab^4g^2}{n}=4e^4r^2$, & mettant la valeur de a on a $b^4g^2+\frac{4e^2b^4g}{n}=4e^4r^2$, d'où je tire $r^2=\frac{b^4g^2}{4e^4}+\frac{b^4g}{e^2n}$, & $r=\sqrt{\frac{b^4g^2}{4e^4}+\frac{b^4g}{e^2n}}$, donc r est plus grand que $\frac{b^2g}{2e^2}$, c'est-à-dire, CK est plus grand que CM, & quand cela arrive la courbe est une hyperbole.

Pour trouver dans l'ellipse la valeur de n, la comparaison des termes où x se trouve, donne $-\frac{2a}{n}\sqrt{\frac{1}{4}nn-\frac{1}{4}an}=\frac{8e^4r}{b^2g^2}$, & mettant la valeur de a, on aura $-\frac{8e^2}{gn}\sqrt{\frac{1}{4}nn-\frac{1}{4}an}=\frac{8e^4r}{b^2g^2}$, & mettant aussi cette valeur dans la racine, on aura $-\frac{8e^2}{gn}\sqrt{\frac{1}{4}nn-\frac{e^2n}{g}}=\frac{8e^4r}{b^2g^2}$, & multipliant tout par gn, on aura $-8e^2\sqrt{\frac{1}{4}nn-\frac{e^2n}{g}}=\frac{8e^4nr}{b^2g}$, & divisant tout par $8e^2$, on aura $-\sqrt{\frac{1}{4}nn-\frac{e^2n}{g}}=\frac{e^2nr}{b^2g}$, & élevant tout au quarré on aura $\frac{1}{4}nn-\frac{e^2n}{g}=\frac{n^2r^2e^4}{b^4g^2}$, & divisant tout par n, on aura $\frac{1}{4}n-\frac{e^2}{g}=\frac{nr^2e^4}{b^4g^2}$, & mettant la valeur de r^2, on aura $\frac{1}{4}n-\frac{e^2}{g}=\frac{n}{4}-\frac{e^2}{g}$, ce qui fait voir qu'on

ne sçauroit déterminer ni r ni n de cette façon.

Pour le déterminer donc il faut comparer la valeur $r^2 = \frac{b^4g^2}{4e^4} - \frac{b^4g}{e^2n}$ avec sa valeur $r^2 = \frac{cb^3}{e^2} + \frac{b^4g^2}{4e^4}$, ce qui donne $\frac{b^4g^2}{4e^4} - \frac{b^4g}{e^2n} = \frac{cb^3}{e^2} + \frac{b^4g^2}{4e^4}$, & multipliant tout par $4e^4$, on aura $b^4g^2 - \frac{4b^4e^2g}{n} = 4cb^3e^2 + b^4g^2$, ou $-\frac{4b^4e^2g}{n} = 4cb^3e^2$, ou $-\frac{bg}{n} - c$, ou $cn = -bg$, ou enfin $n = -\frac{bg}{c}$, ce qui fait voir que la quantité c n'est pas zero lorsque la courbe est une ellipse, & que si $b = g$, c doit être différente de b, car si elle étoit égale à b, on auroit $n = -\frac{bg}{c} = -\frac{bb}{b} = -b$, c'est-à-dire l'axe égal à la distance du foyer au sommet, ce qui est impossible; pour l'hyperbole on aura $n = \frac{bg}{c}$.

Pour déterminer les grandeurs r, g, c, e, & avoir leurs valeurs en a, b, n, qui sont des grandeurs connues en supposant que l'on ait trois sections décrites avec un même parametre a, ce qui servira à décrire la courbe proposée plus aisément, commençons par la parabole.

Nous avons d'abord trouvé $a = \frac{4e^2}{g}$ donc $g = \frac{4e^2}{a}$; or e est une grandeur arbitraire; ainsi l'ayant déterminée, on trouvera g en faisant $a, 2e :: 2e, \frac{4e^2}{a} = g$, nous avons aussi trouvé $r = \frac{b^2g}{2e^2}$, ainsi mettant la valeur de g, nous aurons $r = \frac{4b^2}{2a}$, ce qui donne $2a, 2b :: 2b, \frac{4b^2}{2a} = r$; quant à c par rapport à la parabole nous avons trouvé $c = 0$, & pour ce qui est de t, il seroit inutile de le chercher, parce que c'est une grandeur variante de même que x & y.

Pour construire donc la courbe la grandeur b étant donnée, c'est-à-dire la droite OA (*Fig.* 139); comme nous sçavons que le point O doit être le foyer, il n'y a qu'à supposer que le parametre a de la parabole que vous aurez décrit auparavant soit égal à $4b$, & dès-lors $r = \frac{4b^2}{8b} = \frac{1}{2}b$, ainsi vous n'avez qu'à décrire du point O pris pour centre un arc de cercle avec le rayon r, & achever le reste comme ci-dessus; mais cela n'est pas nécessaire, car il n'y a qu'à construire la parabole avec un parametre quadruple de b, & l'on aura la courbe cherchée.

Pour l'ellipſe, nous avons de même que pour la parabole $g = \frac{4e^2}{a}$, ainſi on le déterminera de la même façon ; or $g^2 = \frac{16e^4}{a^2}$, ainſi ayant trouvé $r^2 = \frac{b^4g^2}{4e^4} - \frac{b^4g}{ne^2}$, mettant la valeur de g^2 & de g, nous aurons $r^2 = \frac{16b^4}{4a^2} - \frac{4b^2}{na} = \frac{4nb^4 - 4ab^4}{na^2}$, donc $r = \frac{2b^2}{a} \sqrt{1 - \frac{a}{n}}$.

Pour conſtruire donc la courbe demandée, il n'y a qu'à ſuppoſer que dans l'ellipſe déja conſtruite, la diſtance du foyer au ſommet eſt égale à $b = OA$, & décrire avec un rayon $= r$ un cercle, & achever le reſte ; mais cela n'eſt pas néceſſaire, car il n'y a qu'à décrire l'ellipſe avec le parametre, & l'axe de l'ellipſe trouvés par la comparaiſon des équations.

Et la même choſe ſe fera pour l'hyperbole.

REMARQUE.

419. A proprement parler la force centripete des corps projettés n'eſt autre choſe que leur peſanteur, qui dans des tems infiniment petits & égaux leur donne des viteſſes vers un centre qui ſont accelerées ou retardées ſelon une loi quelconque; par exemple, ſi un corps projetté dans un milieu non reſiſtant décrit une courbe, enſorte que dans des tems égaux ſes viteſſes vers un centre ſoient entr'elles reciproquement comme les quarrés des diſtances du corps à ce centre, la force qui lui donne ces viteſſes eſt ſa force centripete laquelle ne différe point de ſa peſanteur, puiſque ce mouvement vers le centre n'étant point communiqué au corps par le mouvement de projection, lequel de lui-même va toujours en ligne droite, on ne peut l'attribuer qu'à la peſanteur ou gravité du corps ; il y a cependant certains Problêmes qu'on peut reſoudre en y appliquant les principes que nous avons appliqués dans ce Chapitre, quoique la peſanteur dans les cas de ces Problêmes ne ſoit pas la même que la force centripete, & c'eſt ce que nous allons voir.

PROPOSITION CXLI.

420. *Trouver quelle eſt la courbe le long de laquelle un corps mû d'un mouvement acceleré doit deſcendre, enſorte qu'il la preſſe toujours avec une force égale à ſa peſanteur abſolue.*

SOLUTION.

Soit AH l'axe de la courbe (*Fig.* 143), AB la hauteur d'où le corps étant defcendu auroit acquis une viteffe égale à celle avec laquelle il commence à fe mouvoir le long de la courbe BMK; je mene l'ordonnée PM, l'infiniment proche *pm*, & le rayon CM de la developpée, lequel eft perpendiculaire à la courbe BMK; Je prolonge PM en N, & fuppofant que MN exprime la pefanteur abfolue de ce corps; je mene du point N fur CN prolongé la perpendiculaire NO, & par conféquent la droite MO exprime la partie de la pefanteur abfolue du corps que la courbe foutient, car achevant le parallelogramme MONV, la pefanteur abfolue MN équivaut aux deux forces MO, MV; mais la courbe ne s'oppofe point à la force MV, & au contraire elle s'oppofe à la force MO & la détruit, donc MO exprime la partie de la pefanteur que la courbe foûtient.

Or fuppofant qu'à chaque inftant il y ait un fil CM que le corps tient tendu, ce fil n'eft pas feulement preffé par la partie MO de la pefanteur, mais encore par la force centrifuge le long de l'arc de cercle infiniment petit M*m* que ce fil décrit; confidérant donc le mouvement le long de l'arc infiniment petit M*m* comme uniforme, la viteffe en M fera égale à la viteffe que le corps auroit acquife en defcendant le long de PM (*N.* 197); ainfi la force centrale le long du petit arc de cercle M*m* eft à la pefanteur abfolue du corps, comme le double de la hauteur PM eft au rayon CM (*N.* 395); nommant donc la force centrale V, nous aurons V, MN :: 2PM, CM, & par conféquent $V = \frac{MN \times 2PM}{CM}$, donc la partie de la pefanteur que le fil fupporte le long du petit arc de cercle M*m* eft $\frac{MN \times 2PM}{CM} + MO$; mais la partie de la pefanteur que le fil foûtient eft la même chofe que la force dont le corps preffe le petit arc M*m*, & par la fuppofition cette force doit être égale à la pefanteur abfolue MN, donc $MN = \frac{MN \times 2PM}{CM} + MO$.

Je nomme $MN = a$, parce que c'eft une grandeur conftante $AP = x$, $PM = y$, l'arc $BM = u$, $Pp = MR = dx$, $Rm = dy$, $Mm = du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; l'angle PMR eft droit, de même que l'angle CM*m*, ôtant donc de part & d'autre l'angle commun CMR, il refte l'angle aigu RM*m* égal à l'angle aigu CMP;

donc les triangles rectangles MRm, PMC sont semblables, & par conséquent CM, MP :: Mm, MR, ou CM, y :: du, dx, d'où je tire CM $= \frac{ydu}{dx}$; or CM pendant le mouvement de l'arc Mm est constant, donc sa différence est nulle; de plus comme on suppose que dans tous les petits arcs Mm de la courbe le corps presse également la courbe, tous ces petits arcs doivent être pris égaux, & par conséquent du est une grandeur constante; prenant donc la différence de CM $= \frac{ydu}{dx}$, en supposant du constante nous aurons $\frac{dydudx - yduddx}{dx^2} = 0$, & multipliant par dx^2, puis donnant de part & d'autre $yduddx$, nous aurons $dydudx = yduddx$, d'où je tire $y = \frac{dydx}{ddx}$, & mettant cette valeur de y dans CM $= \frac{ydu}{dx}$ nous aurons CM $= \frac{dydudx}{dxddx} = \frac{dydu}{ddx}$.

Les triangles CMP, NMO sont semblables à cause de l'angle aigu CMP égal à l'angle aigu NMO qui lui est opposé au sommet, or le triangle CMP est semblable au triangle MmR, donc le triangle NMO est aussi semblable au triangle mMR, & par conséquent nous avons mM, MR :: MN, MO, ou du, dx :: a; $\frac{adx}{du} =$ MO; or nous avons V $= \frac{\text{MN}, \text{2PM}}{\text{MC}}$; mettant donc les valeurs analytiques, nous aurons V $= \frac{2ayddx}{dydu}$, & mettant les valeurs analytiques dans MN $= \frac{\text{MN} \times \text{2PM}}{\text{2MC}} +$ MO, que nous avons trouvé ci-dessus, nous aurons $a = \frac{2ayddx}{dydu} + \frac{adx}{du} = \frac{2ayddx + adydx}{dydu}$, d'où je tire $adydu = 2ayddx + adydx$, ou $dydu = 2yddx + dydx$.

Or si dans le second membre le coefficient 2 manquoit, l'integrale de ce second membre seroit ydx, & celle du premier seroit ydu; ainsi pour ôter l'obstacle du coefficient, nous diviserons de part & d'autre par $2\sqrt{y}$, ce qui donne $\frac{dydu}{2\sqrt{y}} = \frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}}$, donc l'integrale est $du\sqrt{y} = dx\sqrt{y}$, car le second membre $\frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}}$, peut avoir cette expression $ddx\sqrt{y} + \frac{dydx}{2\sqrt{y}}$, donc l'integrale est visiblement $dx\sqrt{y}$.

Mais l'integrale $du\sqrt{y} = dx\sqrt{y}$ n'est pas complete, car du étant plus grand que dx, il manque nécessairement quelque chose dans le second membre de l'équation $du\sqrt{y} = dx\sqrt{y}$, ainsi pour la

completer

completer, nous retrancherons du premier membre la quantité constante $du\sqrt{a}$, ce qui donne $du\sqrt{y} - du\sqrt{a} = dx\sqrt{y}$, & élevant tout au quarré j'ai $ydu^2 - 2du^2\sqrt{y}\sqrt{a} + adu^2 = ydx^2$, or $du^2 = dx^2 + dy^2$; mettant donc cette valeur, j'ai l'équation qu'on voit ici.

$$ydx^2 = ydx^2 + ydy^2 - 2dx^2\sqrt{ay} - 2dy^2\sqrt{ay} + adx^2 + ady^2.$$

$$2dx^2\sqrt{ay} - adx^2 = ydy^2 - 2dy^2 + ady^2$$

$$dx\sqrt{2\sqrt{ay} - a} = dy\sqrt{y - 2\sqrt{ay} + a} = dy \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}$$

$$dx = \frac{dy \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$$

Et corrigeant l'expression, puis donnant de part & d'autre $2dx^2\sqrt{ay}$, & retranchant adx^2, puis tirant la racine quarrée, enfin transposant, je trouve $dx = \frac{dy \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$.

Je prens une indéterminée z, que je suppose égale à $2\sqrt{ay} - a$, ce qui me donne l'équation $z = 2\sqrt{ay} - a$, dont la différence est $dz = \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, d'où je tire $dy = \frac{dz\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$.

Or de $z = 2\sqrt{ay} - a = 2\sqrt{a}\sqrt{y} - a$, je tire $\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a}$, & $\frac{z}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$, ou enfin $\frac{z + a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$, & $\frac{z - a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$.

Substituant donc ces valeurs dans $dx = \frac{dy \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, j'ai $dx = \frac{dz \times \overline{z + a} \times \overline{z - a}}{4a\sqrt{az}}, = \frac{dz \times \overline{z^2 - a^2}}{4a\sqrt{az}}$, d'où je tire $4adx\sqrt{a} = \frac{dz \times \overline{z^2 - a^2}}{\sqrt{z}} = z^{\frac{3}{2}}dz - a^2z^{-\frac{1}{2}}dz$; & tirant l'integrale, j'ai $4ax\sqrt{a} = \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} - 2a^2z^{\frac{1}{2}}$ ou $2ax\sqrt{a} = \frac{\overline{z^2 - 5a^2} \times \sqrt{z}}{5}$.

Or $z^2 = 4ay - 4a\sqrt{ay} + a^2$, & $\sqrt{z} = \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$; mettant donc ces valeurs dans l'integrale que je viens de trouver, laquelle je multiplie auparavant par 5; j'ai $10ax\sqrt{a} = \overline{4ay - 4a\sqrt{ay} - 4a^2} \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$, ou $5ax\sqrt{a} = \overline{2ay - 2a\sqrt{ay} - 2a^2} \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$, d'où je tire $5ax = \overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2}$, & c'est l'équation de la courbe qu'on demande.

Pour construire cette courbe je suppose $x = 0$, donc $\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2} = 0$, & divisant par $\sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2}$, j'ai $2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$; donc $y - \sqrt{ay} = a$, ou $y - \sqrt{a}\sqrt{y} = a$,

& ajoûtant le quarré $\frac{1}{4}a$ de la moitié $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ du coefficient du second terme, j'ai $y - \sqrt{ay} + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a$; & tirant la racine quarrée j'ai $\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{\frac{5}{4}a}$, d'où je tire $\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{5a}$, & élevant tout au quarré j'ai $y = \frac{1}{4}a + \frac{5}{4}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5} = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$, ce qui me fait voir que quand l'abſciſſe x eſt égale à zero, l'ordonnée AB eſt $\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$.

Je ſuppoſe $y = 0$, ce qui donne $5ax = -2a\sqrt{a^2} = -2a^2$, & $x = -\frac{2a^2}{5a} = -\frac{2}{5}a$, ce qui fait voir que quand $y = 0$ l'abſciſſe x eſt négative, & que par conſéquent il faut prolonger l'axe HA du côté de A & faire $AZ = \frac{2}{5}a$.

Pour trouver les autres points de la courbe, je fais $a = 1$, & enſuite je fais ſucceſſivement $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, &c. $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, &c. & mettant ſucceſſivement ces valeurs dans l'équation, je détermine les x correſpondans à ces divers y, en ſuivant les regles ordinaires, &c.

PROPOSITION CXLII.

421. *Trouver qu'elle eſt la courbe le long de laquelle un corps mû d'un mouvement acceleré, doit deſcendre, enſorte que ſes preſſions ſur tous les points de la courbe ſoient à une puiſſance ou une racine des hauteurs* PM (Fig. 143.) *correſpondantes à ces points, comme la peſanteur totale* MN *eſt à la même puiſſance ou racine de cette peſanteur, ou ce qui eſt la même choſe, que les preſſions ſoient entr'elles comme des puiſſances ou racines des hauteurs* PM.

SOLUTION.

Nommant les mêmes grandeurs des mêmes lettres que dans la Propoſition précédente, z la preſſion au point M, & n l'expoſant de la puiſſance ou de la racine de PM, nous avons par la ſuppoſition z, $\overline{PM}^n$: : MN, $\overline{MN}^n$, ou z, y^n : : a, a^n; d'où je tire $z = \frac{ay^n}{a^n} = \frac{y^n}{a^{n-1}}$; or par la Propoſition précédente nous avons $z = \frac{MN \times 2PM}{MC} + MO = \frac{2ayddx + adydx}{dydu}$ donc $\frac{2ayddx + adydx}{dydu} = \frac{y^n}{a^{n-1}}$; & multipliant tout par $dydu$, puis diviſant par $2\sqrt{y}$ pour les raiſons que nous avons dites dans la Propoſition précédente, puis tirant l'integrale, enſuite multipliant par $\overline{2n+1} \times a^n$, & élevant tout au quarré, puis mettant au lieu de du ſa valeur $dx^2 + dy^2$, puis

retranchant de part & d'autre $y^{2n}dx^2$, puis tirant la racine quarrée, & enfin divisant, j'ai une derniere équation qu'on voit ici, & qui est l'équation de la courbe cherchée.

$$\frac{2yddx + dydx}{dydu} = \frac{y^n}{a^n} = y^n a^{-n}$$

$$2yddx + dydx = y^n a^{-n} dydu$$

$$\frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} y^{n-\frac{1}{2}} a^{-n} dydu$$

$$dx\sqrt{y} = \frac{y^{n+\frac{1}{2}} du}{\overline{2n+1} \times a^n} = \frac{y^n du\sqrt{y}}{\overline{2n+1} \times a^n}$$

$$\overline{2n+1} \times a^n dx = y^n du$$

$$\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} dx^2 = y^{2n} du^2$$

$$\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} dx^2 = y^{2n} dx^2 + y^{2n} dy^2$$

$$\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} dx^2 - y^{2n} dx^2 = y^{2n} dy^2$$

$$dx \times \sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$$

Maintenant supposant $n = 1$, nous aurons $dx = \frac{-ydy}{\sqrt{ga^2 - y^2}}$, & tirant l'integrale nous aurons $x = -\sqrt{ga^2 - y^2}$; or pour voir si l'integrale est complette, je fais $y = 0$, selon les loix du Calcul Integral, & il reste $\sqrt{ga^2} = 3a$, ainsi $x = 3a - \sqrt{ga^2 - y^2}$ est l'integrale complette, d'où je tire $3a - x = \sqrt{ga^2 - y^2}$, & quarrant chaque membre, j'ai $ga^2 - 6ax + xx = ga^2 - y^2$, ou $y^2 = 6ax - xx$.

Or cette équation est l'équation d'un cercle ABCD (*Fig.* 142), dont le diametre est $6a$, car nommant $PD = x$ on a $PB = 6a - x$, & $PB \times PD = 6ax - xx = \overline{PM}^2 = y^2$, donc quand les pressions sont entr'elles comme les hauteurs PM la courbe demandée est un cercle.

Si le corps commence à descendre de l'extrémité D du diametre BD parallele à l'horison, les pressions sont comme les sinus droits PM des arcs parcourus, puisque ces sinus sont les hauteurs; mais si le corps commence à descendre de l'extrémité A du diametre perpendiculaire à l'horison, les pressions seront comme les sinus verses AQ des arcs parcourus AO.

De même supposons $n = \frac{1}{2}$, nous aurons $dx = \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{4a - y}}$, donc $dx^2 = \frac{ydy^2}{4a - y}$, & $dx^2 + dy^2 = du^2 = \frac{ydy^2}{4a - y} + dy^2 = \frac{ydy^2 + 4ady^2 - ydy^2}{4a - y} = \frac{4ady^2}{4a - y}$, & tirant la racine quarrée, j'ai $du = \frac{2dy\sqrt{a}}{\sqrt{4a - y}}$, & multipliant le numérateur & le dénominateur du second membre par

$\sqrt{a}$, j'ai $du = \frac{2ady}{\sqrt{4a^2 - ay}}$ dont l'integrale eſt $u = -4\sqrt{4a^2 - ay}$.

Pour voir ſi cette intégrale eſt complette, je ſuppoſe $y = 0$, & il reſte $4\sqrt{4a^2} = 8a$; donc $u = 8a - 4\sqrt{4a^2 - ay}$ eſt l'intégrale complette.

Pour conſtruire cette courbe, je décris un demi-cercle autour d'un diametre $AB = 4a$ (*Fig.* 144.), je nomme l'abſciſſe $AC = y$, donc $CB = 4a - y$, & $\overline{CB}^2 = 16a^2 - 8ay + y^2$, & $\overline{CP}^2 = AC \times CB = 4ay - y^2$.

Je mene la corde BP, & par la proprieté du cercle, j'ai CB, BP :: BP, BA ; donc $\overline{BP}^2 = CB \times BA = 16a^2 - 4ay$; donc $BP = \sqrt{16a^2 - 4ay} = 2\sqrt{4a^2 - ay}$, & $2BP = 4\sqrt{4a^2 - ay}$. Si je décris donc une demi-cycloïde RMB, j'aurai l'arc $MB = 4\sqrt{4a^2 - ay}$; car par la proprieté de cette courbe, on a $MB = 2BP$; or $2AB = 8a$, & par la proprieté de la cycloïde l'arc $BMR = 2AB$, donc $BMR = 8a$, & par conſéquent $BMR - BM = 8a - 4\sqrt{4a^2 - ay} = u$, c'eſt-à-dire $MR = u$.

Donc ſi les preſſions du corps ſont comme les racines quarrées des hauteurs, la courbe demandée eſt une cycloïde.

Puiſqu'en nommant le diametre $AB = 4a$, l'ordonnée $SM = y$, & l'abſciſſe $SR = x$, nous avons $dx = \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{4a - y}}$ pour l'équation de la courbe qui eſt en ce cas une cycloïde, il s'enſuit qu'en nommant le diametre $AB = a$, nous aurons $dx = \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{a - y}} = \frac{ydy}{\sqrt{ay - yy}}$ pour l'équation de la cycloïde ; or l'élement de cette cycloïde eſt $SMms = ydx$, & mettant la valeur de dx, cet élement eſt $\frac{y^2dy}{\sqrt{ay - yy}}$, & par conſéquent l'integrale ou l'aire de la cycloïde eſt $\int \frac{y^2dy}{\sqrt{ay - yy}}$, ce qui peut ſervir pour trouver les intégrales des expreſſions ſemblables à $\frac{y^2dy}{\sqrt{ay - yy}}$.

CHAPITRE XIII.

De la Résistance du Milieu à travers lequel les Corps en mouvement passent.

422. TOUT le monde est convaincu que le Corps étant de lui-même indifférent au mouvement & au repos, & par conséquent incapable de se procurer l'un ou l'autre, il doit nécessairement rester en repos si nulle cause ne le meut, & continuer de se mouvoir s'il a reçu du mouvement, à moins que quelque cause étrangere ne l'oblige de repasser dans l'état du repos. Or nous éprouvons tous les jours que les corps qui se meuvent dans l'air ou dans les autres fluides, perdent peu à peu de leur mouvement ; donc il faut que l'air & les autres fluides ayent une résistance qui s'oppose à ce mouvement. C'est donc de cette résistance dont nous allons parler dans ce Chapitre, & je n'ai differé jusqu'ici de traiter cette matiere, qu'afin que l'on jugeât mieux de ce qui appartient au mouvement des corps pris en lui-même & de l'altération que la résistance du milieu peut lui causer. Mais comme l'objet de cette premiere partie que j'enseigne dans ce premier Livre ne comprend que les corps qui se meuvent dans l'air, je ne parlerai aussi que de la résistance de l'air, me réservant à parler de la résistance des autres fluides dans les Livres suivans.

Wallis célebre Anglois est le premier qui a entrepris de réduire au Calcul la résistance de l'air au mouvement des corps. Avant lui on ne s'imaginoit point qu'on pût soûmettre à la Géometrie une matiere qui dépend plus de l'experience que de la raison, mais après tout on avoit tort, & rien n'empêche de raisonner aussi géometriquement sur une hypotèse qu'on le feroit sur le principe le plus assuré. Or entre grand nombre d'hypotèses qu'on peut faire sur ce sujet, l'Auteur en a choisi deux qu'il a cru pouvoir être admises également ; la premiere est que *les Résistances de l'air à la fin de chaque instant, sont comme les vitesses*, & la raison qu'il en donne est que si la vitesse est double d'un autre dans un même-tems, elle doit aussi surmonter une double masse d'air ; si elle est triple, elle doit surmonter une triple masse,

&c. La seconde hypotèse est que *les Résistances de l'air sont comme les quarrés des vitesses*, à cause que l'air étant un fluide, une double masse d'air qu'un corps est obligé de vaincre a une double résistance, & que par conséquent l'obstacle que le corps trouve est quadruple ; qu'une triple masse a une triple résistance, & que par conséquent le corps trouve un obstacle noncuple, & ainsi des autres. L'Auteur semble donner la préference à la premiere de ces hypotèses, mais M. Newton & la plûpart des Geometres après lui ont embrassé la seconde par la raison que les fluides choquent ou résistent dans la raison des quarrez des vitesses, comme il sera expliqué dans les Livres suivans. Nous allons examiner l'une & l'autre dans ce Chapitre en l'appliquant d'abord au mouvement uniforme, & ensuite au mouvement acceleré.

PROPOSITION CXLIII.

423. *La vitesse d'un corps qui se meut uniformement étant connue, connoître la courbe dont les ordonnées expriment les vitesses que la résistance de l'air fait perdre au corps à chaque instant, en supposant les résistances proportionnelles aux vitesses restantes.*

SOLUTION.

Supposons que AB (*Fig.* 145.) represente la vitesse uniforme du corps, que les droites AP, PE, EC, &c. representent des tems égaux du mouvement, en sorte que les droites AP, AE, AC, &c. soient les tems arithmetiquement proportionnels, à commencer toujours depuis le premier instant du mouvement; enfin soit la courbe ANFO dont les ordonnées PN, EF, CO, &c. representent les vitesses totales perdues à la fin de chaque instant par les résistances, il est clair que les droites NM, FG, OD, &c. seront les vitesses restantes à la fin de chaque instant.

Nommons maintenant $AB = a$, la vitesse PN perdue à la fin du premier instant $= X$, la vitesse EF perdue à la fin du second $= x$, la vitesse NM qui reste à la fin du premier instant $= V$, la vitesse FG qui reste à la fin du second $= u$; je mene les ordonnées infiniment proches pm, eg, & les perpendiculaires NR, nr, FH, fh, & il est visible que les différences Rn, Hf, des vitesses perdues sont égales aux différences Nr, Fh, des vitesses restantes ; donc $dX = -dV$, & $dx = -du$; je mets

$-dX$, $-du$, parce qu'il eſt clair que les viteſſes reſtantes vont en diminuant, au lieu que les viteſſes perdues vont en augmentant.

Si je diviſe les différences $-dV$, $-du$, par elles-mêmes, ou par des grandeurs Z, z qui ſoient entr'elles comme ces différences, les quotients $-\frac{dV}{Z}$, $-\frac{du}{z}$ feront des grandeurs conſtantes & égales entr'elles, ce qui eſt trop évident pour avoir beſoin de Demonſtration. De même, les différences Pp, Ee, des tems étant égales entr'elles ſelon la ſuppoſition, ſont des grandeurs conſtantes, & ſi je les diviſe par une même grandeur a, les quotients feront des grandeurs conſtantes & égales; appellant donc $AP = Y$, $AF = y$, j'ai $\frac{dY}{a} = \frac{dy}{a}$; donc $\frac{dY}{a}, -\frac{dV}{Z} :: \frac{dy}{a}, -\frac{du}{z}$.

Par l'hypotèſe, les réſiſtances de l'air ſont comme les viteſſes reſtantes, c'eſt-à-dire, les viteſſes Rn, Hf, perdues pendant les petits inſtans Pp, Ee, ſont comme les viteſſes NM, FG, reſtantes au commencement de ces inſtans; mais par la conſtruction les grandeurs Z, z, ſont en même raiſon que les viteſſes reſtantes NM, FG; donc $Z, z :: V, u$; ſuppoſant donc $Z = V$, & $z = u$, & mettant ces valeurs dans la proportion $\frac{dY}{a} - \frac{dV}{Z} :: \frac{dy}{a} - \frac{du}{z}$, nous aurons $\frac{dY}{a} - \frac{dV}{V} :: \frac{dy}{a} - \frac{du}{u}$, d'où je tire dY, $-\frac{adV}{V} :: dy$, $-\frac{adu}{u}$, ou dY, $-\frac{adV}{Z} :: dy$, $-\frac{adu}{z}$, ou bien VdY, $-adV :: udy$, $-adu$, & diviſant la premiere raiſon par $-dV$, & la ſeconde par $-du$, j'ai $-\frac{VdY}{dV}, a :: -\frac{udy}{du}, a$, & par conſéquent $-\frac{VdY}{dV} = -\frac{udy}{du}$, ou $\frac{VdY}{dV} = \frac{udy}{du}$.

Or ſi au point N je tire la tangente NT, les triangles ſemblables nrN, TMN, donnent $-Nr, rn :: NM, MT$; donc $-dV, dY :: V, -\frac{VdY}{dV}$, & par la même raiſon ſi je mene en F la tangente FS, je trouverai $GS - \frac{udy}{du}$; donc la courbe AND dont les ordonnées AB, NM, FG, &c. marquent les viteſſes reſtantes à chaque moment, eſt de telle nature que ſes ſoutangentes MT, GS, &c. à tous ſes points ſont toutes égales entr'elles, & a une grandeur conſtante a; & par conſéquent cette courbe eſt une *Logarithmique*, ainſi que nous l'avons fait voir dans *le Calcul Différentiel & Integral*.

COROLLAIRE I.

424. Les viteſſes AB, NM, FG, &c. étant les ordonnées de la logarithmique dont les abſciſſes BM, BG, &c. ſont en progreſſion arithmetique, elles ſont par conſéquent en progreſſion geometrique par la proprieté de cette courbe ; d'où il ſuit que les viteſſes du corps au commencement des inſtans égaux BM, MG, GD, &c. ſont en progreſſion geometrique.

COROLLAIRE II.

425. Les ordonnées de la logarithmique étant en progreſſion geometrique, leur différences ſont auſſi en progreſſion géométrique, comme il eſt aiſé de le prouver ; donc les viteſſes perdues à la fin des tems égaux ſont en progreſſion geometrique, c'eſt-à-dire, que ſi les tems AP, PE, EC, &c. ſont égaux, les viteſſes PN, ZF, &c. perdues à la fin de ces tems ſont en progreſſion geometrique, & par conſéquent comme les viteſſes reſtantes au commencement de ces tems.

COROLLAIRE III.

426. *Les eſpaces parcourus pendant les petits tems égaux ſont comme les viteſſes perdues à la fin de ces tems, & les eſpaces parcourus à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. à compter toujours depuis le premier, ſont auſſi entr'eux comme les viteſſes perdues à la fin de ces tems.*

Je nomme S l'eſpace parcouru pendant le tems AP, & s l'eſpace parcouru pendant le tems AE ; donc l'eſpace parcouru pendant le petit tems Pp ſera dS, & l'eſpace parcouru pendant le petit tems Ee ſera ds ; or les eſpaces dS, ds, ſont comme les produits des tems Pp, Ee, par les viteſſes NM, FG ; donc dS, ds :: VdY, udy, mais VdY, $-adV$ :: udy, $-adu$; donc dS, ds :: $-adV$, $-adu$; or $-dV = dX$, & $-du = dx$; donc dS, ds :: adX, adx :: dX, dx ; c'eſt-à-dire les eſpaces parcourus pendant les petits tems égaux Pp, Ee, ſont entr'eux comme les viteſſes Rn, Hf, perdues pendant ces petits tems.

Puiſque dS, ds :: dX, dx ; donc en tirant l'integrale, nous avons S, s :: X, x, c'eſt-à-dire, les eſpaces parcourus pendant les tems AP, AE, ſont comme les viteſſes PN, FP perdues à la fin de ces tems.

COROLLAIRE

COROLLAIRE IV.

427. *Les espaces qui restent à parcourir pendant des petits tems égaux* Pp, Ee, *sont entr'eux comme les vitesses restantes* NM, FG, *& les espaces totaux qui restent à parcourir à la fin des tems* AP, AE, *sont aussi comme les vitesses restantes.*

Je nomme H l'espace total qui reste à parcourir après le tems AP & h, l'espace total qui reste à parcourir après le tems AE; donc dH sera l'espace qui reste à parcourir pendant le petit tems Pp, & dh celui qui reste à parcourir pendant le petit tems Ee; or les espaces dH, dh, sont entr'eux comme les produits des vitesses NM, FG, par les tems dY, dy; donc dH, dh :: VdY, udy, mais VDY, — adV :: udy, — adu; donc dH, dh :: —adV, — adu :: — dV, — du, mais —dV, — du :: V, u, donc dH, dh :: V, u.

De même, dH, dh :: —dV, —du ; donc tirant l'integrale, j'ai H, h :: V, u.

COROLLAIRE V.

428. *Si les espaces totaux qui restent à parcourir après les tems* AP, AE, *&c. sont entr'eux comme des nombres, les tems employés aux espaces déja parcourus sont comme les logarithmes des espaces à parcourir.*

Les espaces totaux qui restent à parcourir sont comme les ordonnées NM, FG, de la logarithmique, & les tems AP, AE, ou BM, BG, sont comme les abscisses, mais dans la logarithmique, les abscisses sont les logarithmes des ordonnées, donc, &c.

COROLLAIRE VI.

429. La vitesse totale AB ne s'éteint entierement qu'après un tems infini, car la droite BS étant l'asymptote de la logarithmique, les ordonnées NM, FG, &c. iront toujours en diminuant, & ce ne sera qu'à l'infini que l'ordonnée sera égale à zero; donc ce ne sera aussi qu'à l'infini que la vitesse perdue CO sera égale à la vitesse AB; donc, &c.

REMARQUE.

430. L'experience est constamment contraire à ce dernier Corollaire, mais on doit dire qu'à la fin d'un certain tems les

vitesses restantes sont si petites que le mouvement ne nous est plus sensible, quoiqu'il subsiste toujours. Au reste, l'autre hypotèse que nous examinerons bientôt & que M. Newton a suivi préferablement à celle-ci, est sujette au même inconvenient, & l'on doit y repondre de la même façon.

COROLLAIRE. VII.

431. Si l'on prolonge SB en *d*, & qu'ayant décrit avec les asymptotes AB, B*d*, une hyperbole équilatere *abc*, on mene des points N, F, &c. des droites N*b*, F*c*, &c. paralleles à S*d*, les droites BA, BQ, BT, &c. seront en progression geometrique; car elles seront égales aux ordonnées BA, MN, GF, &c. de la logarithmique, lesquelles sont en progression geometrique à cause que leurs abscisses BM, BG, &c. sont en progression arithmetique, car c'est-là une des proprietés de la logarithmique.

Or les différences AQ, QT, &c. des droites BA, BQ, BT, étant aussi en progression geometrique, les espaces hyperboliques A*ab*Q, Q*bc*T, &c. seront égaux entr'eux selon la proprieté de l'hyperbole; ainsi concevant que les tems AP, PE, &c. soient infiniment proches, l'espace hyperbolique A*abcd*B sera rempli d'autant de petits espaces tous égaux, qu'il y aura de petits tems égaux dans AC, ainsi ces espaces pourront representer les tems; par exemple, le tems pendant lequel la vitesse PN s'est perdue pourra être representé par l'espace hyperbolique A*ab*Q, & ainsi des autres, parce que cet espace contient autant de petits espaces que la droite AP contient de petits tems.

PROPOSITION CXLIV.

432. *La vitesse uniforme d'un corps étant connue, trouver une courbe qui exprime les vitesses que la résistance de l'air fait perdre à chaque instant, & les vitesses restantes en supposant que les résistances sont entr'elles comme les quarrez des vitesses restantes.*

Soit la vitesse donnée AB $= a$ (*Fig.* 146.), & supposons que les droites AP, PE, &c. expriment des tems égaux, les droites PN, EF, &c. les vitesses perdues à la fin des tems AP, AE, &c. arithmetiquement proportionnels, les droites NM, FG, &c. les vitesses restantes.

Nommons le tems AP $=$ Y, le tems AE $= y$, la vitesse perdue PN $=$ X, la vitesse perdue EF $= x$, la vitesse restante

NM$=$V, & la viteſſe reſtante FG$=u$; donc P$p=d$Y, E$e=dy$, R$n=d$X, H$f=dx$, N$r=-d$V, & F$h=-du$; & il eſt viſible que dX$=-d$V, & $dx=-du$.

Si je diviſe les différences $-d$V, $-du$, par des grandeurs Z, z, qui leur ſoient égales, ou qui ſoient en même raiſon qu'elles, les quotients $-\frac{dV}{Z}$, $-\frac{du}{z}$ ſeront des quantités conſtantes & égales entr'elles ; de même les différences dY, dy, étant égales entr'elles, ſi je les diviſe par a, les quotients $\frac{dY}{a}$, $\frac{dy}{a}$, ſeront encore égaux entr'eux ; donc $-\frac{dV}{Z}, \frac{dY}{a} :: -\frac{du}{z}, \frac{dy}{a}$, d'où je tire $-ad$V, dYZ :: $-adu$, dyz.

Or par la ſuppoſition les réſiſtances ſont comme les quarrez des viteſſes, c'eſt-à-dire, les viteſſes Rn, Hf, perdues à la fin des inſtans Pp, Ee, ſont comme les quarrez des viteſſes NM, EG, au commencement de ces inſtans ; ainſi ſuppoſant que les grandeurs Z, z, ſoient égales aux viteſſes perdues Rn, Hf, nous aurons Z, z :: V², u^2 :: $\frac{V^2}{a}$, $\frac{u^2}{a}$, & mettant ces valeurs de Z, z, dans l'équation précédente, nous aurons $-ad$V, $\frac{V^2 dY}{a} :: -adu, \frac{u^2 dy}{a}$, ou $-\frac{dV}{V^2}, \frac{dY}{a^2} :: -\frac{du}{u^2}, \frac{dy}{a^2}$; mais à cauſe de dY$=dy$, les deux conſéquents ſont égaux entr'eux ; donc les deux antécédens le ſont auſſi ; de plus, les deux conſéquents ſont deux tems égaux dY, dy, diviſés par une même grandeur, & deux tems égaux peuvent s'exprimer par deux grandeurs quelconques égales entr'elles ; donc nous pouvons faire $-\frac{dV}{V^2} = \frac{dY}{a^2}$, & $-\frac{du}{u^2} = \frac{dy}{a^2}$.

Prenons l'integrale de la ſeconde de ces équations, & ce qui arrivera touchant celle-ci, ſe dira de même de l'autre, nous aurons donc $u^{-1} = \frac{y}{a^2}$, ou bien ſi l'on veut ajouter une grandeur conſtante b, ce que l'on peut faire, à cauſe que l'integrale u^{-1} peut n'être pas complette, nous aurons $\frac{1}{u} + b = \frac{y}{a^2}$; or au point B le tems eſt égal à zero, & la viteſſe eſt $=a$; faiſant donc $y=0$ dans l'équation que nous venons de trouver, nous aurons $\frac{1}{a} + b = 0$, & $b = -\frac{1}{a}$; mettant donc cette valeur de b dans $\frac{1}{u} + b = \frac{y}{a^2}$, nous aurons $\frac{1}{u} - \frac{1}{a} = \frac{y}{a^2}$,

d'où je tire $\frac{a^2}{u}$, $-\frac{a^2}{a}=y$, & $a^2-au=yu$, & $a^2=yu+au$; nous avons donc par le point F de la courbe $a^2=yu+au$, & pour le point N nous aurons aussi $a^2=YV+aV$, & ainsi des autres.

Prenant donc $BO=AB=a$, nous aurons $OB+BG=OG=a+y$, & $OM=OB+BM=a+Y$; ainsi nous aurons $\overline{AB}^2=a^2=OG\times GF=\overline{a+y}\times u=au+uy$, & $\overline{AB}^2=a^2=OM\times MN=\overline{a+Y}\times V=aV+VY$, c'est-à-dire les rectangles $OM\times MN$, $OG\times GF$ sont égaux entr'eux & au quarré de la droite AB; or comme cela arrivera partout, il s'ensuit que la courbe demandée est une hyperbole entre ses asymptotes dont les y, c'est-à-dire les abscisses changeantes commencent au point B, & sont toutes augmentées d'une grandeur constante OB égale à la racine de la puissance $\overline{AB}^2$ de l'hyperbole.

COROLLAIRE I.

433. La droite OG étant l'asymptote de l'hyperbole, l'ordonnée FG ne deviendra infiniment petite qu'à l'infini, & par conséquent la droite EF ne deviendra égale à AB qu'à l'infini, c'est-à-dire que la vitesse perdue ne sera égale à la vitesse totale qu'après un tems infini, & par conséquent le corps ne perdra jamais son mouvement, ce que l'on doit entendre d'un mouvement insensible; car l'experience nous fait assez voir que le mouvement sensible se perd après un tems limité.

COROLLAIRE II.

434. *Les vitesses restantes sont aux vitesses perdues comme la racine de la puissance de l'hyperbole, ou comme la vitesse primitive est aux tems correspondans exprimés par les abscisses.*

L'équation de la courbe est $a^2=au+uy$, donc $a^2-au=uy$, d'où je tire $a, y :: u, a-u$, or u est la vitesse restante FG à la fin du tems BG, & $a-u=AB-FG=EG-FG=EF$ est la vitesse perdue à la fin du même tems, donc la vitesse restante est à la vitesse perdue comme a, ou comme la vitesse primitive AB est à y, ou au tems correspondant à ces vitesses; or la même chose arrivera par tout, donc, &c.

COROLLAIRE III.

435. *Les espaces parcourus à la fin des tems* BM, BG *sont entr'eux comme les logarithmes des fractions qui ont pour numérateur la vitesse initiale* AB, *& pour dénominateur les vitesses restantes* NM, FG, *à la fin des mêmes tems.*

Le mouvement pendant les petits tems M*m*, G*g* pouvant passer pour uniforme, les espaces parcourus pendant ces petits tems sont entr'eux comme les produits des vitesses par les tems, ainsi nommant S l'espace parcouru pendant le tems BM, & *s* l'espace parcouru pendant le tems BG, nous aurons $dS, ds :: VdY, udy$.

Or nous avons trouvé ci-dessus (*N.* 432) $\frac{dY}{a^2} = -\frac{dV}{V^2}$, donc $dY = -\frac{a^2dV}{V^2}$, & par la même raison nous aurons $dy = -\frac{a^2du}{u^2}$; mettant donc ces valeurs de dY & dy, nous aurons $dS, ds :: -\frac{a^2aV}{V}, -\frac{a^2du}{u}$, donc $S, s :: \int -\frac{a^2dV}{V}, \int -\frac{a^2du}{u} :: \int -\frac{adV}{V}, \int -\frac{adu}{u}$.

Je construis une hyperbole entre ses asymptotes (*Fig.* 147.) égale & semblable à l'hyperbole précédente; je prens AB, AC égales aux vitesses restantes; ainsi $AB = V$ & $AC = u$; or par la proprieté de l'hyperbole j'ai $AB \times BE = aa$, ou $V \times BE = aa$, donc $BE = \frac{aa}{V}$; je mene l'ordonnée *be* infiniment proche de BE, ce qui donne $bB = dV$, & par conséquent $\frac{a^2dV}{V}$ est l'élement de l'hyperbole, & $\int \frac{a^2dV}{V}$ est l'espace hyperbolique BESXA, de même $\int \frac{a^2du}{u}$ est l'espace hyperbolique CDSXA, je divise les deux espaces hyperboliques par *a*, ce qui donne $\int \frac{adV}{V}, \int \frac{adu}{u}$.

Je construis une logarithmique dans laquelle la grandeur H*h* égale à l'unité, est égale à la racine de la puissance a^2 de l'hyperbole; & prenant le point H pour l'origine des abscisses, je prens les abscisses positives de H en A, & les négatives de H en X, & je prens deux abscisses négatives HM, HN, qui soient entr'elles comme $\int \frac{adV}{V}, \int \frac{adu}{u}$; ainsi j'ai $HM, HN :: \int -\frac{adV}{V}, \int -\frac{adu}{u} :: S, s$.

Or on sçait que les abscisses positives sont les logarithmes de

leurs ordonnées, de même que les négatives sont les logarithmes des ordonnées qui sont de leur côté, & que les ordonnées des logarithmes positifs sont comme des nombres entiers, au lieu que les ordonnées des logarithmes négatifs sont comme des fractions qui ont l'unité pour numérateur, & pour dénominateur les nombres des logarithmes positifs correspondans, d'où il suit que les nombres des logarithmes positifs sont reciproques aux nombres des logarithmes négatifs; donc il ne s'agit que de prouver que si les abscisses HM, HN avoient été prises de l'autre côté, c'est-à-dire, si elles étoient comme $\int\frac{a^2dV}{V}$, $\int\frac{a^2du}{u}$, leurs ordonnées seroient comme V, u, car dès-lors il s'ensuivra qu'en les prenant sur HX elles sont reciproques aux précédentes, c'est-à-dire $::u$, V, ou comme $\frac{1}{V}$, $\frac{1}{u}$, ou enfin comme $\frac{a}{V}$, $\frac{a}{u}$, ainsi que nous avons entrepris de le prouver.

Si nous prenons les abscisses HM, HN du côté de HA, & que nous nommions la premiere X, & la seconde x, nous aurons $X=\int\frac{adV}{V}$; donc $dX=\frac{adV}{V}$, d'où je tire $\frac{VdX}{dV}=a$; or $\frac{VdX}{dV}$ est l'expression de la soutangente selon les regles du Calcul Différentiel, & dans cette expression la grandeur V marque l'ordonnée, donc l'ordonnée de $\int\frac{adV}{V}$ est V, & de la même façon on trouvera que l'ordonnée de $\int\frac{adu}{u}$ est u; donc si nous prenons HM, HN négatifs, c'est-à-dire $\int-\frac{adV}{V}$, $\int-\frac{adu}{u}$, les ordonnées correspondantes seront $\frac{1}{V}$, $\frac{1}{u}$; mais nous avons trouvé S, $s::\int-\frac{adV}{V}$, $\int-\frac{adu}{u}$, donc les espaces S, s sont comme les logarithmes de $\frac{1}{V}$, $\frac{1}{u}$ ou de $\frac{a}{V}$, $\frac{a}{u}$ en faisant $a=1$.

COROLLAIRE IV.

436. *Les espaces parcourus pendant les tems* BM, BG (Fig. 146.) *sont entr'eux comme les espaces hyperboliques* ABMN, ABGF.

Nommant S l'espace parcouru pendant le tems BM & s l'espace parcouru pendant le tems BG, nous aurons dS pour l'espace parcouru pendant le tems Mm, & ds pour l'espace parcouru pendant le tems Gg; or le mouvement pendant les tems Mm,

Gg pouvant être pris pour uniforme les eſpaces *dS*, *ds* ſont comme les produits des tems par les viteſſes, donc *dS*, *ds* :: V*d*Y, *udy*, & par conſéquent S, *s* :: ∫V*d*Y, ∫*udy*, mais il eſt viſible que les deux derniers termes ſont les eſpaces hyperboliques ABMN, ABGF, donc, &c.

COROLLAIRE V.

437. *Les eſpaces parcourus avec un mouvement uniforme & ſans aucune reſiſtance du côté de l'air, pendant les tems* BM, BG *ſont aux eſpaces parcourûs pendant les mêmes tems avec la reſiſtance de l'air, comme les rectangles* BP, BE *ſont aux eſpaces hyperboliques* ABMN, ABGF.

Si l'air ne reſiſtoit point, les eſpaces parcourus ſeroient comme les produits des tems par les viteſſes (*N.* 17), donc ils ſeroient comme les rectangles BP, BE; or quand l'air, reſiſte les eſpaces parcourus ſont comme ABMN, ABGF, donc, &c.

COROLLAIRE VI.

438. *Si l'on décrit deux logarithmiques* AON, KBR (Fig. 148.) *dans chacune deſquelles la droite* AB *égale à la viteſſe primitive ſoit la grandeur priſe pour l'unité, laquelle comme on ſçait eſt toujours égale à la ſoutangente, & que la premiere ait pour aſymptote la droite* BC *& l'autre la droite* TS; *je dis que ſi l'on mene une ordonnée* HM *à la logarithmique* KBR, *& que la partie* PM *de cette ordonnée exprime un tems, la partie* OP *de cette même ordonnée exprimera la viteſſe reſtante à la fin de ce tems, & la partie* HO *la viteſſe perdue.*

Je nomme OP $=u$, PM $=y$, donc HM $=$ AB $+$ PM $= a - y$; l'abſciſſe BP de la logarithmique AN eſt négative parce que l'origine des abſciſſes étant en B ces abſciſſes ſont priſes du côté où les ordonnées vont en diminuant, ainſi nous l'appellerons $-x$, donc P$p = -dx$ & OQ $= du$; je mene en O la tangente OC, & les triangles rectangles ſemblables OQo, OPC donnent OQ, Qo :: PO, PC, ou $du, -dx :: u, -\frac{udx}{du} =$ PC ſoutangente; or cette ſoutangente par la proprieté de la logarithmique eſt égale à a, donc $a = -\frac{udx}{du}$, d'où je tire $\frac{dx}{a} = -\frac{du}{u}$.

Dans la logarithmique MBR l'abſciſſe AH eſt poſitive parce qu'elle eſt du côté où les ordonnées vont en augmentant & comme AH $=$ BP, nous la nommerons $= x$, donc H$h = dx$, &

$qm = dy$, parce qu'il est la différence de HM $= a + y$; ainsi menant la tangente M2 les triangles rectangles semblables mqM, MH2 donnent $dy, dx :: a + y$, $\frac{\overline{a+y} \times dx}{dy}$ = soutangente H2 $= a$, d'où je tire $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{a+y}$; mais nous avons $\frac{dx}{a} = -\frac{du}{u}$, donc $-\frac{du}{u} = \frac{dy}{a+y}$.

Maintenant si ce que nous prétendons est vrai, il faut qu'en prenant la différence de l'équation $a^2 = yu + au$ laquelle exprime véritablement le rapport de y & u (*N.* 432.) nous retrouvions $-\frac{du}{u} = \frac{dy}{a+y}$; or la différence de $a^2 = yu + au$ est $0 = ydu + udy + adu$, d'où je tire $-adu - ydu = udy$, & divisant tout par $a + y$, j'ai $-du = \frac{udy}{a+y}$, & divisant encore par u, j'ai enfin $-\frac{du}{u} = \frac{dy}{a+y}$ de même que ci-dessus.

Donc puisque les deux logarithmiques me donnent la même équation que l'hyperbole (*Fig.* 146.) il s'ensuit que le rapport de y à u dans les deux logarithmiques, est le même que le rapport de y à u dans l'hyperbole, donc, &c.

COROLLAIRE VII.

439. Si les HM (infiniment proches) sont en progression geométrique, leurs abscisses AH seront en progression arithmetique; or les abscisses BP de la logarithmique AN étant égales aux HM seront aussi en progression arithmetique, donc les ordonnées OP seront en progression geométrique; mais les HM ou les PM + PH marquent des tems augmentés d'une grandeur AB & qui vont en augmentant, & les OP les vitesses restantes lesquelles vont en diminuant, donc *les vitesses restantes decroissent en progression geometrique lorsque les tems augmentés de l'unité croissent dans la même progression.*

COROLLAIRE VIII.

440. *Si l'on prend les tems* BM, MG, GH (*Fig.* 149.) *en progression geométrique, ensorte que* BM *soit infiniment petit, & l'exposant de la progression aussi infiniment petit, les espaces parcourus pendant les tems* BM, MG, GH, *&c. seront tous égaux.*

Nous avons démontré (*N.* 436.) que les espaces parcourus pendant les tems BM, BG, BH sont comme les espaces hyperboliques

liques AM, AG, AH, & par conséquent les espaces parcourus pendant les tems BM, MG, GH, &c. seront comme les espaces AM, Mg, gH, &c. qui sont les différences des précédens & il ne reste plus qu'à faire voir que ces espaces sont égaux, ce que nous allons démontrer ici, quoique nous l'ayons déja fait dans le Calcul Différentiel & Integral.

Supposons qu'on ait commencé à diviser OB en parties infiniment petites, ensorte que les abscisses O1, O2, O3, &c. soient cependant en progression geométrique, & qu'on ait ensuite continué la progression, ensorte que OB, OM, OG, &c. soient dans la même progression, il est évident que les différences de toutes ces abscisses seront encore en progression geométrique, & que par conséquent les tems BM, MG, GH, &c. le seront aussi.

Nommons $OM = X$, & $OG = x$, dont la différence MG de OM sera dX, & la différence GH de OG sera $= dx$, & comme les abscisses étant en progression geométrique, leurs différences sont dans la même progression, nous aurons $X, x :: dX, dx$, donc $Xdx = xdX$, d'où je tire $\frac{dx}{x} = \frac{dX}{X}$.

Or par la nature de l'hyperbole $OM \times mM = aa$, donc $mMX = aa$, & par conséquent $mM = \frac{aa}{X}$ & $mM \times GM = \frac{aadx}{X}$ égal à l'élement $mMGg$, de même $OG \times Gg = aa$, donc $Gg \times x = aa$, & $Gg = \frac{aa}{x}$, donc $Gg \times GH = \frac{aadx}{x}$ égal à l'élement $gGHh$, ainsi les élemens $mMGg$, $gGHh$, sont entr'eux comme $\frac{aadX}{X}$, $\frac{aadx}{x}$, ou comme $\frac{dX}{X}$, $\frac{dx}{x}$, mais nous venons de trouver $\frac{dX}{X} = \frac{dx}{x}$, donc l'élement $mMGg$ est égal à l'élement $gGHh$, & on prouvera la même chose des autres, donc, &c.

COROLLAIRE IX.

441. *Les diminutions* Nr, Fh (Fig. 146.) *des vitesses pendant les tems infiniment petits* Mm, Gg *sont en raison composée des vitesses restantes* NM, FG, *& des espaces parcourus pendant ces petits tems.*

Nous avons trouvé (*N.* 432.) $-adV, -adu :: \frac{V^2dY}{a}, \frac{u^2dy}{a}$, donc $-dV, -du :: \frac{V^2dY}{a^2}, \frac{u^2dy}{a^2} :: V^2dY, u^2dy :: V \times VdY, u \times udy$; or nous avons aussi trouvé (*N.* 435.) $dS, ds :: VdY$,

$u dy$, donc $-dV$, $-du$: : $V \times dS$, $u \times ds$, donc, &c.

PROPOSITION CXLV.

442. *Un corps grave* A (Fig. 150.) *descendant librement le long de la ligne* AL, *& supposant que l'air lui resiste dans la raison des vitesses restantes à la fin de chaque tems, trouver la courbe qui exprime les vitesses restantes & les vitesses perdues.*

SOLUTION.

Concevons que la ligne AL soit divisée en une infinité de parties égales qui exprimeront les petits tems égaux qui composent le tems total, les abscisses de cette ligne, à commencer depuis A, seront en progression arithmetique, & représenteront des tems qui seront comme 1, 2, 3, 4, &c. Supposons que l'un de ces tems soit AP, j'éleve en P la perpendiculaire PM, que je fais égale à AP, & par conséquent égale à la vitesse acquise à la fin du tems AP si l'air ne resistoit point ; car dans le mouvement uniformement acceleré les vitesses acquises à la fin des tems sont comme les tems (*N.* 49). Par les points A, M, je mene la droite AMZ, & concevant que de tous les points de division de AL soient menées des paralleles à PM, ces paralleles seront entr'elles comme les abscisses AP, ou comme les tems 1, 2, 3, 4, &c. & par conséquent elles représenteront les vitesses acquises à la fin de ces tems.

Supposons que PN représente la vitesse perdue à la fin du tems AP par la resistance de l'air, la droite NM sera la vitesse restante, & la petite droite Rn sera la vitesse perdue à la fin des petits tems Pp; prenons PQ = NM, & faisant la même chose à l'égard de tous les NM correspondans à tous les AP nous aurons une courbe AQT qui sera la courbe des vitesses restantes à la fin des tems AP, de même que la courbe ANV est la courbe des vitesses perdues à la fin de ces mêmes tems ; menons AB parallele à PQ & d'une grandeur indéterminée ; enfin par B concevons BC parallele à AL.

Je nomme les abscisses AP $= y$, les ordonnées PQ égales aux NM $= u$, les vitesses perdues PN $= x$, donc Pp = Oo = RN $= dy$, Rn $= dx$, & PM = AP $= y$.

NM = PM — PN $= y - x$; mais NM $= u$, donc $u = y - x$, & $x = y - u$, donc $dx = dy - du$.

Si je divise tous les dx par des grandeurs z qui soient entr'elles

en même raison que les dx, les quotiens $\frac{dx}{z}$ seront tous égaux entr'eux ; de même tous les rm ou les dy étant égaux parce qu'ils représentent les vitesses acquises à la fin des petits tems égaux Pp, lesquelles vitesses sont égales dans le mouvement uniformement acceleré, si je les divise par une grandeur constante $a = AB$ les quotiens $\frac{dy}{a}$ seront égaux entr'eux; donc tous les $\frac{dx}{z}$ seront entr'eux comme tous les $\frac{dy}{a}$, & comme tous les dy representent des tems égaux qui peuvent être exprimés par des lignes égales quelconques, nous pouvons supposer les $\frac{dx}{z}$ égaux aux $\frac{dy}{a}$, donc $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{a}$, d'où je tire $dx = \frac{zdy}{a}$, & mettant cette valeur de dx dans $dx = dy - du$, j'ai $\frac{zdy}{a} = dy - du$, d'où je tire $zdy = ady - adu$.

Or selon la supposition les resistances de l'air sont comme les vitesses restantes, c'est-à-dire les vitesses Rn ou dx perdues à la fin de chaque petit instant Pp, sont comme les vitesses NM ou PQ, ou u restantes aux commencemens de ces instans, & les z sont comme les dx, dont les z sont comme les u; faisant donc $z = u$, & mettant cette valeur dans $zdy = ady - adu$, j'ai $udy = ady - adu$, d'où je tire $adu = ady - udy$, & $a = \frac{ady - udy}{du}$ qui est l'équation de la courbe AQT des vitesses restantes, à cause qu'elle contient le rapport des abscisses AP ou de leurs différences dy, & des ordonnées u ou de leurs différences du.

Je suppose $a - u = r$, donc $u = a - r$, $du = -dr$, & mettant cette valeur de $a - u$, & celle de du dans l'équation, j'ai $\frac{ady - udy}{du} = -\frac{rdy}{dr} = a$, d'où je tire $-dr, +dy :: r, a$, mais $OQ = OP - QP = BA - QR = a - u$, donc $OQ = r$, & sa différence $HQ = -dr$, à cause que les OQ vont en diminuant ; or si je mene une tangente QC en Q les triangles semblables QqH, QCO donnent $HQ, Hq :: QO, OC$, donc $-dr, dy :: r, \frac{rdy}{-dr} = OC$, donc la soutangente de la courbe AHT est constante & égale à la grandeur $a = AB$, & par conséquent cette courbe est une logarithmique dont les ordonnées OQ sont égales aux différences de la soutangente AB & des vitesses restantes PQ.

Donc si l'on décrit avec une grandeur arbitraire AB une logarithmitique dont AB soit l'unité, & BC l'asymptote, & que du

point A l'on mene AL parallele à BC, les droites QP qui feront les prolongemens des ordonnées OQ de la logarithmique feront comme les viteſſes reſtantes à la fin des tems exprimés par les abſciſſes BO ou AP; c'eſt pourquoi faiſant en A l'angle LAZ demi-droit, puis prolongeant les OP en M, les PM repréſenteront les viteſſes acquiſes à la fin des tems AP ſi l'air ne reſiſtoit point, ainſi portant les QP ſur les PM de M en N, les PN exprimeront les viteſſes perdues à la fin des tems AP.

COROLLAIRE I.

443. Les viteſſes reſtantes vont en augmentant, ce qui eſt viſible par la ſeule conſtruction, & la plus grande viteſſe reſtante que le corps puiſſe avoir eſt exprimée par AB, car à cauſe que BC eſt l'aſymptote de la logarithmique, ce ne ſera qu'à l'infini que QP ſera égal à BA.

COROLLAIRE II.

444. *Les eſpaces parcourus à la fin des tems* AP *ſont comme les viteſſes perdues à la fin de ces tems.*

Je nomme s les eſpaces; or le tems Pp étant infiniment petit le mouvement pendant ce tems pourra être regardé comme uniforme, donc l'eſpace parcouru pendant ce tems ſera comme le produit de la viteſſe PQ par le tems Pp (*N.* 17); & par conſéquent $ds = udy$; or nous avons trouvé ci-deſſus $udy = ady - adu$ (*N.* 442), donc $ds = ady - adu$, & $s = ay - au$, c'eſt-à-dire les eſpaces s parcourus pendant les tems AP ſont comme les $ay - au$, ou comme les $y - u$; mais les $y - u$ ſont les PM — MN, c'eſt-à-dire les PN ou les viteſſes perdues, donc, &c.

COROLLAIRE III.

445. Les PM ou les BO étant pris arithmetiquement proportionnels ſont les logarithmes des OQ par la proprieté de la logarithmique; mais les OQ ſont les complemens de viteſſes reſtantes PQ à la plus grande viteſſe reſtante BA que le corps puiſſe avoir; donc les tems PM ſont les logarithmes des complemens des viteſſes reſtantes à la plus grande que le corps puiſſe acquerir.

COROLLAIRE. IV.

446. *Le corps ne parvient jamais à acquerir la plus grande vitesse qu'il puisse acquerir :* car pour cela il faudroit que QP devint égal à AB, & que par conséquent la logarithmique rencontrât son asymptote ; or comme cela n'arrive que lorsque son asymptote est infinie, le corps ne peut parvenir à acquerir sa plus grande vitesse que lorsque le tems representé par l'asymptote sera infini, d'où il suit qu'il ne l'acquerra jamais.

COROLLAIRE V.

447. Les tems AP étant en progression arithmétique ascendante, les différences HO de la plus grande vitesse AB aux vitesses restantes QP sont en progression geométrique descendante, ce qui n'a pas besoin de demonstration après ce que nous venons de dire.

COROLLAIRE VI.

448. Si le mouvement du corps duroit pendant un tems infini, l'espace parcouru à la fin de ce tems seroit infini, car il seroit comme PN (*N.* 444.) lequel seroit infini, à cause que les PN vont en augmentant, & que l'abscisse AP seroit infinie, mais la vitesse acquise à la fin de ce tems seroit finie, car elle seroit comme BA.

COROLLAIRE VII.

449. *Si avec un parametre égal à* 2BA *on décrit une demi-parabole dont le diametre soit* aK *; l'espace parcouru à la fin du tems* AP *en supposant la resistance de l'air, est à l'espace que le corps auroit parcouru si l'air ne resistoit point, comme l'ordonnée* PN *de la courbe* ANV *est à l'ordonnée exterieure* PE *à la parabole.*

Les espaces parcourus à la fin des tems AP en supposant la resistance de l'air, sont comme les PN (*N.* 444), or sans cette resistance les espaces seroient comme les quarrés des PM ou des AP (*N.* 55) & par la proprieté de la parabole les ordonnées extérieures PE sont aussi comme les quarrés des AP, donc, &c.

COROLLAIRE VIII.

450. Si entre les asymptotes BR, BS l'on décrit une hyper-

bole équilatere NaO (*Fig.* 151.) dont la racine de la puiſſance Aa = AB (*Fig.* 150.) exprime la plus grande viteſſe que le corps peut acquerir en deſcendant librement, & en ſuppoſant la reſiſtance de l'air, & que l'on porte ſur AB (*Fig.* 151.) de A vers B les viteſſes reſtantes à la fin des tems arithmetiquement proportionnels, à commencer toujours au point A, les AP repréſenteront les viteſſes reſtantes, & les BP repréſenteront les différences de la plus grande viteſſe aux viteſſes reſtantes, c'eſt-à-dire, les ordonnées de la logarithmique dont nous avons parlé dans les Corollaires précédens ; or je dis que ſi de tous les points P, qui ſont les extrémités des viteſſes reſtantes, on mene les droites PM paralleles à Aa, & que du point A menant la droite aQ, parallele à AB, on ſuppoſe que le rectangle AQ repréſente la plus grande viteſſe, les rectangles AM repréſenteront les viteſſes reſtantes à la fin des tems, & les trilignes hyperboliques NMA repréſenteront les eſpaces parcourus à la fin de ces tems.

En premier lieu les AP ſont à AB comme les viteſſes reſtantes à la fin des tems, ſont à la plus grande viteſſe par la ſuppoſition ; multipliant donc les AP par Aa & la plus grande viteſſe AB par Aa, nous aurons les AP × Aa ſont à AB × Aa, comme les viteſſes reſtantes à la plus grande viteſſe; ainſi les rectangles AM repréſenteront les viteſſes reſtantes.

En ſecond lieu les eſpaces parcourus à la fin des tems ſont comme les $y - u$ (*N.* 444), c'eſt-à-dire comme les tems moins les viteſſes reſtantes ; or les tems ſont les logarithmes des BP ou des ordonnées de la logarithmique dont nous avons parlé dans les Corollaires précédens (*N.* 445), donc par la proprieté de l'hyperbole les tems ſont comme les eſpaces hyperboliques PNaA, ainſi qu'il a été prouvé dans le Calcul Différentiel & Integral, & que nous l'allons bientôt prouver d'une autre façon, puis donc que les eſpaces ſont comme les $y - u$, ou comme les tems moins les viteſſes reſtantes, & que les tems ſont comme les PNaA, & les viteſſes reſtantes comme les PMaA, les eſpaces ſont par conſéquent comme les PNaA moins les PMaA, c'eſt-à-dire, comme les trilignes NMa

Pour prouver que les tems ſont comme les PNaA, nommons AB = Aa = a, AP = u les tems y ; il eſt viſible que a^2, au :: a, u, c'eſt-à-dire le rectangle AQ eſt à chaque rectangle AM comme AB eſt à AP.

De même, ayant trouvé ci-dessus $a = \frac{ady - udy}{du}$ (*N.* 442.), nous avons $dy = \frac{adu}{a-u}$, & multipliant tout par a, nous aurons $ady = \frac{aadu}{a-u}$; or par la proprieté de l'hyperbole nous avons $BP \times PN = BA \times Aa$, mais $BP = a - u$; donc $\overline{a-u} \times PN = aa$, d'où je tire $PN = \frac{aa}{a-u}$, mais $Pp = du$; donc $PN \times Pp = \frac{aadu}{a-u}$ = à l'élement de l'aire PNAa; or nous avons $ady = \frac{aadu}{a-u}$; donc $ay = \int \frac{aadu}{a-u}$, c'est-à-dire, les tems y multipliés par a ou AB, sont égaux aux $\int \frac{aadu}{a-u}$, ou aux aires PNaA; mais les tems y multipliés par la grandeur constante a, sont entr'eux comme les tems y; donc les tems y sont comme les espaces hyperboliques PNaA.

PROPOSITION CXLVI.

451. *Un corps descendant librement vers le centre de la terre, & supposant que les résistances de l'air à chaque instant soient comme les quarrez des vitesses, trouver la courbe qui exprime les vitesses restantes & les vitesses perdues.*

SOLUTION.

Soit AZ (*Fig.* 152.) la ligne des tems AP que nous prendrons arithmetiquement proportionnels, j'éleve en P la perpendiculaire PM que je fais égale à AP, & menant la droite AMX, tous les PM representeront les vitesses que le corps auroit acquises à la fin des tems AP si l'air ne lui résistoit pas. Prenons les PN pour representer les vitesses perdues à la fin des tems AP; la courbe ANY sera la courbe des vitesses perdues, & les NM representeront les vitesses restantes; prenons les QP égaux aux NM, & la courbe AQV sera la courbe des vitesses restantes. Elevons AB perpendiculairement à AZ, & faisant AB d'une grandeur indéterminée, concevons BT parallele à AZ.

Je nomme $AB = a$, $AP = PM = y$, $PN = x$, $NM = y - x = u$; donc $Pp = dy$, $Rn = dx$, & à cause de $x = y - u$, j'ai $dx = dy - du$.

Si je divise les vitesses perdues dx à la fin de chaque instant par des grandeurs z qui soient entr'elles comme ces vitesses, les

quotients $\frac{dx}{z}$ feront des grandeurs conftantes & égales entr'elles. De même les dy, c'eft-à-dire les rm qui font les différences des viteffes acquifes à la fin des inftans fi l'air ne réfiftoit pas étant égaux entr'eux fi je les divife par la grandeur conftante a les quotients $\frac{dy}{a}$ feront auffi égaux entr'eux, d'où je tire $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{a}$ par les raifons apportées dans les propofitions précédentes, & par conféquent $dx = \frac{zdy}{a}$, & mettant cette valeur de dx dans $dx = dy - du$, j'ai $\frac{zdy}{a} = dy - du$, donc $zdy = ady - adu$.

Or par l'hypotèfe les réfiftances font comme les quarrez des viteffes, c'eft-à-dire les viteffes perdues Rn ou dx à la fin des inftans Pp font comme les quarrez des viteffes reftantes NM, ou PQ au commencement de ces inftans ; donc les réfiftances font comme les u^2 ; or les z font comme les dx, & les dx comme les u^2 ; donc les z font comme les u^2, ou comme les $\frac{u^2}{a}$, & fuppofant les z égaux aux $\frac{u^2}{a}$, & mettant cette valeur dans l'équation précédente, j'ai $ady - adu = \frac{u^2dy}{a}$, ou $a^2dy - u^2dy = a^2du$, donc $dy = \frac{a^2du}{a^2 - u^2}$, & c'eft l'équation de la courbe AQV des viteffes reftantes à la fin des AP.

Pour trouver la conftruction de cette courbe, je prens l'indéterminée t, & je fuppofe $u = \frac{at - a^2}{t + a}$, ce que je fais, parce qu'en prenant d'une part la différence de cette équation & de l'autre l'élevant au quarré, puis mettant dans $dy = \frac{a^2du}{a^2 - u^2}$ les valeurs de du & u^2, j'aurai une équation plus fimple, ainfi qu'on va voir par le calcul.

$$u = \frac{at - a^2}{t + a}$$

$$du = \frac{atdt + a^2dt - atdt + a^2dt}{\overline{b + a}^2}$$

$$du = \frac{2a^2dt}{\overline{t + a}^2}$$

$$u^2 = \frac{a^2tt - 2a^3t + a^4}{\overline{t + a}^2}$$

$$a^2 - u^2 = a^2 - \frac{a^2tt + 2a^3t - a^4}{tt + 2at + aa}$$

$$a^2 - u^2 = \frac{a^2tt + 2a^3t + a^4 - a^2tt + 2a^3t - a^4}{tt + 2at + aa} = \frac{4a^3t}{\overline{t + a}^2}$$

$$dy = \frac{a^2du}{a^2 - u^2} = \frac{2a^4dt}{4a^3t} = \frac{\frac{1}{2}adt}{t}$$

Je

Je prens donc la différence de $u = \frac{at - a^2}{t + a}$ laquelle eſt $du = \frac{2a^2dt}{\overline{t+a}^2}$.

Je prens de même le quarré de u, & j'ai $u^2 = \frac{a^2tt - 2a^3t + a^4}{\overline{t+a}^2}$, & ſubſtituant les valeurs de u & de u^2 dans $dy = \frac{a^2du}{a^2 - u^2}$, j'ai $dy = \frac{\frac{1}{2}adt}{t}$, d'où je tire $\frac{tdy}{dt} = \frac{a}{2}$ qui eſt l'expreſſion de la ſoutangente d'une logarithmique dont $\frac{1}{2}a$ eſt l'unité.

Je décris donc une logarithmique KBE, dont EF $= \frac{1}{2}a$ eſt l'unité, l'aſymptote eſt la droite ZF qui paſſe par le point B, ainſi OP $= t$, $uo = dt$, P$p = u$O $= dy$, & menant la tangente Og, les triangles ſemblables Ouo, Opg donnent uo, uO :: Op; pg, ou dt, dg :: t, $\frac{tdy}{dt} = \frac{1}{2}a$; or puiſque OP $= t$, ſi du point B je mene BT parallele à AZ, j'ai SO $=$ OP $-$ SP $= t - a$, & comme j'ai fait $u = \frac{at - a^2}{t + a}$ qui donne $t + a$, $t - a$ :: a, u, il s'enſuit que ſi je prens une quatriéme proportionnelle aux trois grandeurs $t + a$, $t - a$, a, c'eſt-à-dire, à PO + AB, OS & AB & que je la porte ſur OP de P en Q cette quatriéme proportionnelle, PQ ſera la viteſſe reſtante à la fin du tems AP, & faiſant la même choſe à la fin de tous les AP, j'ai la courbe AQV des viteſſes reſtantes.

C'eſt pourquoi prolongeant les OP, & faiſant les PM égaux aux AP, puis prenant les PM égaux aux PQ, les PN ſeront les viteſſes perdues à la fin des AP.

COROLLAIRE I.

452. *La viteſſe reſtante* PQ *ne peut être égale* à AB *qu'après un tems infini.*

Puiſque nous avons OP + BA, OS :: BA, PQ, ou OS + 2BA, OS :: BA, PQ; donc quand on aura BA $=$ PQ, on aura auſſi OS + 2BA $=$ OS; or cela ne ſçauroit être à moins que 2BA ne devienne infiniment petit par rapport à OS, donc ce ne ſera qu'à l'infini qu'on aura BA $=$ PQ; car 2BA ne peut devenir infiniment petit par rapport à OS que lorſque OS devient infiniment grand.

COROLLAIRE II.

453. Il suit du Corollaire précédent que BT est l'asymptote de la courbe AQV, & que AB est la plus grande vitesse que le corps puisse acquerir, mais qu'il n'acquerra jamais, puisqu'il faudroit pour cela un tems infini.

COROLLAIRE III.

454. *La difference de la vitesse restante* PQ *à la plus grande vitesse* AB *est à la vitesse restante* PQ *comme le double de la plus grande vitesse* AB *est à la portion* OS *de l'ordonnée de la logarithmique.*

Par le premier Corollaire, nous avons OS + 2BA, OS :: AB, PQ ; donc AB — PQ, PQ :: OS + 2BA — OS, OS, ou SQ, FQ :: 2BA, OS.

COROLLAIRE IV.

455. *Si l'air ne résistoit point, le corps acquerroit à la fin d'un tems limité la plus grande vitesse qu'il n'acquiert qu'à l'infini lorsque l'air lui résiste.*

La plus grande vitesse AB étant une grandeur finie, on peut trouver un tems AP qui l'exprime ; or dans le mouvement uniformement acceleré, les vitesses acquises à la fin des tems, sont comme les mêmes tems lorsque l'air ne résiste pas ; donc si l'air ne résistoit point, le corps acquerroit à la fin d'un tems fini AP une vitesse égale à AB.

Il faut dire la même chose si les résistances de l'air étoient comme les vitesses.

COROLLAIRE V.

456. *Si l'air ne résistoit point, & que pendant le tems* AP, *le corps se mût uniformement avec une vitesse égale à la vitesse* PM *acquise à la fin de ce tems, l'espace qu'il parcourroit seroit à l'espace parcouru à la fin du tems* AP, *lorsque l'air resiste, comme le rectangle* APMC *est à la figure* AQP.

Les petits tems P*p* étant infiniment petits, le mouvement pendant chacun de ces tems peut être pris pour uniforme, & par conséquent les espaces parcourus pendant ces petits tems sont entr'eux comme les produits des tems par les vitesses, c'est-à-dire comme les *udy* ; donc les espaces parcourus pendant les tems

AP font comme les $\int udy$, mais udy eft l'élement de l'aire AQP, donc $\int udy$ eft l'aire AQP; donc les efpaces parcourus à la fin des tems AP font comme les aires AQP, lorfque l'air réfifte; or lorfque l'air ne refifte pas, les rectangles APMC font comme les efpaces que le corps parcourroit d'un mouvement uniforme avec les viteffes acquifes à la fin des tems AP; donc, &c.

Il faut dire la même chofe lorfque les réfiftances de l'air font comme les viteffes.

COROLLAIRE VI.

457. Si du point A pris pour centre & avec un rayon = AB, on décrit le demi-cercle BDb, & que du point Q on mene QD parallele à AP, & du point D la droite DH parallele à AB, il eft vifible que l'arc Da fera le complement au quart de cercle de l'arc BD, que DH = QP fera le finus droit de ce complement, Bh le finus verfe de l'arc BD, & hb l'excès du diametre Bb fur le finus verfe Bh. Or je dis que l'efpace parcouru à la fin du tems AP correfpondant à la viteffe reftante QP = DH fera comme la différence des logarithmes du finus verfe Bh & de l'excès hb du diametre fur ce finus verfe.

Les efpaces parcourus à la fin des tems Pp font comme les udy par le Corollaire précédent; or nous avons trouvé (*N.* 451.) $dy = \frac{a^2du}{a^2 - u^2}$, donc les udy font comme les $\frac{a^2udu}{a^2-u^2}$, ou comme les $\frac{udu}{a^2-u^2}$; mais les $\frac{udu}{a^2-u^2}$ font comme les $\frac{\frac{1}{2}adu + \frac{1}{2}udu}{a-u \times a+u} - \frac{\frac{1}{2}adu - \frac{1}{2}udu}{a-u \times a+u}$, ou comme les $\frac{\frac{1}{2}du}{a-u} - \frac{\frac{1}{2}du}{a+u}$; donc les udy font comme $\frac{a^2udu}{a^2-u^2}$, ou comme $\frac{\frac{1}{2}a^2du}{a-u} - \frac{\frac{1}{2}a^2du}{a+u}$, ou comme les $\frac{\frac{1}{2}du}{a-u} - \frac{\frac{1}{2}du}{a+u}$, ou comme les $\frac{du}{a-u} - \frac{du}{a+u}$, c'eft-à-dire les efpaces à la fin des tems Pp font comme les $\frac{du}{a-u} - \frac{du}{a+u}$, & par conféquent les efpaces parcourus à la fin des tems AP, c'eft-à-dire les $\int udy$ font comme les $\int \frac{du}{a-u} - \int \frac{du}{a+u}$.

Or par la conftruction DH = hA = QP = u, donc Bh = AB − hA = $a - u$, & hb = hA + Ab = $a + u$; donc les $\int udy$ font comme les $\int \frac{dh\text{A}}{\text{B}h} - \int \frac{dh\text{A}}{hb}$, c'eft-à-dire, comme les différences des logarithmes de Bh, & de hb, ainfi que je vais le montrer.

Je décris une logarithmique ABC (*Fig.* 153.) dont la soutangente ou la grandeur prise pour l'unité est BD $= a$. Je prens D pour l'origine des abscisses que je nomme x, & dont les positives vont de D en F, & les négatives de D en E ; je prens l'ordonnée FA $= a + u$, & l'ordonnée EC $= a - u$; donc Ff $=$ AR $= dx$, R$a = du$, E$e = -dx$, C$r = + du$, je mene la tangente Ad, & les triangles semblables aRA, AFd, donnent Ra, RA :: AF, Fd ; donc du, dx :: $a + u$, $\frac{\overline{a+u} \times dx}{du} =$ Fd $= a$, d'où je tire $dx = \frac{adu}{a+u} = \frac{du}{a+u}$, à cause de $a = 1$; donc $x = \int \frac{du}{a+u}$; en agissant de la même façon je trouve DE $= -x = \int \frac{du}{a-u}$, mais x est le logarithme de FA $= a + u$, & $-x$ le logarithme de CE $= a - u$; donc $\int \frac{du}{a-u} - \int \frac{du}{a+u}$ est la différence du logarithme de CE au logarithme de FA ; & par conséquent l'espace parcouru à la fin du tems AP (*Fig.* 152.) est comme la différence du logarithme de Bh au logarithme de hb.

COROLLAIRE VII.

458. *Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent, les espaces parcourus pendant les tems* AP *sont comme les logarithmes des sinus* hD.

Par la proprieté du cercle $\overline{AB}^2 - \overline{hA}^2 = \overline{hD}^2$, ainsi faisant hD $= t$, nous aurons $t^2 = a^2 - u^2$, & $2tdt = -2udu$, & $-tdt = udu$, & mettant ces valeurs dans $\frac{a^2 udu}{a^2 - u^2} = udy$, nous aurons $udy = -\frac{a^2 tdt}{tt} = -\frac{a^2 dt}{t}$; donc les espaces parcourus pendant les tems AP, c'est-à-dire les $\int udy$ sont comme les $\int -\frac{a^2 dt}{t}$, ou comme les $\int -\frac{dt}{t}$, & par conséquent comme les Logarithmes des t ou des sinus hD, ce qu'on prouvera de même que dans le Corollaire précédent ; car si l'on suppose l'ordonnée CE de la logarithmique (*Fig.* 153.) égale à t, la soutangente sera $-\frac{tdx}{dt} = a$, d'où l'on tire $dx = -\frac{adt}{t} = -\frac{dt}{t}$ en supposant $a = 1$.

COROLLAIRE VIII.

459. Par le Corollaire VIe. les $\int u dy$ sont comme les $\int \frac{du}{a-u} - \int \frac{du}{a+u}$, c'est-à-dire, comme la différence des logarithmes de $a-u$, $a+u$; or comme la soustraction des logarithmes indique la division des grandeurs dont ils sont les logarithmes, il s'ensuit que $\int \frac{du}{a-u} - \int \frac{du}{a+u} = -l, \overline{a-u} - l, \overline{a+u} = -l, \frac{a-u}{a+u}$, c'est-à-dire, que les espaces sont comme les logarithmes des grandeurs $a-u$ divisées par les $a+u$, ou des B*h* divisés par les *hb*.

COROLLAIRE IX.

460. *Les mêmes choses étant posées, les tems* AP *sont comme les différences des logarithmes de hb & de h*B, *ou comme les logarithmes des grandeurs hb divisées par les* B*h.*

Nous avons trouvé (*N.* 451.) $dy = \frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$; or $\frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$ est comme $\frac{\frac{1}{2}a^2 du + \frac{1}{2}u^2 du}{\overline{a-u} \times \overline{a+u}} + \frac{\frac{1}{2}a^2 du - \frac{1}{2}u^2 du}{\overline{a-u} \times \overline{a+u}}$, ou comme $\frac{\frac{1}{2} adu}{a-u} + \frac{\frac{1}{2} adu}{a+u}$, donc les dy sont comme les $\frac{\frac{1}{2} adu}{a-u} + \frac{\frac{1}{2} adu}{a+u}$, ou comme les $\frac{du}{a-u} + \frac{du}{a+u}$; donc les y sont comme les $\int \frac{du}{a-u} + \int \frac{du}{a+u}$; or par les deux Corollaires précédens $\int \frac{du}{a-u} = -l, \overline{a-u}$, & $\int \frac{du}{a+u} = l, \overline{a+u}$; donc les y sont comme les $-l, \overline{a-u} + l, \overline{a+u}$, ou comme les $l, \overline{a+u} - l, \overline{a-u}$, ou enfin comme les $l, \frac{a+u}{a-u}$.

COROLLAIRE X.

461. Les $a+u$ expriment les vitesses restantes à la fin des tems AP augmentées de la grandeur AB, & les $a-u$ expriment les différences de AB & des vitesses restantes ; donc les tems sont comme les logarithmes des vitesses restantes augmentées, divisées par les différences de la plus grande vitesse AB, & des vitesses restantes.

COROLLAIRE XI.

462. *Les augmentations du des vitesses restantes à la fin des tems* P*p sont aux augmentations dy des vitesses que le corps acquerroit à*

la fin des mêmes tems si l'air ne résistoit pas comme les quarrez de AB *moins les quarrez des vitesses restantes* u *sont aux quarrez* $\overline{AB}^2$.

Nous avons trouvé (*N.* 451.) $a^2dy - u^2dy = a^2du$, d'où l'on tire cette analogie $du, dy :: a^2 - u^2, a^2$, donc, &c.

COROLLAIRE XII.

463. *Si l'on décrit entre les asymptotes* AB, AC, (Fig. 154.) *une hyperbole équilatere* FMN *dont la puissance* AD, *ou* DF *soit égale à la plus grande vitesse* a *que le corps peut acquerir, & qu'après avoir décrit le quart de cercle* AEF, *on prenne les* DH *égaux aux vitesses restantes à la fin des tems. Je dis qu'élevant le sinus* HE, *& menant par* E *la droite* RM, *les espaces hyperboliques* FBRM *seront les espaces parcourus à la fin des tems correspondans aux vitesses restantes* DH.

Nous avons $AB = AD = DF = ED = BF = a$, $DH = u$; donc dans le triangle rectangle DEH qui donne $\overline{HE}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DH}^2$, nous avons $\overline{HE}^2 = a^2 - u^2$, & par conséquent $HE = RA = \sqrt{a^2 - u^2}$; donc $BR = BA - RA = a - \sqrt{a^2 - u^2}$; & menant rm infiniment proche de RM, la différence de BR sera $\frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}}$. Or par la proprieté de l'hyperbole, j'ai $AR \times RM = \overline{AD}^2$, ou $RM \times \sqrt{a^2 - u^2} = a^2$; donc $RM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}$, donc l'élement $Rr \times RM$ de l'aire RPFM, est $\frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}} \times \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{a^2udu}{a^2 - u^2}$, & l'aire est $\int \frac{a^2udu}{a^2 - u^2}$; or les espaces parcourus à la fin des tems correspondans aux vitesses restantes DH, sont comme les $\int \frac{a^2udu}{a^2 - u^2}$ (*N.* 457.), donc ces espaces sont comme les aires hyperboliques RBFM.

Quand la vitesse restante DH devient égale à DA, l'espace hyperbolique BFRM devient infini, ce qui fait voir que le corps ne peut avoir une vitesse restante égale à $AD = a$ qu'à l'infini, de même que nous l'avons trouvé ci-dessus.

COROLLAIRE XIII.

464. *Si l'on prend les* BR (Fig. 154.) *troisiemes proportionnelles à la plus grande vitesse* $AD = a$, *& aux vitesses que le corps auroit acquises, si l'air ne résistoit point, à la fin des tems correspondant*

aux viteſſes reſtantes DH, *les eſpaces hyperboliques ſeront égaux aux eſpaces parcourus à la fin des tems correſpondans aux viteſſes reſtantes.*

Par la ſuppoſition les BR ſont comme les $\frac{u^2}{a}$; donc les AR $=$ AB $-$ BR ſont comme les $a - \frac{u^2}{a}$, ou comme les $\frac{a^2 - u^2}{a}$, & les différences des BR ſont comme les $\frac{2udu}{a}$; or par la proprieté de l'hyperbole $AR \times RM = \overline{AD}^2$, ou $\frac{a^2 - u^2}{a} \times RM = a^2$; donc $RM = \frac{a^3}{a^2 - u^2}$, & par conſéquent l'élement MR*rm* de l'aire $FBRM = \frac{a^3}{a^2 - u^2} \times \frac{2udu}{a} = \frac{2a^2udu}{a^2 - u^2}$; donc l'aire RM*rm* $= \int \frac{2a^2udu}{a^2 - u^2}$, ainſi les eſpaces hyperboliques FBRM ſont comme les $\int \frac{2a^2udu}{a^2 - u^2}$, ou comme les $\int \frac{a^2udu}{a^2 - u^2}$, c'eſt-à-dire comme les eſpaces parcourus à la fin des tems correſpondans aux viteſſes reſtantes DH par le Corollaire précédent.

CHAPITRE XIV.

Des Machines ſimples.

DEFINITIONS.

465. ON appelle *Machine* tout ce qui ſert à faciliter le mouvement, de façon qu'on y employe moins de force ou moins de tems qu'il ne faudroit ſans ce ſecours.

466. Entre les Machines, les unes ſont appellées *ſimples*, & les autres *compoſées*, parce que les ſimples s'y trouvent combinées.

Les Machines ſimples ſont au nombre de cinq, à ſçavoir; le *Levier*, la *Roue dans ſon aiſſieu*, la *Poulie*, la *Vis*, & le *Coin*.

Les Machines *compoſées* ſont toutes les autres Machines dans leſquelles on combine deux ou pluſieurs Machines ſimples, & celles-ci peuvent être en nombre infini, car outre le grand nombre de celles qu'on a déja trouvées, les Sçavans en inventent tous les jours.

467. Le *Levier* eſt tout bâton ou barre de fer qu'on regarde

comme une ligne droite inflexible sans pesanteur; & qui a un point d'appuy autour duquel il peut tourner: par exemple, si la droite AB (*Fig.* 155.) tourne autour du point immobile C, cette droite est un levier.

Il y a trois sortes de Leviers, le Levier de *la premiere espece*, le Levier de *la seconde espece*, & le Levier de *la troisiéme espece.*

Le Levier de la *premiere espece* est celui dont le point d'appuy C est entre le poids ou le fardeau qui est en B, & la puissance A qui soutient ou qui enleve ce poids (*Fig.* 155.)

Le Levier de la *seconde espece* est celui dont le point d'appuy C (*Fig.* 156.) est à l'une de ses extremités, & le poids B est entre la puissance A & le point C.

Enfin le Levier de la *troisiéme espece* est celui où la puissance A est placée entre le point d'appuy C & le poids B (*Fig.* 157.)

468. La *Roue dans son aissieu* est une Roue ABCD (*Fig.* 158.) dont les rayons sont enchassés dans l'aissieu EF, ce qui la distingue des Roues des Carrosses & des autres voitures dont on a coutume de se servir, car dans celles-ci l'aissieu n'est pas attaché aux rayons.

469. La *Poulie* est un cercle ABCD (*Fig.* 159.) qui tourne librement autour de son aissieu: on creuse son épaisseur autour de la circonférence, afin que la corde PBQ par le moyen de laquelle la puissance P tire le corps Q ne puisse tomber ni d'un côté ni de l'autre, son aissieu est attaché à une piece de fer ou de bois, laquelle est suspendue à un point fixe R.

470. Si on entoure en façon de Spirale un cylindre GH (*Fig.* 160.) avec un prisme triangulaire ABCDE qu'il faut concevoir comme flexible, & dont le côté ABCE est le côté qui s'applique sur la surface du cylindre, on aura un solide GH qu'on nomme *Vis.* Ce solide s'enchasse dans un autre solide XZ qu'on creuse dans le milieu, & dans le creux duquel on fait une autre vis, de façon que les élévations de GH s'engrainent dans les enfoncemens de cette seconde vis, ce qui fait qu'en tournant la piece XZ, on peut la faire monter ou descendre d'un bout à l'autre de HG; & de même si XZ est immobile, & qu'on fasse tourner HG, la piece TV à laquelle tient HG s'approchera jusqu'à toucher XZ, ou s'en éloignera jusqu'à la distance GH selon le sens qu'on fera tourner HG: on nomme communement la vis HG, *Vis mâle*, & la piece XZ, *Vis femelle.*

471. Le *Coin* est un prisme triangulaire ABCDEF (*Fig.* 161.) dont

dont la ligne EF s'appelle la *pointe*, & la surface ABCD, se nomme la *tête*.

DU LEVIER.

PROPOSITION CXLVII.

472. *Si une puissance* A (Fig. 155. 156.) *soutient un poids* B *à l'aide d'un Levier de la premiere ou seconde espece, dont le point* C *est le point d'appuy, la puissance est au poids réciproquement comme la distance* BC *du poids* B *au point d'appuy* C *est à la distance* AC *de la puissance* A *au même point, en supposant les directions de la puissance & du poids paralleles entr'elles.*

DEMONSTRATION.

En premier lieu, supposons que le Levier AB (*Fig.* 155.) soit du premier genre, & qu'étant parallele à l'horison, la force A tire ou éleve le levier avec une direction perpendiculaire, de même que la pesanteur du poids B pousse le levier vers le centre de la terre avec une direction perpendiculaire. La puissance A ne peut faire décrire au point A l'arc AE, que le poids B ne décrive l'arc BD; ainsi les arcs AE, BD décrits en même tems, marquent les vitesses de la puissance ou d'un poids égal à la puissance A, & du poids B; or à cause des angles égaux ACE, BCD, les secteurs ACE, BCD, sont semblables, donc AC, CB :: AE, BC; ainsi les rayons AC, CB, étant entr'eux comme les arcs AE, BD, peuvent exprimer les vitesses; mais par la supposition la force de la puissance A est égale à la force du corps B, puisque l'un & l'autre se tiennent en équilibre, donc les quantités de mouvement de ces deux forces sont égales, & par conséquent $A \times AC = B \times BC$, d'où je tire A, B :: BC, AC.

Si le Levier est dans la position ED inclinée à l'horison, & que la force A de même que le poids B ait une direction EH perpendiculaire à l'horison, la puissance A n'agit pas plus sur EC qu'elle n'agiroit sur HC perpendiculaire à sa direction, & le poids B n'agit pas plus sur CD qu'il n'agiroit sur CO perpendiculaire à sa direction; concevant donc que la puissance & le poids soient transportés en H & O sur le levier horizontal HO, la vitesse de A sera exprimée par le rayon HC, & la vitesse de B par le rayon CO, mais à cause des triangles semblables ECH, DCO, on a CH, CO :: CE, CD, donc CE, CD, peuvent expri-

mer les viteſſes de A & B, de même que CH, CO; puis donc que par la ſuppoſition les quantités de mouvement de A & B ſont égales, il s'enſuit que A × EC = B × CD, d'où l'on tire A, B :: CD, EC.

En ſecond lieu, ſi le Levier eſt de la ſeconde eſpece (*Fig.* 156.), la puiſſance A ne peut décrire l'arc AE que le poids B ne décrive l'arc BD, ainſi ces arcs marqueront les viteſſes de A & de B; or à cauſe de l'angle A commun aux deux ſecteurs AEC, BDC, on a AC, BC :: AE, BD, donc AC, BC, peuvent exprimer les viteſſes de A & B, mais par la ſuppoſition, les quantités de mouvement de A & B ſont égales; donc A×AC = B×BC, d'où l'on tire A, B :: BC, AC.

COROLLAIRE I.

473. Dans le Levier de la premiere eſpece (*Fig.* 155.), ſi AC eſt plus grand que BC, c'eſt-à-dire, ſi le point d'appuy C eſt plus près de B que de A, la puiſſance A eſt moindre que le poids B, puiſque A, B :: BC, AC :: CD, EC, & dans le Levier de la ſeconde eſpece, la puiſſance A eſt toujours moindre que le poids B, d'où il ſuit que pour peu qu'on augmente la puiſſance dans l'un & l'autre levier, la puiſſance enlevera le poids, & que par conſéquent ces deux leviers ſervent à ſoutenir & enlever un poids avec une force moindre que celle qu'il faudroit employer ſans ce ſecours.

COROLLAIRE II.

474. Dans le Levier de la troiſiéme eſpece (*Fig.* 157.) la puiſſance A qui ſoutient le poids B eſt toujours plus grande que ce poids B; car BC eſt toujours plus grand que AC, or A × AC = B × BC, & par conſéquent A, B :: BC, AC, donc A eſt plus grand que B, d'où il ſuit que le Levier ne peut être mis au nombre des Machines, puiſqu'il demande une force plus grande pour ſoutenir ou pour élever le corps B que l'on ne l'emploieroit ſans ſon ſecours.

COROLLAIRE III.

475. Si le Levier de la premiere eſpece AB (*Fig.* 162.) étant horizontal, la puiſſance A tiroit avec une direction AE qui ne fut pas perpendiculaire au levier ſur lequel la direction du poids B eſt alors perpendiculaire, on tireroit du centre C la droite CE perpendiculaire ſur la direction AE, & comme la puiſſance

A n'agit pas plus sur le levier AC qu'elle n'agiroit sur le levier EC, on regarderoit la puissance A comme attachée à l'extremité E d'un levier recourbé ECB, & si on trouvoit A, B :: CB, CE, on diroit que la puissance soutiendroit le poids, car la puissance A mise en E ne peut décrire l'arc EF que la puissance B ne décrive l'arc BH ; ainsi les arcs EF, BH, exprimeront les vitesses de A & B ; or les angles EBF, BCH, seront égaux, car à cause de l'inflexibilité du levier, les angles ECB, FCH, sont égaux ; donc retranchant l'angle commun FCB, il reste ECF=BCH, ainsi les secteurs ECF, BCH, étant semblables, on a EC, CB :: EF, BH, & par conséquent les rayons EC, CB, peuvent exprimer les vitesses de A & B ; mais par la supposition A, B :: CB, CE ; donc A×CE=B×CB, c'est-à-dire les quantités de mouvement de A & B sont égales, & par conséquent la puissance A soutient le poids B ; d'où il suit que si le bras EC est plus grand que CB, la puissance A est moindre que le poids B, & que pour peu qu'on augmente cette puissance, elle enlevera le poids.

COROLLAIRE IV.

476. Si le Levier AC (*Fig.* 163.) étoit incliné à l'horizon, & que la direction de la puissance ne fut pas parallele à celle du poids, laquelle est perpendiculaire, à l'horizon, on meneroit du centre C de mouvement la droite CE perpendiculaire sur la direction du poids B, & la droite CD perpendiculaire sur la direction de la puissance A, & considerant la puissance & le poids comme étant mis aux extremités E, D, du levier recourbé ECD, on diroit que la puissance soutient le poids, si on trouvoit A, B :: CD, CE, ce qu'on démontrera comme ci-dessus.

COROLLAIRE V.

477. De même si dans un levier AC horizontal de la seconde espece (*Fig.* 164.) la direction AE de la puissance A n'étoit pas perpendiculaire sur le Levier, on meneroit du point C la droite CE perpendiculaire à cette direction, & considerant la puissance A comme attachée à l'extremité E du levier recourbé ECB, on diroit que la puissance soutient le poids si on trouvoit A, B :: BC, CE, ce qui se démontre de même.

COROLLAIRE VI.

478. Et si le levier AC de la seconde espece étant incliné à l'horizon (*Fig.* 165.) la direction AE de la puissance n'étoit pas parallele à la direction du poids, on meneroit du centre C la droite CE perpendiculaire à la direction de la puissance, & la droite CH perpendiculaire à la direction du poids B, & considerant la puissance & le poids comme attachés aux extremités E, H, du levier recourbé ECH, on diroit que la puissance soutient le poids, si on trouvoit A, B :: HC, CE.

COROLLAIRE VII.

479. Des Corollaires précédens, il suit qu'afin que la puissance égale au poids soutienne ou enleve le poids, il faut que la puissance soit attachée au plus long bras du levier, soit qu'il soit décrit ou recourbé.

REMARQUE.

480. Jusqu'ici nous avons consideré le levier comme n'ayant aucune pesanteur, mais comme cela est faux dans la pratique, nous allons voir dans les Propositions suivantes de quelle maniere on doit corriger l'erreur qui proviendroit de cette supposition.

PROPOSITION CXLVIII.

481. *Connoissant la pesanteur d'un levier* AB *de la premiere espece* (Fig. 166.), *la distance de son centre de gravité* Q *au point* C *qui est le centre de mouvement, le poids* B, *la distance* BC *de ce poids au point* C, *& la distance* AC, *connoître la puissance qui doit être mise en* A *pour soutenir les poids* B, *avec une direction parallele à la direction du poids* B.

SOLUTION.

Je nomme G la pesanteur du levier que je considere comme réunie en Q, & faisant cette analogie CB, CQ :: G, $\frac{G \times CQ}{CB}$, le quatriéme terme est la partie du poids B que la pesanteur du levier peut soutenir; c'est pourquoi le reste du poids B que la puissance A doit soûtenir est $B - \frac{G \times CQ}{CB}$; je fais donc cette autre analogie AC, CB :: $B - \frac{G \times CQ}{CB}$, $\frac{CB \times B - G \times CQ}{AC}$, & ce qua-

triéme terme est égal à la puissance A que je cherche ; ce qui est évident par les principes que nous avons établis.

Soit par exemple G = 10 ℔, B = 300 ℔, QC = 2, CB = 1 & AC = 5 ; la premiere analogie est donc 1, 2 :: 10, 20 $= \frac{G \times CQ}{CB}$, je retranche 20 de 300 & le reste est 280 = B — $\frac{G \times CQ}{CB}$, c'est pourquoi la seconde analogie est 5, 1 :: 280, $\frac{280}{5}$ = 56, ainsi la puissance A doit être comme un poids de 56 ℔.

COROLLAIRE I.

482. Si la puissance A étoit connue, & qu'on demandât le poids B qu'elle peut soûtenir, on feroit comme ci-dessus CB, CQ :: G, $\frac{G \times CQ}{CB}$, & le quatriéme terme seroit la partie du poids B cherché que la pesanteur du levier peut soûtenir; ensuite on feroit cette autre analogie CB, CA :: A, $\frac{A \times CA}{CB}$, & le quatriéme terme seroit le reste du poids cherché ; c'est pourquoi ajoûtant les deux quatriémes termes ensembles la somme $\frac{G \times CQ}{CB}$ + $\frac{A \times CA}{CB}$ seroit le poids entier.

Soit par exemple A = 56 ℔, G = 10 ℔, QC = 2, CB = 1, & AC = 5, la premiere analogie est par conséquent 1, 2 :: 10, 20 = $\frac{G \times CQ}{CB}$, & la seconde est 1, 5 :: 56, 280 = $\frac{A \times CA}{CB}$; ajoûtant donc 20 à 280, la somme 300 est la valeur du poids B.

Car si le levier n'avoit point de pesanteur, la puissance A ne pourroit soutenir que 280 ℔ ; or la pesanteur du levier étant du côté de A peut soutenir 20 ℔, donc la puissance & la pesanteur agissant ensemble sur le bras AC, peuvent soutenir 280 + 20 ℔, c'est-à-dire 300 ℔.

COROLLAIRE II.

483. Si l'on connoissoit la puissance A, le poids B, le centre de gravité Q du levier, la longueur AB, & qu'on demandât le centre de gravité C commun à la puissance & aux poids, on supposeroit la pesanteur G réunie au point Q, puis on chercheroit le centre de gravité Z commun à la pesanteur & à la puissance A, on retrancheroit AZ de AB, & regardant la pesanteur & la puissance comme réunies au point Z, on couperoit ZB en C en

deux parties ZC, CB reciproques au poids B, & à la somme de la pesanteur & de la puissance, c'est-à-dire, on feroit ZC, CB :: B, A+G, ou ZC+CB, CB :: B+A+G, A+G.

Soit par exemple A = 56 ℔, G = 10 ℔, B = 300, AB = 6, donc AQ = 3, car le levier étant homogene dans toutes ses parties, son centre de gravité le coupe en deux parties égales; pour trouver donc sur AQ le centre de gravité commun à la puissance & à la pesanteur, je dis 56+10, ou 66, 10 :: 3, $\frac{30}{66} = \frac{5}{11}$ = AZ, je retranche $\frac{5}{11}$ de 6, & le reste est $6 - \frac{5}{11} = \frac{66-5}{11} = \frac{61}{11}$ = ZB; je fais ensuite 300+66, ou 366, 66 :: $\frac{61}{11}$, $\frac{4026}{4026}$ = 1 = CB; ainsi faisant CB = 1, le point C est le point autour duquel la puissance & le poids sont en équilibre.

PROPOSITION CXLIX.

484. *Connoissant la pesanteur d'un levier* AC *de la seconde espece* (Fig. 167), *son centre de gravité* Q, *le poids* B, *la distance* BC *de ce poids au point d'appui* C, *& la distance* AC *du point* A *où l'on veut mettre la puissance, trouver la puissance* A *qui peut soutenir le poids* B, *en supposant la direction de* A *parallele à celle de* B.

SOLUTION.

Je nomme G la pesanteur que je conçois réunie au point Q, je cherche la puissance qui pourroit soutenir la pesanteur seule G en faisant AC, QC :: G, $\frac{G \times QC}{AC}$, & le quatriéme terme est la puissance qui soutiendroit G; je fais abstraction de la pesanteur du levier, & je cherche la puissance qui peut soutenir B en faisant AC, BC :: B, $\frac{B \times BC}{AC}$, & le quatriéme terme est la puissance qui peut soutenir B; j'ajoûte ensemble les deux quatriémes termes & la somme $\frac{G \times QC}{AC} + \frac{B \times BC}{AC}$ est la puissance cherchée.

Soit AC = 6, QC = 3, BC = 1, B = 300 ℔, G = 10 ℔; la premiere analogie est donc 6, 3 :: 10, $\frac{3 \times 10}{6} = 5 = \frac{G \times QC}{AC}$, & la seconde est 6, 1 :: 300, $\frac{300}{6} = 50 = \frac{B \times BC}{AC}$, ajoûtant donc ensemble 5 & 50, la somme 55 est la puissance qu'il faut mettre en A pour soutenir le poids B, ce qui n'a pas besoin de demonstration.

COROLLAIRE.

485. Si la puiſſance A étoit connue & le poids B inconnu, on chercheroit la puiſſance $\frac{G \times QC}{AC}$ qui peut ſoutenir la peſanteur G, on retrancheroit cette puiſſance de la puiſſance A & le reſte ſeroit $A - \frac{G \times QC}{AC}$, après quoi on feroit BC, AC :: $A - \frac{G \times QC}{AC}$, $A \times AC - G \times QC$, & le quatriéme terme feroit le poids B cherché.

Soit AC = 6, QC = 3, BC = 1, G = 10 ℔, & A = 55, donc $\frac{G \times QC}{AC} = 5$, & par conſéquent $A - \frac{G \times QC}{AC} = 55 - 5 = 50$; donc la ſecond analogie eſt 1, 6 :: 50, 300 = B.

PROPOSITION CL.

486. *Connoiſſant les bras* AC, CB *d'un levier recourbé* ACB (*Fig.* 168.) *la peſanteur du levier & la puiſſance qu'il faut mettre en* A, *connoître le poids* B *que cette puiſſance peut ſoutenir en ſuppoſant que la direction de la puiſſance eſt perpendiculaire au levier.*

SOLUTION.

Ce problême comprend deux cas que nous allons reſoudre ſéparement.

En premier lieu, ſi le bras AB eſt horizontal, la direction du poids B ſera auſſi perpendiculaire, ainſi les bras AC, BC exprimeront les viteſſes de A & de B, cela poſé; je coupe les deux bras chacun en deux parties égales aux points E, F, dans leſquels je conçois que leur peſanteur ſont réunies, & comme nous ſuppoſons que les bras AC, CB ſont d'une égale épaiſſeur par tout & d'une matiere homogene, leurs longueurs AC, CB exprimeront leurs peſanteurs; ainſi menant la droite EF je la coupe en O, enſorte que EO, OF :: CB, AC, & par conſéquent le point O eſt le centre commun de gravité des bras AC, CB, c'eſt-à-dire du levier ACB; je conçois que la peſanteur du levier ſoit réunie en O; & comme ſa direction eſt perpendiculaire à l'horiſon, j'abaiſſe du point O la perpendiculaire OH ſur BC, & cette perpendiculaire tombe, ou entre B & C, ou ſur BC prolongé du côté de C, ou ſur BC prolongé du côté de B, ce qui fait encore trois cas.

Suppoſons donc que OH tombe ſur BC prolongé du côté de C, il eſt viſible que la peſanteur G du levier n'agit ſur le bras AC que comme elle agiroit ſur HC, ainſi je cherche la diſtance HC, ce qui peut ſe trouver aiſément, parce que dans le triangle ECF, les côtés EC, CF ſont connus de même que l'angle compris ECF, & par conſéquent le côté EF eſt connu de même que ſes ſegmens EO, OF, qui ſont entr'eux comme CB eſt à CA par la conſtruction, d'autre part dans le triangle rectangle HOF l'hypotèneuſe OF eſt connue, & l'angle aigu OFH qui lui eſt commun avec le triangle ECF, ainſi les trois angles de ce triangle rectangle étant connus, on peut connoître aiſément le côté HF, duquel retranchant CF, qui eſt connu, on a la diſtance cherchée HC; je multiplie donc G par HC & le produit $G \times HC$ eſt le moment de G par rapport à C, ſoit que G ſoit ſur HC ou ſur PC, c'eſt-à-dire, ſoit qu'il ſoit en H ou en P; je prens le moment $A \times AC$ de la puiſſance A par rapport à C, & ajoûtant ce moment au moment de G, la ſomme $G \times HC + A \times AC$ eſt le moment total de la puiſſance & de la peſanteur. Or afin que B contrebalance ce moment, il faut qu'il ait un moment égal à $G \times HC + A \times AC$, diviſant donc par la diſtance CB, le quotient $\frac{G \times HC + A \times AC}{CB}$ ſera la valeur cherchée du poids B, car en multipliant cette valeur par CB, le produit ſera le moment de B & ce moment ſera le même que celui de $A + G$.

Si la perpendiculaire OH tombe entre C & B (*Fig.* 168), la peſanteur G ſera en H, & par conſéquent la puiſſance A doit ſoutenir non-ſeulement le poids B, mais encore la peſanteur, c'eſt pourquoi on cherchera le moment $G \times CH$ de la peſanteur, & le retranchant du moment $A \times AC$ de la puiſſance A, le reſte $A \times AC - G \times CH$ ſera le moment que le poids B doit avoir afin qu'il y ait équilibre, car ajoûtant à ce moment celui de la peſanteur, on a $A \times AC - G \times CH + G \times CH = A \times AC$, c'eſt-à-dire, le moment total de B & de G égal au moment de A; diviſant donc le moment $A \times AC - G \times CH$ du poids B par ſa diſtance CB, le quotient $\frac{A \times AC - G \times CH}{CB}$ ſera le poids cherché B.

Et ce ſeroit la même choſe ſi la droite OH tomboit ſur CB prolongé du côté de B (*Fig.* 169).

En ſecond lieu, ſi le bras CB du levier ACB (*Fig.* 170,) n'étoit pas horizontal, auquel cas la direction du poids B ne ſeroit pas perpendiculaire ſur ce bras; on tireroit du point C la droite

CD

CD perpendiculaire ſur cette direction, & le poids B agiroit ſur CD de même que ſur CB ; c'eſt pourquoi conſidérant le poids comme étant mis en D, il ſeroit facile de trouver la valeur de ce poids en faiſant CD, AC :: A, $\frac{A \times AC}{CD} = B$, ſi le levier étoit ſans peſanteur.

Maintenant pour corriger l'erreur que la peſanteur négligée peut cauſer ; je cherche le centre de gravité O, commun aux deux bras, & du point O j'abaiſſe OH perpendiculaire ſur DC, & le point H tombe ou entre C & D ou ſur DC prolongé du côté de C, ou ſur CD prolongé du côté de D, ce qui fait encore trois cas dans leſquels toute la difficulté conſiſte à trouver la diſtance HC.

Suppoſons donc que H tombe ſur DC prolongé du côté de C, le triangle ECF peut ſe connoître de même que les ſegmens EO, OF de la droite OF, ainſi qu'il a été dit ci-deſſus. L'angle d'inclinaiſon ACH étant connu, l'angle CPH eſt auſſi connu, puiſqu'à cauſe du triangle rectangle CPH, il eſt le complement à l'angle droit de l'angle PCH; donc dans le triangle EPO l'angle EPO oppoſé au ſommet à l'angle CPH eſt connu, or l'angle PEO commun au triangle PEO & au triangle CEF eſt auſſi connu à cauſe du triangle CEF qui eſt connu, donc le troiſiéme angle EOP eſt auſſi connu, or le côté EO eſt connu, donc on peut connoître aiſément le côté EP, & ce côté étant retranché de la droite EC connue, on connoîtra le reſte PC ou l'hypotèneuſe du triangle rectangle CPH ; or les trois angles de ce triangle ſont connus, donc le côté HC ſera auſſi connu. Prenant donc le moment $G \times HC$ de la peſanteur par rapport à C, & le moment $A \times AC$ de la puiſſance par rapport à C, la ſomme $G \times HC + A \times AC$ ſera le moment que le poids B mis en B ou en D doit avoir; diviſant donc ce moment par ſa diſtance DC le quotient $\frac{G \times HC + A \times AC}{DC}$ ſera le poids cherché.

Si le point H (*Fig.* 171.) tombe entre C & D, on connoîtra le triangle CEF, le côté EF, & les ſegmens EO, OF comme ci-deſſus ; donc l'angle CEP, & l'angle ACD d'inclinaiſon étant connus de même que le côté CE du triangle ECP, le côté CP ſera auſſi connu. Je retranche de l'angle connu ACB l'angle ACP & le reſte eſt l'angle PCF, or les côtés PC, FC qui comprennent cet angle ſont connus, donc le côté FP eſt auſſi

connu, & retranchant FP du segment FO, le reste sera l'hypoténuse connue OP du triangle rectangle OPH; mais à cause du triangle connu PCF l'angle aigu OPH égal à l'angle CPF est connu, donc on connoîtra aisément le côté PH, & ce côté étant ajoûté à PC, la somme sera la distance CH; ainsi prenant le moment $G \times HC$ de la pesanteur, & retranchant ce moment du moment $A \times AC$ de la puissance, le reste $A \times AC - G \times CH$ sera le moment du poids cherché B par les raisons données ci-dessus, donc $\frac{A \times AC - G \times CH}{CD}$ sera le poids cherché B.

Et ce seroit la même chose si le point H tomboit sur CD prolongé du côté de D (*Fig.* 172).

REMARQUE.

487. Dans les trois dernieres Propositions je n'ai parlé que des cas où la direction de la puissance est perpendiculaire au levier, parce qu'il est aisé de reduire tous les autres à ceux-ci.

Par exemple, si le levier étoit de la premiere espece, & que la direction AF de la puissance A (*Fig.* 173.) fût oblique sur AC, on meneroit du point C la droite CE perpendiculaire sur cette direction, & l'on prendroit EC pour la vitesse de A, après quoi on acheveroit le reste comme il a été dit, & ainsi des autres.

PROPOSITION CLI.

488. *Construire la Balance Romaine.*

SOLUTION.

Prenez un levier AC de bois ou de fer (*Fig.* 174.) qui soit d'une égale épaisseur dans toute sa longueur, marquez-y un point C pris à discretion, au-dessus duquel vous attacherez perpendiculairement une languette ou lame de fer EF qui passe dans le fleau CD; à l'extrémité A attachez un crochet AR duquel pende un poids P qui soit en équilibre avec le bras CB, ce que vous connoîtrez, si en suspendant le levier par le crochet S, & la languette ne sortant ni d'un côté ni d'autre hors du fleau, le poids P & le bras CB se contrebalencent; prenez deux poids T, Q, chacun d'une livre, & attachant le premier au poids P, ou à un crochet attaché à ce poids, ou au crochet R, mettez l'autre sur le bras CB à une distance C, égale à la distance CA; il est visible que le poids Q sera en équilibre avec le poids T, & que par

conséquent la balance restera dans la situation horizontale : divisez le reste 1B du bras CB en parties 12, 23, 34, 56, &c. égales entr'elles & à la partie C1, & la balance sera faite ; car il est clair que si au lieu du poids T d'une livre on en met un de deux, & qu'on suspende le poids Q au point 2, le poids Q & le poids de deux livres seront en équilibre ; de même si au lieu du poids T on en met un de trois livres, & qu'on avance le poids Q au point 3, les deux poids seront en équilibre, & ainsi des autres.

L'usage de cette balance est d'attacher le poids ou le fardeau qu'on veut peser au poids P, & de faire glisser le poids Q d'une livre le long du bras CB, jusqu'à ce qu'il se trouve en équilibre avec le fardeau qu'on veut peser. Supposé donc que lorsque le poids Q est au point 5, il y ait équilibre, on dira que le fardeau ou poids attaché en P pese cinq livres, & ainsi des autres.

REMARQUE.

489. La maniere dont nous venons de construire la balance Romaine, seroit fort exacte, si la matiere dont le levier est composé étoit toujours homogene dans toutes ses parties, mais comme il est rare que cela arrive, il vaut mieux faire glisser le poids Q le long de CB, & marquer successivement les points où ce poids se trouve en équilibre avec un poids d'une livre, un de deux livres, un de trois livres, &c.

Au reste, quoique cette balance soit fort commode, sur tout lorsqu'il s'agit de peser de grands fardeaux, cependant comme les Ouvriers peuvent aisément en faire qui ne soient pas justes, il vaut mieux se servir de la balance ordinaire dont nous allons parler dans les Propositions suivantes.

PROPOSITION CLII.

490. *Si une balance* AB (*Fig.* 175.) *ayant sa languette* RC *élevée perpendiculairement en dessus sur son milieu* R, *à son centre de mouvement* C *sur* RC *hors de* AB, *& qu'ayant attaché à ses extrémités* A, B *deux poids égaux* P, Q, *on la mette dans une situation horizontale, elle restera en repos ; mais si on l'incline d'un côté ou d'autre elle sera en mouvement jusqu'à ce qu'elle ait repris sa situation horizontale.*

DEMONSTRATION.

En premier lieu, si la balance est horizontale les directions des

poids P, Q feront perpendiculaires fur AB, & par conféquent les bras AR, RB exprimeront leurs viteffes; or ces bras font égaux entr'eux de même que les poids par la fuppofition, donc les momens des poids P, Q feront égaux, & par conféquent il y aura équilibre, & la balance reftera en repos.

En fecond lieu, fi l'on incline la balance & qu'on lui donne, par exemple, la pofition *ab*, le point R décrira l'arc R*r*, & par conféquent montera plus haut qu'il n'étoit, donc le centre commun de gravité fe trouvera plus haut lorfque la balance fera inclinée que lorfqu'elle étoit horizontale; or le centre de gravité de deux corps defcend autant qu'il peut lorfqu'il n'en eft point empêché, parce que la pefanteur fait defcendre les corps lorfqu'elle ne trouve point d'obftacle, & que cette pefanteur fe réunit au centre de gravité *r*, donc fi on abandonne la balance dans la pofition *ar*, le point *r* defcendra & la balance auffi, & après quelques vibrations que la viteffe acquife lui fera faire, la balance fe remettra enfin dans la fituation horizontale AB.

PROPOSITION CLIII.

491. *Si une balance* AB (Fig. 176.) *ayant fa languette attachée perpendiculairement & en deffous à fon centre de mouvement en un point* C *de la languette hors de* AB, *& qu'ayant attaché à fes extrémités deux poids égaux* P, Q *on vienne à l'incliner, elle defcendra jufqu'à ce qu'elle ait pris une pofition* EF *parallele à la premiere.*

DEMONSTRATION.

Si la balance eft mife dans une fituation horizontale, il eft clair que les poids étant égaux de même que les deux bras AR, RB, il doit y avoir équilibre, & que la balance doit être en repos, à caufe que le centre de mouvement C fe trouvant dans la direction du centre de gravité R empêche ce centre de defcendre; mais fi on incline la balance & qu'on lui donne, par exemple, la pofition *ab*, cela ne peut fe faire que le centre de gravité R ne décrive l'arc R*r*, & comme alors rien ne l'empêche plus de defcendre, à caufe que le point C n'eft plus dans fa direction, il eft conftant que ce centre de gravité defcendra jufqu'à ce que la balance foit parvenue dans la pofition EF, & alors par la Propofition précédente, fa viteffe acquife lui fera faire quelques vibrations après lefquelles elle reftera dans la pofition EF.

PROPOSITION. CLIV.

492. *Si le centre* C *de mouvement d'une balance* AC (Fig. 177.) *eſt dans le milieu de* AB, *& qu'ayant attaché aux deux extrémités* A, B *deux poids égaux* P, Q, *on mette la balance dans telle poſition que l'on voudra elle reſtera toujours en repos.*

DEMONSTRATION.

Si la balance eſt dans une poſition horizontale la choſe eſt évidente, car les poids étant égaux, & les viteſſes étant exprimées par les bras AC, CB perpendiculaires à leurs directions, il eſt clair que leurs momens ſeront égaux, & que par conſéquent il y aura équilibre.

Mais ſi la balance eſt dans une poſition *ab* inclinée à l'horiſon, du centre C je tire la droite RS perpendiculaire ſur la direction du poids P, & cette droite eſt auſſi perpendiculaire ſur la direction du poids Q, à cauſe que les directions de P & Q ſont paralleles, ainſi ces poids agiront ſur les bras *a*C, C*b* de même qu'ils agiroient ſur les bras RC, CS; or à cauſe des triangles ſemblables *a*RC, *b*CS, on a RC, CS :: *a*C, C*b*, donc RC = CS, à cauſe de *a*C = C*b*; mais ſuppoſant que les poids égaux *p*, *q* ſoient mis en R & S, leurs viteſſes ſeront exprimées par RC, CS, & ſeront par conſéquent égales, donc leurs momens ſeront égaux & il y aura équilibre, donc puiſque ces poids remis en *a* & *b* agiſſent ſur *a*C, C*b* de même que ſur RC, CS, il s'enſuit qu'ils ſeront en équilibre, & que par conſéquent la balance ſera en repos.

PROPOSITION CLV.

493. *Conſtruire une balance ordinaire.*

SOLUTION.

Prenez une verge de bois ou de fer également épaiſſe dans toute ſa longueur (*Fig.* 178); diviſez là en deux parties égales au point C où vous attacherez le fleau & la languette; mettez aux extrémités A, B deux crochets ou deux baſſins d'égale peſanteur, & la balance ſera conſtruite.

Si cette balance eſt miſe dans une ſituation horizontale ou dans telle autre qu'on voudra, il eſt évident que les deux baſſins étant d'égale peſanteur, & les bras AC, CB étant égaux, la balance

sera toujours en repos; c'est pourquoi si on met dans les bassins des poids d'égale pesanteur, l'équilibre subsistera, & si on en met d'inégaux, l'équilibre ne subsistera plus.

Pour faire usage de cette balance on a plusieurs poids de fer ou de plomb de demi-livre, d'une livre, de deux, de trois, &c. & mettant dans un des bassins la marchandise qu'on veut peser, on met dans l'autre l'un de ces poids jusqu'à ce qu'on en trouve un qui fasse équilibre; & alors on dit que la marchandise pese une livre, ou deux, ou trois, &c. ou une once, deux onces, &c. selon qu'elle fait équilibre avec quelqu'un de ces poids.

COROLLAIRE I.

494. Si l'un des bras est plus long que l'autre, la balance est trompeuse; car les bassins étant égaux, il est clair que celui qui sera à l'extrémité du plus long côté l'emportera toujours sur l'autre, & que par conséquent si l'on met dans l'autre, par exemple, un poids de quatre livres, ce poids pourra faire équilibre avec de la marchandise qui ne pesera pas les quatre livres; or pour voir si l'on est trompé dans ces occasions, il n'y a qu'à transporter la marchandise dans le bassin du poids, & le poids dans le bassin de la marchandise, & si l'équilibre ne subsiste plus, on sera sûr que la balance est trompeuse.

COROLLAIRE II.

495. Une marchandise étant pesée dans une balance trompeuse, on peut trouver le véritable poids de cette marchandise en cette sorte.

Je mets dans le bassin M la marchandise que je veux peser, & cherchant un poids, lequel étant mis dans l'autre bassin N fasse équilibre avec la marchandise, je mets ce poids à part; je transporte la marchandise dans l'autre bassin N, & comme le poids que j'avois mis dans ce bassin étant transporté dans le bassin M ne fait plus équilibre; puisqu'on suppose la balance fausse, je cherche un autre poids, lequel étant mis en M soit en équilibre avec la marchandise en N; je multiplie le poids qui a fait équilibre en N par le poids qui a fait équilibre en M, & la racine quarrée du produit est le véritable poids de la marchandise.

Car quand la marchandise est en M on a AC est à BC comme le poids en N est à la marchandise; & quand la marchandise est en N on a AC est à BC comme la marchandise est au poids en

M ; donc puisque dans ces deux proportions les deux premieres raisons sont les mêmes, les deux secondes raisons sont égales, c'est-à-dire le poids en N est à la marchandise comme la marchandise est au poids en M ; ainsi la marchandise est moyenne proportionnelle entre le poids en N & le poids en M ; donc multipliant ces deux poids, & tirant la racine quarrée on a le véritable poids de la marchandise.

Soit le poids en M = 10 ℔, & le poids en N = 9, le produit de l'un par l'autre est 90, dont la racine quarrée qui est environ $9 \frac{48}{100}$ est le véritable poids de la marchandise.

COROLLAIRE III.

496. Le véritable poids de la marchandise étant trouvé, il est facile de connoître la raison des deux bras AC, CB ; car mettant la marchandise en M, on a le poids en N, est à la marchandise en M comme AC est à CB ; or le poids en N est 9 & la marchandise $9 \frac{48}{100}$, donc AC est à CB comme 9 est à $9 \frac{48}{100}$, ou comme 900 à 948.

COROLLAIRE IV.

497. La raison des bras AC, CB étant connue, on connoîtra aisément de combien l'un des bras excede l'autre ; par exemple, AC est à CB comme 900 à 948, donc si l'on divise le joug entier AB de la balance en 1848 parties égales, le bras CB en aura 48 d'excès.

COROLLAIRE V.

498. Connoissant la raison des bras, on peut connoître l'erreur commise en pesant une telle quantité de marchandise que l'on voudra ; par exemple, AC est à CB comme 900 à 948, ou 225 à 237 ; si donc on met en M une quantité de marchandise qu'on ait trouvé peser 100 ℔ en se servant du moyen indiqué dans le second Corollaire, on n'a qu'à faire cette analogie 237, 225 :: 100, 95, & le dernier terme marque que la marchandise ne peseroit qu'environ 95 ℔ si la balance étoit juste ; or elle pese 100 ℔, donc la balance trompe de 5 ℔ ou environ sur 100 ℔.

REMARQUE.

499. Dans les balances ordinaires on met le centre de mouvement un peu au-dessus du joug AB, afin que lorsque les poids

ſont en équilibre, la balance ſe remette toujours dans la ſituation horizontale au cas qu'on vienne à la pancher ſelon ce qui a été dit (*N.* 490).

DE LA ROUE DANS SON AISSIEU.

PROPOSITION CLVI.

500. *Si une puiſſance a* (Fig. 179.) *ſoutient un poids* P *par le moyen d'un aiſſieu dans ſa Roue, & que la direction de la puiſſance ſoit tangente du cercle* ADN, *la puiſſance eſt au poids comme le rayon* BC *de l'aiſſieu ou treuil eſt au rayon* AB *de la Roue.*

La figure 179. ne repreſente que le profil de la machine; mais il faut concevoir que l'axe ou treüil eſt ſaillant comme dans la figure 158. & que le poids eſt attaché à la circonférence de cet axe, en ſorte que quand la roue tourne, la corde s'entortille autour de l'axe, & le poids monte; cela poſé.

DEMONSTRATION.

Suppoſons d'abord que la direction de la puiſſance a, & celle du poids P ſoient perpendiculaires à la droite AC parallele à l'horizon; le centre de mouvement étant en B, la viteſſe de la puiſſance A ſera exprimée par le rayon AB, & la viteſſe du poids P par le rayon BC, donc le moment de a ſera $a \times AB$, & celui de P ſera $P \times BC$; or par la ſuppoſition ces deux momens ſont égaux, donc on aura $a \times AB = P \times BC$, & par conſéquent $a, P :: BC, AB$.

Maintenant ſuppoſons que la puiſſance ſoit appliquée en D, la direction de cette puiſſance ſera perpendiculaire au rayon BD, puiſqu'elle eſt tangente au point D, & la direction de P ſera perpendiculaire au rayon BC qui eſt horizontal; conſiderant donc DBC comme un levier recourbé, la viteſſe de a ſera exprimée par DB, & la viteſſe de P par BC; donc on aura $a \times DB = P \times BC$ par la ſuppoſition, & par conſéquent $a, P :: BC, AB$.

COROLLAIRE I.

501. *Si dans tous les points de la roue, la puiſſance tire avec des directions paralleles à la direction* CP *du poids, la puiſſance ſelon cette direction parallele ſera à elle-même ſelon la direction perpendiculaire au rayon de la roue comme le ſinus de complement de l'angle d'inclinaiſon*

naiſon DBA *fait par le rayon auquel la puiſſance eſt attachée, & le rayon* BA *horizontal eſt au ſinus droit ou rayon total.*

Quand la puiſſance appliquée en D tire ſelon la direction DR parallele à PC, elle n'agit ſur le bras DB du levier DBC, que comme elle agiroit ſur le bras RB du levier RC perpendiculaire à ſa direction ; ainſi ſa viteſſe eſt exprimée par RB, & ſon moment ou la force qu'elle employe eſt $a \times RB$; mais quand la direction de cette même puiſſance eſt tangente, & par conſéquent perpendiculaire à DB, ſa viteſſe eſt exprimée par DB, & ſon moment ou ſa force eſt $a \times DB$; ainſi la force qu'elle employe ſelon la direction DR eſt à la force qu'elle employe ſelon la direction perpendiculaire à DB comme $a \times RB$ eſt à $a \times DB$, ou comme RB eſt à DB ; or ſi dans le triangle rectangle RDB, on prend pour ſinus total le rayon DB, le côté RB ſera le ſinus de l'angle RDB qui eſt le complement de l'angle DBR d'inclinaiſon ; donc la force que la puiſſance employe ſelon la direction DR, eſt à celle qu'elle employe ſelon la direction perpendiculaire à DB, comme le ſinus de complement RB de l'angle d'inclinaiſon DBA eſt au ſinus total.

COROLLAIRE II.

502. Si l'on nomme l'angle RDB *angle de direction*, on dira que la force employée par la puiſſance A avec une direction oblique RD eſt à la force qu'elle employe avec une direction perpendiculaire, comme le ſinus de l'angle de direction eſt au ſinus droit.

Et ceci doit s'entendre non-ſeulement quand l'angle de direction eſt aigu, mais encore quand il eſt obtus ; car ſuppoſons que la puiſſance tire ſelon la direction DV qui fait avec le rayon DB l'angle obtus VDB, je mene du centre B la droite BT perpendiculaire à cette direction, & par conſéquent la puiſſance n'agit pas plus ſur DB, qu'elle n'agiroit ſur le bras TB du levier recourbé TBC, ainſi ſon moment eſt $a \times TB$; or ſon moment ſelon la direction perpendiculaire à DB, eſt $a \times DB$, donc ces deux momens ſont comme $a \times TB$, $a \times DB$, ou comme TB, DB ; prenant donc dans le triangle rectangle DTB l'hypothenuſe DB pour rayon total, le côté TB ſera le ſinus de l'angle BDT, & par conſéquent le ſinus de l'angle de direction BDV qui eſt le complement a deux droits de l'angle BDT ; donc la force que la puiſſance employe ſelon la direction VD eſt à celle qu'elle employe ſelon

la direction perpendiculaire à DB, comme le sinus de l'angle de direction TDB est au sinus total.

COROLLAIRE III.

503. Quand l'angle de direction RDB est aigu, plus cet angle devient petit, plus aussi le sinus RB est moindre par rapport au sinus total DC ou AC, & jamais aucun de ces sinus RB n'est égal au total excepté le cas, où l'angle RDB devient droit; donc la puissance n'employe jamais plus de force que lorsque l'angle de direction est droit, c'est-à-dire, lorsque la direction est perpendiculaire au rayon.

De même, quand l'angle de direction VDB est obtus, plus cet angle devient grand, & plus l'angle de complement BDT devient moindre; donc le sinus de cet angle ou de l'angle VDB devient aussi moindre par rapport au sinus total, & jamais ce sinus ne devient égal au sinus total, excepté le cas où l'angle VDB devient droit; donc jamais la puissance A n'employe tant de force que lorsque l'angle VDB, c'est-à-dire lorsque sa direction est perpendiculaire au rayon.

COROLLAIRE IV.

504. *Avec quelque direction que la puissance* A *tire la roue, les forces qu'elle employe selon ces différentes directions, sont entr'elles comme les distances des directions au centre du mouvement* B.

Quand la direction de A est perpendiculaire à DB, la distance de la direction au point B est DB, la vitesse est DB & le moment ou la force est $a \times$ DB; quand la direction DR est oblique & fait un angle aigu, la distance de cette direction au centre B est RB, & le moment ou la force est $a \times$ RB; enfin quand la direction VD fait un angle obtus, la distance de cette direction au centre B est TB, & le moment ou la force est $a \times$ TB; donc ces trois différentes forces sont comme $a \times$ DB, $a \times$ RB, $a \times$ TB, ou comme DB, RB, TB, donc, &c.

COROLLAIRE V.

505. Quand la puissance a toujours perpendiculaire au rayon aura fait faire une révolution au cercle ADN, la corde qui soutient le poids se sera entortillée autour du treuil, de façon que le poids P aura parcouru un espace égal à la circonférence de ce treuil, & par conséquent moindre que l'espace parcouru par la puissance ou que la circonférence ADNA; ainsi plus la circonférence

ADNA sera grande par rapport à la circonférence du treüil, moins aussi l'espace parcouru par le poids sera grand par rapport à l'espace décrit par la puissance, d'où il suit que si cette machine augmente la force, elle diminue le mouvement du poids, & que par conséquent elle fait perdre du tems.

On doit dire la même chose des leviers de la premiere & seconde espece.

COROLLAIRE. VI.

506. Connoissant le poids P qu'on veut appliquer au treuil, on connoîtra donc la puissance a qu'il faut lui appliquer avec une direction perpendiculaire pour soutenir ce poids en faisant AB, BC :: P, $\frac{P \times BC}{AB} = a$.

Et de même, si la puissance a étoit connue, on connoîtroit le poids P qu'elle peut soutenir, en faisant BC, AB :: a, $\frac{a \times AB}{BC} = P$.

REMARQUE.

507. Quand le poids est extremement grand, la puissance a demande aussi une distance AB extremement grande, & par conséquent il faudroit alors faire une roue prodigieuse; or pour obvier à cet inconvenient, on se sert de plusieurs roues dentées dont nous allons parler.

DES ROUES DENTÉES.

508. Les Roues *dentées* ne different de la roue dans son aissieu, qu'en ce que leur circonférence est faite à dents (*Fig.* 180.), on en met ordinairement plusieurs ensemble comme on voit ici; tandis que la premiere raye tourne de B vers A, les dents de son aissieu C font tourner la seconde roue de F vers E, & les dents de l'aissieu G de cette seconde roue, font tourner la troisiéme de L vers I; or si celle-ci est la derniere, son aissieu n'a point de dents, parce que c'est à cet aissieu qu'on attache le poids P, lequel monte à mesure que sa corde s'entortille autour de l'aissieu.

PROPOSITION CLVII.

509. *Si une puissance dont la direction est perpendiculaire au rayon soutient un poids par le moyen de plusieurs roues dentées, la puissance est au poids en raison composée des rayons des aissieux & des rayons*

des roues, c'est-à-dire, comme le produit des rayons des aissieux au produit des rayons des roues (Fig. 180.)

DEMONSTRATION.

Supposons d'abord qu'il n'y ait que la roue IL, & que la puissance soit appliquée perpendiculairement au rayon IO selon la direction, le poids P sera à la puissance comme le rayon IO est au rayon OR; donc IO, OR :: P, $\frac{P \times OR}{IO}$, & ce quatriéme terme sera la force de la puissance en I. Supposons une seconde roue par le moyen de laquelle la puissance mise en F selon la direction F*f* supplée à la force de la puissance en I, il est visible qu'en ôtant la puissance mise en I, l'aissieu G de cette seconde roue fera le même effet que cette puissance, & par conséquent la puissance mise en F contrebalançant cette force par la supposition, on aura FG, GI :: $\frac{P \times OR}{IO}$, $\frac{P \times OR \times GI}{IO \times FG}$, & ce quatriéme terme sera la force que la puissance mise en F fera pour tenir l'équilibre. Mettons une troisiéme roue par le moyen de laquelle la puissance mise en A selon la direction A*a* supplée à la force de la puissance mise en F, il est encore évident que cette puissance en A faisant équilibre, on aura AC, CF :: $\frac{P \times OR \times GI}{IO \times FG}$, $\frac{P \times OR \times GI \times CF}{IO \times FG \times AC}$, & ce quatriéme terme sera la puissance mise en A; ainsi cette puissance est au poids P qu'elle soutient par le moyen des trois roues comme $\frac{P \times OR \times GI \times CF}{IO \times FG \times AC}$ est à P, ou comme $P \times OR \times GI \times CF$ est à $P \times IO \times FG \times AC$, ou enfin comme $OR \times GI \times CF$ est à $IO \times FG \times AC$, ou en raison composée des rayons OR, GI, CF, des aissieux aux rayons OI, FG, AC, des roues, ou enfin comme le produit des rayons des aissieux multipliés les uns par les autres, au produit des rayons des roues multipliées les unes par les autres.

COROLLAIRE I.

510. Connoissant le poids P & le nombre des roues, on connoîtra donc la puissance, en faisant le produit $OR \times GI \times CF$ des rayons des aissieux, & le produit $OI \times GF \times CA$ des rayons des roues, puis faisant comme le produit des rayons des roues est à celui des rayons des aissieux; ainsi le poids est à un quatriéme terme qui sera la puissance qu'il faut mettre en A pour soutenir le poids P.

COROLLAIRE II.

511. De même connoiſſant la puiſſance & le nombre des roues, on connoîtra le poids en faiſant comme le produit du rayon des aiſſieux eſt au produit des rayons des roues; ainſi la puiſſance eſt à un quatriéme terme qui ſera le poids cherché.

COROLLAIRE III.

512. Connoiſſant la puiſſance & le poids, on trouvera le nombre des roues qu'il faut employer pour faire équilibre en cette ſorte.

Je diviſe le poids par la puiſſance, & je cherche les diviſeurs du quotient, leſquels en ſe multipliant produiſent ce quotient, ces diviſeurs marqueront le nombre des roues qu'il faut employer & les rapports de leur rayons à leur axes que je ſuppoſe être égaux chacun à leur unité.

Pour démontrer ceci, il n'y a qu'à obſerver qu'en diviſant le poids par la puiſſance, on a cette analogie par la nature de la diviſion : l'unité eſt au quotient comme la puiſſance eſt au poids; ainſi la puiſſance eſt au poids en raiſon compoſée des raiſons de l'unité à chaque diviſeur du quotient; c'eſt pourquoi ſi je prens les rayons des aiſſieux égaux chacun à l'unité, & les rayons des roues égaux aux diviſeurs du quotient, la puiſſance ſera au poids en raiſon compoſée des raiſons des rayons des aiſſieux & des rayons des roues; donc, &c.

Soit le poids $P = 30000$, & la puiſſance $A = 60$, diviſant l'un par l'autre, le quotient ſera 500 dont les diviſeurs ſont 4, 5, 5, 5; donc il faudra employer quatre roues ayant chacune le rayon de l'aiſſieu égal à 1, & les rayons des roues ſeront 4, 5, 5, 5, & en effet, la raiſon du rayon du premier aiſſieu au rayon de la premiere roue eſt 1, 4; la raiſon du rayon du ſecond aiſſieu au rayon de la ſeconde roue eſt 1, 5; dans la troiſiéme roue, la raiſon eſt encore 1, 5, & dans la quatriéme auſſi, on a 1, 5; faiſant donc la raiſon compoſée de ces quatre raiſons, on aura 1, 500; or puiſque la puiſſance eſt au poids comme le produit des rayons des aiſſieux eſt à celui des rayons des roues, on a donc 1, 500 :: 60, 30000.

COROLLAIRE. IV.

513. Si le poids ne pouvoit ſe diviſer exactement par la puiſſance, ou ſi la diviſion étant exacte, le quotient étoit un nombre premier qui n'eut point de diviſeur, on pourroit ajouter une

ou plusieurs unités au quotient ; car delà il n'arrivera autre chose ; sinon que les rayons des roues deviendront plus grands par rapport aux rayons des aissieux, & que par conséquent la puissance deviendra plus grande qu'il ne faut pour soutenir le poids, ce qui n'est pas un mal, parce que ces machines ne se font pas pour soutenir seulement le poids, mais pour l'élever.

COROLLAIRE V.

514. *Si une puissance* A *soutient un poids* P, *le nombre des révolutions de la roue qui se meut le plus vite est au nombre de révolutions de la roue qui se meut le plus lentement en raison composée des raisons des circonférences des roues que les aissieux rencontrent & des circonférences de ces aissieux.*

Supposons d'abord qu'il n'y ait que les deux roues FG, IO, il est visible que la roue FG se meut plus vite que la roue IO; car tandis que la roue FG fait une révolution, son aissieu ne fait non plus qu'une révolution ; or la roue IO ne se mouvant que par l'effort que l'aissieu GI fait sur elle, il est encore visible que tous les points de la circonférence de l'aissieu GI s'appliquent successivement sur la circonférence de IO ; & comme la circonférence de GI est moindre que celle de IO, il s'ensuit que quand la révolution sera achevée, la circonférence de GI ne se sera appliquée successivement que sur une partie de la circonférence de IO ; ainsi IO n'aura fait que la partie de sa révolution correspondante à la circonférence de GI ; par exemple, si la circonférence de GI n'est que le quart de la circonférence de IO, la roue IO n'aura fait que le quart de sa révolution, & ainsi des autres.

Cela posé, il est aisé de conclure que le nombre des révolution de la roue FG est au nombre des révolutions de IO réciproquement comme la circonférence de IO est à la circonférence de l'aissieu GI ; car supposant, par exemple, que la circonférence de GI ne soit que le quart de la circonférence de IO, l'aissieu GI fera donc quatre révolutions, tandis que IO n'en fera qu'une, mais la roue FG fera aussi quatre révolutions ; donc le nombre des révolutions de FG est au nombre des révolutions de IO, comme 4 est à 1, & par conséquent comme la circonférence de IO est à la circonférence de GI.

Maintenant, supposons qu'il y ait trois roues, on prouvera de même que ci-dessus que la roue AC se meut plus vite que les

autres, & la roue IO plus lentement ; ainſi nommant *m* la circonférence de la roue IO, *n* la circonférence de la roue FG, *a* la circonférence de l'aiſſieu GI, & *b* la circonférence de l'aiſſieu CF, & ſuppoſant que la roue IO ait fait une révolution, nous aurons par le cas précédent comme la circonférence de l'aiſſieu GI eſt à la circonférence de IO ; ainſi le nombre des révolutions de IO, c'eſt-à-dire I eſt au nombre des révolutions de FG, donc $a, m :: 1, \frac{m}{a} =$ nombre des révolutions de FG; par la même raiſon, nous aurons comme la circonférence de l'aiſſieu CF eſt à la circonférence de la roue FG ; ainſi le nombre des révolutions de FG eſt au nombre des révolutions de AC ; donc $b, n :: \frac{m}{a}, \frac{nm}{ba} =$ nombre des révolutions de AC ; donc le nombre des révolutions de AC eſt au nombre des révolutions de IO comme $\frac{nm}{ba}$ eſt à 1, ou comme nm eſt à ba, c'eſt-à-dire en raiſon compoſée de la raiſon des circonférences m, a, & n, b ; donc, &c.

COROLLAIRE VI.

515. Comme les dents & les intervalles des dents doivent être égaux dans les roues & dans les aiſſieux, afin qu'elles puiſſent s'enchaſſer aiſément les unes dans les autres, il eſt clair que les nombres des dents d'une roue, par exemple de la roue IO eſt au nombre des dents d'un aiſſieu, par exemple GI comme la circonférence de IO eſt à la circonférence de GI, & ainſi des autres ; or par le Corollaire précédent, le nombre de révolutions de la roue qui a le plus de viteſſe, eſt au nombre des révolutions de celle qui ſe meut le plus lentement en raiſon compoſée des raiſons des circonférences rencontrées par les aiſſieux & des circonférences de ces aiſſieux ; donc ces nombres de révolutions ſont auſſi en raiſon compoſée des nombres des dents des roues rencontrées par les aiſſieux, & des nombres des dents de ces aiſſieux.

COROLLAIRE VII.

516. Les rayons étant entr'eux comme les circonférences, il s'enſuit que le nombre des révolutions de la roue qui a le plus de viteſſe eſt au nombre de révolutions de celle qui ſe meut le plus lentement en raiſon compoſée des rayons des roues que les aiſſieux rencontrent, & des rayons de ces aiſſieux.

COROLLAIRE VIII.

517. Connoiſſant le nombre des révolutions que fait la roue qui a le plus de mouvement dans le tems que la roue la plus lente fait une révolution, on connoîtra le nombre des dents qu'il faut donner à chaque roue & à chaque aiſſieu en cette ſorte.

Je prens les diviſeurs du nombre des revolutions de la premiere, leſquels en ſe multipliant produiſent ce nombre, & le nombre de ces diviſeurs marque combien il doit y avoir de roues, & les diviſeurs marquent la grandeur de leurs rayons. Je fais chaque aiſſieu égal à 1, & leur donnant à chacun un même nombre de dents, je multiplie le nombre de dents de chaque aiſſieu par le diviſeur ou par le rayon correſpondant, & le produit eſt le nombre de dents que je dois donner à la roue correſpondante, ce que je prouve ainſi.

La revolution de la roue la plus lente, eſt au nombre des revolutions de la roue qui a le plus de mouvement en raiſon compoſée des raiſons des rayons des aiſſieux qui rencontrent les roues, & des rayons de ces roues; or les rayons des aiſſieux étant ſuppoſés égaux chacun à l'unité, la revolution de la roue la plus lente eſt au nombre des revolutions de celle qui a le plus de mouvement, comme le produit des rayons des aiſſieux, lequel eſt 1, eſt au produit des rayons des roues, lequel par conſéquent eſt égal au nombre des revolutions de la roue qui a le plus de mouvement. Prenant donc les diviſeurs de ce nombre, ces diviſeurs marqueront les rayons des roues, & par conſéquent le nombre des roues qui doivent être rencontrées par les aiſſieux; or le rapport des rayons des aiſſieux aux rayons des roues qu'ils doivent rencontrer étant connu, ſi on détermine le nombre des dents qu'on veut donner à chaque aiſſieu, il eſt viſible qu'en multipliant ce nombre de dents par celui qui exprime le rapport du rayon de la roue au rayon de l'aiſſieu correſpondant, le produit ſera le nombre des dents qu'il faut donner à cette roue.

Soit par exemple, le nombre des revolutions de la premiere roue $CA = 40$, les diviſeurs de ce nombre, qui en ſe multipliant le produiſent, peuvent être 2, 10, 10, ou 2, 20, ou 5, 8, je choiſis ces deux derniers, ce qui me fait voir qu'il y aura deux roues dentées dont les rayons ſeront 5 & 8, & deux aiſſieux, dont les rayons ſeront chacun 1, ainſi il y aura en tout trois roues, car la premiere n'étant rencontrée par aucun aiſſieu, peut n'être

pas

pas dentée si l'on veut; or si je donne six dents à chaque aissieu CF, GI, la roue FG en aura 30, à cause que 5 fois 6 font 30, & la roue 8 en aura 48, & pour voir si cela est juste, il n'y a qu'à faire le produit des dents des aissieux lequel est 36, & le produit des dents des roues, lequel est 1440, & la raison 36, 1440 doit exprimer la raison du nombre des revolutions de la roue la plus lente 10 au nombre des revolutions de la roue AC, c'est-à-dire, que cette raison doit être comme 1 à 40; or cela est en effet, car la raison 36, 1440 étant divisée par 36, se reduit à la raison 1, 40, donc, &c.

COROLLAIRE IX.

518. *L'espace parcouru par le poids* P *est à l'espace parcouru par la puissance* A *comme la puissance est au poids.*

Je nomme *m*, *n*, *r* les circonférences des trois roues IO, FG, AC, & *a*, *b*, *c*, les circonférences des trois aissieux TO, IG, CF; par les Corollaires précédens le nombre des revolutions de la roue IO est au nombre des revolutions de la roue AC comme *bc* est à *mn*; supposant donc que la roue IO ne fasse qu'une revolution, on aura *bc*, *mn* : : 1 $\frac{mn}{bc}$ = nombre de revolutions de la roue AC; or dans chaque revolution de cette roue la puissance décrit la circonférence du cercle AC; multipliant donc cette circonférence par le nombre de revolutions, le produit $\frac{rmn}{bc}$ sera l'espace parcouru par la puissance; or la roue IO n'ayant fait qu'une revolution par l'hypotèse, l'espace parcouru par le poids sera égal à la longueur de la corde qui se sera entortillée à l'axe OT, & par conséquent cet espace sera égal à la circonférence de cet axe, donc l'espace parcouru par le poids sera à l'espace parcouru par la puissance comme *a* est à $\frac{rmn}{bc}$, ou comme *abc* est à *rmn*, & mettant dans ce rapport les rayons au lieu de leurs circonférences *a*, *b*, *c*, *r*, *m*, *n*, l'espace parcouru par le poids est à l'espace parcouru par la puissance, comme TO × IG × FC est à IO × FG × AC; or ce rapport est le même que le rapport de la puissance au poids (*N.* 509), donc l'espace parcouru par le poids est à l'espace parcouru par la puissance comme la puissance est au poids.

COROLLAIRE X.

519. Plus on multiplie les roues, plus la puissance devient

moindre par rapport au poids, & par conséquent l'espace parcouru par le poids devient aussi moindre par rapport à l'espace parcouru par la puissance, ce qui fait voir que si l'on gagne du côté de la force en multipliant les roues, on perd aussi du côté du tems qu'il faut employer pour faire monter le poids.

COROLLAIRE XI.

520. *Les espaces parcourus par le poids & la puissance sont en raison composée des nombres de revolution des roues* IO, AC, *& de la circonference de l'aissieu* OT *à la circonférence de la roue* AC.

Soit le nombre des revolutions de la roue IO la plus lente $= m$, le nombre des revolutions de la roue AC qui a le plus de mouvement $= n$; la circonférence de l'aissieu de la roue IO $= a$, & la circonférence de la roue AC $= b$; dans chaque revolution de la roue IO le poids P parcourt un espace $= a$; ainsi am est l'espace parcouru pendant les revolutions de cette roue, de même dans chaque revolution de la roue AC la puissance parcourt la circonférence b, donc bn est l'espace parcouru pendant les revolutions de cette roue, & par conséquent l'espace parcouru par le poids est à l'espace parcouru par la puissance, comme am est à bn, donc, &c.

COROLLAIRE XII.

521. Par le Corollaire précédent l'espace du poids est à l'espace de la puissance en raison composée des nombres de revolutions des roues IO, AC, & des circonférences de l'aissieu OR & de la roue AC; or par le Corollaire 9 ces mêmes espaces sont comme la puissance est au poids, donc la puissance est au poids en raison composée des nombres de revolution des roues IO, AC, & des circonférences de OR, AC.

PROPOSITION CLVIII.

522. *Connoissant la circonférence de la roue* AC *qui a le plus de mouvement, le nombre de ses revolutions, le rapport de sa circonférence à la circonférence de l'aissieu* OT *de la roue la plus lente, & le rapport du nombre des revolutions de la roue* AC *au nombre des revolutions de la roue* OI, *connoître l'espace que le poids parcourt.*

SOLUTION.

Je multiplie la circonférence de la roue AC par le nombre de

ſes revolutions, & le produit eſt l'eſpace parcouru par la puiſſance (*N.* 520); or le rapport de la circonférence de cette roue à la circonférence de l'aiſſieu OT étant connu, je prens une quatriéme proportionnelle aux deux termes de ce rapport & à la circonférence de AC, & cette quatriéme proportionnelle eſt la circonférence de l'aiſſieu OT; de même le rapport du nombre des revolutions de la roue AC au nombre des revolutions de la roue OI, ou de l'aiſſieu OT étant connu; je prens une quatriéme proportionnelle aux deux termes de ce rapport & au nombre des revolutions de la roue AC, & cette quatriéme proportionnelle eſt le nombre des revolutions de la roue OI; je multiplie ce nombre de revolutions par la circonférence trouvée de l'aiſſieu OT, & le produit eſt l'eſpace cherché du poids P (*N.* 520).

Soit la circonférence de la roue AC $= 10$, & le rapport de cette circonférence à celle de l'aiſſieu OT comme 8 à 3; donc 8, 3 :: 10, $\frac{30}{8} =$ circonférence de OT; ſoit le nombre des revolutions de la roue AC $= 28$, & le rapport de ce nombre à celui des revolutions de la roue OI, comme 7 à 2; donc 7, 2 :: 28, $\frac{56}{7} = 8 =$ nombre des revolutions de la roue OI; multipliant donc la circonférence OT $= \frac{30}{8}$ par le nombre des revolutions de la roue OI $= 8$, le produit 30 eſt l'eſpace parcouru par le poids.

COROLLAIRE I.

523. Connoiſſant l'eſpace que le poids parcourt, les circonférences de l'axe OT & de la roue AC, & la raiſon des nombres de revolutions des roues OI, AC, on connoîtra l'eſpace que la puiſſance doit parcourir en cette ſorte.

Je diviſe l'eſpace que le poids parcourt par la circonférence de l'axe OT, & le quotient eſt le nombre des revolutions de cet axe (*N.* 520); or la raiſon des nombres de revolutions de OT, AC étant connu, je cherche une quatriéme proportionnelle aux deux termes de cette raiſon & au nombre des revolutions de OT, & cette quatriéme proportionnelle eſt le nombre des revolutions de la roue AC; c'eſt pourquoi multipliant ce nombre par la circonférence de AC, le produit eſt l'eſpace parcouru par la puiſſance ſoit l'eſpace parcouru par le poids $= 30$, la circonférence de l'axe OT $= \frac{30}{8}$, celle de la roue AC $= 10$, & la raiſon des nombres de revolutions de OT, AC, comme 2 à 7; je diviſe l'eſpace 30 parcouru par le poids par la circonférence $\frac{30}{8}$ de l'axe OT, & le

quotient 8 eſt le nombre des revolutions de cet axe ; c'eſt pourquoi je fais 2, 7 : : 8, $\frac{56}{2}$ = 28, & ce quatriéme terme 28 eſt le nombre des revolutions de la roue AC ; multipliant donc ce nombre par la circonférence 10 de AC, le produit 280 eſt l'eſpace que la puiſſance doit parcourir.

COROLLAIRE II.

524. Connoiſſant la raiſon de la circonférence de AC & de la circonférence de OT, la raiſon du nombre des revolutions de l'une & de l'autre & le poids P, on connoîtra la puiſſance A en cette ſorte.

Je multiplie les antecedens des deux raiſons l'un par l'autre, & les deux conſéquens de même, & les deux produits marquent la raiſon des eſpaces parcourus par la puiſſance & par le poids (*N.* 520), je prens une quatriéme proportionnelle aux deux termes de cette raiſon & au poids, & cette quatriéme proportionnelle eſt la puiſſance demandée (*N.* 321).

Soit la raiſon des circonférences 8, 3, celles des nombres de revolutions 7, 2, dont la raiſon compoſée 56, 6 marque le rapport des eſpaces parcourus par la puiſſance & le poids ; ſoit le poids = 2000, je fais 56, 6 : : 2000, $\frac{12000}{56}$ = 214 $\frac{2}{7}$ = puiſſance cherchée.

Je laiſſe grand nombre d'autres queſtions de cette nature qu'on peut reſoudre avec la même facilité.

COROLLAIRE III.

525. Connoiſſant le nombre des revolutions que fait la roue AC qui a le plus de mouvement tandis que la roue OI fait une revolution, connoiſſant auſſi la circonférence de l'aiſſieu *OT* & l'eſpace auquel on veut élever le poids, on connoîtra le tems qu'il faut employer pour cela en cette ſorte.

Si l'eſpace que le poids doit parcourir eſt égal à la circonférence de l'axe OT, je cherche par l'expérience en combien de tems la roue AC fait une revolution, & ce tems étant trouvé, je multiplie le nombre connu des revolutions par ce tems & le quotient eſt le tems cherché.

Suppoſons, par exemple, que AC faſſe trois revolutions & demi tandis que OI n'en fait qu'une, & que le tems que AC employe à faire une revolution ſoit 2 minutes, je multiplie 3 $\frac{1}{2}$ par

2; ce qui fait 7, & je dis qu'il faudra 7 minutes pour faire parcourir au poids l'eſpace propoſé.

Si l'eſpace que le poids doit parcourir eſt plus grand que la circonférence de l'aiſſieu OT, je diviſe l'eſpace par la circonférence de cet aiſſieu, & le quotient marque le nombre de revolutions que l'aiſſieu OT ou la roue OI doit faire; ainſi multipliant le nombre des revolutions que la roue AC fait pendant une revolution de OT par le quotient trouvé; le produit eſt le nombre de revolutions que AC doit faire juſqu'à ce que le poids ait parcouru l'eſpace propoſé; je cherche donc par l'expérience combien de tems la roue AC employe à une de ſes revolutions, & multipliant ce tems par le nombre des revolutions que je viens de trouver, le produit eſt le tems cherché.

Suppoſons, par exemple, que AC faſſe trois revolutions & demi, tandis que OT n'en fait qu'une, & que l'axe OT étant $=2$, l'eſpace que le poids doit parcourir ſoit $=8$; diviſant donc 8 par 2, le quotient 4 me fait voir que OT doit faire 4 revolutions, & multipliant $3\frac{1}{2}$ par 4, le produit 14 me fait voir que la roue AC doit faire 14 revolutions; ainſi ſachant par expérience que la roue AC fait une revolution, par exemple dans deux minutes, je multiplie 14 par 2, & le produit 28 me fait voir qu'il faudra 28 minutes pour faire parcourir au poids l'eſpace propoſé.

DE LA POULIE.

PROPOSITION CLIX.

526. *Si une puiſſance* P (Fig. 181.) *ſoutient un poids* Q *par le moyen d'une poulie* ABH, *& que la direction de l'un & de l'autre ſoit tangente de la poulie, la puiſſance eſt égale au poids.*

DEMONSTRATION.

Je mene le diametre AH perpendiculaire aux deux directions, & par conſéquent la puiſſance agit ſur la poulie comme elle agiroit ſur le rayon AO, & le poids comme il agiroit ſur le rayon OH, donc ces deux rayons expriment les viteſſes de la puiſſance & du poids; or ces deux rayons ſont égaux, & par la ſuppoſition la puiſſance & le poids ſont en équilibre, donc leurs momens ſont égaux, ainſi $P \times AO = Q \times OH$, donc $P, Q :: OH, AO$, & par conſéquent $P = Q$.

Si la direction MV de la puissance n'étoit pas perpendiculaire au point A, mais qu'elle fût perpendiculaire au point M, on meneroit le rayon OM, & on trouveroit de même que la puissance seroit égale au poids ; car le rayon OM exprimeroit la vitesse de la puissance, & le rayon OH la vitesse du poids ; ainsi par la supposition on auroit $P \times OM = Q \times OH$, & par conséquent P, Q :: OH, OM, donc $P = Q$.

REMARQUE.

527. La poulie n'augmente donc point la force quand les directions de la puissance sont perpendiculaires à la circonférence, mais elle sert à changer la direction de la puissance sans lui faire perdre de sa force ; par exemple, pour élever le poids Q sans poulie, il faudroit que la puissance agit selon la direction QH, au lieu qu'en employant la poulie elle agit selon la direction AP qui est directement opposée à la précédente ; on peut de même donner à la puissance une direction oblique MV ou horizontale BT, &c. selon que l'occasion le demandera.

PROPOSITION CLX.

528. *Si un poids* Q *est suspendu au centre* O *de la poulie* (Fig. 182); *& qu'une puissance* P *dont la direction est tangente du cercle soutienne ce poids par le moyen d'une corde* PRVST *arrêtée fixement en* T, *la puissance est au poids comme* 1 *à* 2.

DEMONSTRATION.

Supposons que le diametre RS fût dans la position XZ, & que par conséquent le centre O fût en V, ce centre ne pourroit monter de V en O que le poids & la puissance ne parcourussent chacun un espace égal à VO ; or quand le centre seroit parvenu en O la corde TZ se seroit abregée de la quantité SZ égale à VO, & cette quantité auroit passé du côté de la puissance P dont la puissance P auroit parcouru une autre espace égal à VO, & par conséquent elle auroit parcouru deux espaces égaux à VO ou 2VO ; mais les espaces parcourus par le poids & la puissance expriment leurs vitesses, & par la supposition les momens du poids & de la puissance sont égaux, donc $P \times 2VO = Q \times VO$, d'où l'on tire P, Q :: VO, 2VO :: 1, 2.

COROLLAIRE I.

529. On peut faire qu'une même puissance soit à un même poids comme 1 à 1, comme 1 à 2, comme 1 à 4, comme 1 à 8, &c. selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. en multipliant les poulies & les arrangeant comme on les voit ici (*Fig.* 183), en sorte que les brins de corde RH, TM, VN, &c. soient attachés fixement aux points R, T, V, &c. car s'il n'y avoit que la poulie A, & que la puissance P soutint le poids Q mis en S, la puissance seroit au poids comme 1 à 1 (*N.* 526); s'il y avoit deux poulies A, O, & que le poids fût suspendu au centre O, la puissance P seroit au poids Q, comme 1 à 2 (*N.* 528); s'il y avoit trois poulies A, O, E, & que le poids fût suspendu au centre E, la vitesse de la puissance doubleroit encore, de sorte que nommant u la vitesse du poids, celle de la puissance seroit $4u$, & par conséquent le moment de la puissance seroit $P \times 4u$, & celle du poids $Q \times u$, d'où l'on tire $P, Q :: u, 4u :: 1, 4$; s'il y avoit quatre poulies A, O, E, C, & que le poids fût suspendu au centre C; la vitesse de la puissance doubleroit encore, & par conséquent elle seroit $8u$; donc le moment de la puissance seroit $P \times 8u$, & celui du poids $Q \times u$, d'où l'on tire $P, Q :: u, 8u :: 1, 8$, & ainsi de suite.

COROLLAIRE II.

530. Si deux ou plusieurs poulies O, T (*Fig.* 184.) ont leurs aissieux dans une même piece de bois ou de fer AB, & qu'un même nombre de poulies ayent leurs aissieux dans une autre piece de bois ou de fer CD détachée de la premiere, je dis que la puissance P qui soutient le poids Q par le moyen des cordes passées, comme on le voit ici, est à ce poids comme l'unité est au nombre des brins de corde que le poids tire, c'est-à-dire aux nombres des cordes HF, IG, LM, NB.

Supposons que le centre V de la poulie GF soit monté de Z en V, & que par conséquent le poids soit monté d'autant, les deux cordes Hf, Ig se seront abregées des quantités Ff, Gg égales chacune à ZV; or par la construction les cordes LM, BN se seront aussi abregées d'autant, & toutes ces parties de cordes auront passé du côté de la puissance P, donc la puissance P aura parcouru un espace égal à 4ZV, mais les espaces parcourus par la puissance & le poids marquent leurs vitesses, & par

la supposition les momens de la puissance & du poids sont égaux ; donc $P \times 4ZV = Q \times ZV$, d'où l'on tire $P, Q :: ZV, 4ZV :: 1, 4$, ou comme l'unité au nombre 4 des cordes que le poids tire.

COROLLAIRE III.

531. Si au lieu de faire passer la corde que la puissance P tire par la poulie d'enhaut, on la fait passer par la poulie d'embas GF (*Fig.* 185), la puissance P sera au poids Q comme l'unité est à toutes les cordes.

Car tandis que le centre V sera monté de Z en V, le poids & la puissance seront montés chacun d'une quantité égale à ZV, de plus la corde H*f* se sera abregée de la partie F*f*, laquelle sera passée du côté de la puissance, & par conséquent cette puissance sera montée d'une quantité égale à 2ZV ; or la poulie NM étant montée aussi d'une quantité égale à ZV par la construction de la machine, les deux cordes *a*N, LM se seront aussi abregées chacune d'une quantité égale à ZV, & la corde IC se sera aussi abregée d'autant, ce qui fait en tout trois parties de cordes égales chacune à ZV, lesquelles seront passées du côté de la puissance, & ces trois parties égales aux deux précédentes feront en tout 5 ; de sorte que quand le poids aura parcouru un espace égal à ZV, la puissance aura parcouru un espace égal à 5ZV ou à l'espace ZV pris autant de fois qu'il y a de cordes, donc, &c.

COROLLAIRE IV.

532. On peut encore gagner beaucoup du côté de la force ; en joignant les poulies du Corollaire 2 avec celles du Corollaire 3, comme on les voit ici (*Fig.* 186, 187).

Par exemple, dans la figure 186, la puissance R qui soutiendroit le poids Q seroit à ce poids comme 1 à 5 (*N.* 531) ; or mettant en R un poids égal à cette puissance, la puissance P qui soutiendroit la puissance ou le poids R seroit à ce poids comme 1 à 4 ; donc supposant que la puissance P soutienne le poids Q elle sera à ce poids comme 1 à 4×5, ou comme 1 à 20.

De même dans la figure 186 la puissance R qui soutiendroit le poids Q seroit à ce poids comme 1 à 5 ; or mettant en R un poids égal à cette puissance, la puissance P qui soutiendroit ce poids, seroit à ce poids comme 1 à 5 ; donc si la puissance P soutien-

foutient le poids Q, elle eft à ce poids comme 1 eft à 5×5, ou comme 1 à 25, & ainfi des autres.

COROLLAIRE V.

533. L'efpace parcouru par la puiffance eft à l'efpace parcouru par le poids, reciproquement comme le poids eft à la puiffance; car par les Corollaires précédens, il eft vifible que la puiffance eft au poids reciproquement comme la viteffe du poids eft à la viteffe de la puiffance, mais les viteffes font entr'elles comme les efpaces parcourus, donc les efpaces parcourus par la puiffance & le poids font entr'eux reciproquement comme le poids eft à la puiffance.

COROLLAIRE VI.

534. Plus l'on multiplie le nombre des poulies, plus auffi le poids devient grand par rapport à la puiffance, donc la viteffe de la puiffance devient plus grande par rapport à celle du poids, lequel par conféquent fe meut avec plus de lenteur; & de là il fuit que fi cette machine fait gagner du côté de la force, elle fait perdre du côté du tems.

COROLLAIRE VII.

535. En fuppofant l'efpace parcouru par le poids $= 1$ on a cette analogie; la puiffance eft au poids comme l'efpace I parcouru par le poids eft à l'efpace parcouru par la puiffance (*N.* 533), donc P, Q; I, $\frac{Q}{P}$, c'eft-à-dire qu'en divifant le poids par la puiffance, le quotient fera l'efpace parcouru par la puiffance.

COROLLAIRE VIII.

536. Connoiffant la puiffance P, le poids Q, l'efpace ou la viteffe de la puiffance en fuppofant celle du poids égale à I; il fera facile de trouver le nombre des poulies qu'il faut employer & la difpofition qu'il faut leur donner.

Pour cela on divifera d'abord le poids par la puiffance, & le quotient fera, ou un nombre pair ou un nombre impair; fi le nombre eft pair, ou il fera toujours divifible par 2, ou il ne le fera pas.

Si le quotient eft toujours divifible par 2, & qu'il foit par exemple 8, on pourra employer la difpofition de la figure 183,

ou celle de la figure 184, selon qu'on le jugera plus convenable; si on veut employer la disposition de la figure 183, on examinera quel rang tient le terme 8 dans la progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. & trouvant que c'est le quatriéme, on dira qu'il faut employer 4 poulies, ce qui est évident par le premier Corollaire.

Que si on veut employer la disposition de la figure 184, on prendra la moitié du nombre 8, & l'on dira qu'il faut 4 poulies sans compter la premiere par le Corollaire second.

Si le quotient provenu de la division du poids par la puissance est impair, & qu'il soit par exemple 9, on retranchera une unité de ce quotient, & prenant la moitié du reste, on dira qu'il faut 4 poulies dans la disposition de la figure 185.

Si le quotient est un produit de deux nombres dont l'un soit pair & l'autre impair, par exemple, si le produit est 20, qui est le produit de 4 par 5, on prendra quatre poulies selon la disposition du Corollaire second, & quatre selon la disposition du Corollaire troisiéme, & l'on dira qu'il en faut huit qui soient disposées comme dans le Corollaire quatriéme, ou bien l'on dira qu'il en faut dix dans la disposition du Corollaire second.

Enfin si le quotient est un nombre impair dont on puisse tirer la racine, on en fera extraire l'extraction, & retranchant l'unité de cette racine le double du reste sera le nombre de poulies que l'on doit employer dans la disposition de la figure 187; par exemple soit le quotient 25 dont la racine est 5; j'en retranche 1, & doublant le reste 4, ce qui fait 8, je dis qu'il faut 8 poulies dans la disposition de la figure 187, ce qui est évident par le Corollaire quatre, ou bien je retranche 1 de 25, & prenant la moitié du reste 24 laquelle est 12, je dis qu'il faut douze poulies dans la disposition de la figure 185.

PROPOSITION CLXI.

537. *Si une puissance* A (*Fig.* 188.) *soutient un poids* E, *& que la direction de l'un & l'autre soient tangentes à la poulie, mais inclinées à l'horison, ensorte qu'elles se rencontrent au point* F *de la direction* FL *de la puissance qui soutient la poulie, le poids* E *& la puissance* A *sont égaux entr'eux, & l'un & l'autre est à la puissance qui soutient la poulie comme la moitié de l'angle* HFI *est à l'angle* HFI.

DEMONSTRATION.

Du centre O je mene les droites OH, OI aux points H, I

d'attouchement ; ces deux droites sont égales étant rayons d'un même cercle ; or les directions de la puissance & du poids sont perpendiculaires sur ces deux lignes, qu'on peut regarder comme composant un levier recourbé, donc leurs vitesses sont exprimées par les bras égaux HO, OI & sont par conséquent égales ; or les momens de la puissance & du poids sont égaux par la supposition, donc $A \times HO = E \times OI$, d'où je tire A, E :: OI, HO, & $A = E$ à cause de $OI = HO$.

Si l'on acheve le parallelogramme FHLI dont les côtés sont les directions HF, FI, on pourra exprimer les forces égales de la puissance & du poids par les droites HF, FI, qui sont égales entr'elles, parce qu'elles sont deux tangentes menées d'un même point F hors du cercle ; ainsi ces deux forces équivalent à une force qui seroit exprimée par la diagonale FL, ou à la force qui soutient la puissance A & le poids E ; donc le poids E est à la force qui soutient la poulie comme FI est FL, mais $FI = HF = IL$; donc le poids E est à la force qui soutient la poulie comme HF, LF, ou comme $\frac{1}{2}$HF est à $\frac{1}{2}$LF, mais dans le triangle ILF, la moitié de LI ou HF est le sinus de l'angle IFL, lequel étant égal à l'angle HFL, à cause des triangles semblables & égaux FHL, FIL, vaut par conséquent la moitié de HFI, & la moitié du côté FL, est le sinus de l'angle FIL ; ou de son complement IFH a deux droits ; donc le poids E est à la puissance qui soutient la poulie comme la moitié de l'angle HFI est à l'angle HFI, & on prouvera la même chose de la puissance A.

COROLLAIRE I.

538. Si un poids Q (*Fig.* 189.) suspendu au centre O d'une poulie est soutenu par deux puissances A, B, dont les directions soient obliques à l'horizon, & se coupent en un point F de la direction du poids Q ; on prouvera de même que ci-dessus que les deux puissances A, E, sont égales entr'elles, & que chacune d'elles est au poids comme la moitié de l'angle AFE est à l'angle AFE.

COROLLAIRE II.

539. Si la direction AH d'une puissance A qui soutient un poids B (*Fig.* 190.) est plus ou moins inclinée à l'horizon que la direction BH du poids B, ces deux directions se couperont en un point H qui ne sera pas sur la direction FO de la pesanteur

de la poulie, mais on prouvera toujours que la puiſſance A & le poids ſont égaux, & achevant le parallelogramme HL, on prouvera que la puiſſance A & le poids B étant exprimés par les tangentes égales AH, BH, équivalent à une force qui ſeroit exprimée par la diagonale HL, & que l'un & l'autre ſeroit à cette force comme la moitié de l'angle AHB eſt à l'angle AHB, & en ceci il faut obſerver que ſi la force qui ſoutient la puiſſance & le poids avoit d'abord la direction FO perpendiculaire à l'horizon, il faudroit qu'elle prit la direction HL pour faire équilibre; & ſi au lieu d'une puiſſance qui ſoutient la poulie chargée de la puiſſance A & du poids B, on mettoit un point fixe H (*Fig.* 191.) duquel la poulie pendit, la corde HO qui auroit d'abord une direction perpendiculaire à l'horizon prendroit la direction HL, de ſorte que le centre de gravité O de la poulie ſe trouveroit plus haut que s'il n'y avoit ni la puiſſance A ni le poids E, ainſi qu'on peut voir par la figure.

COROLLAIRE III.

540 Si deux puiſſances A, B, (*Fig.* 192.) ſoutiennent un poids Q attaché au centre O d'une poulie, on prouvera *toujours* en achevant le parallelogramme FL que les deux puiſſances ſont égales, & que l'une ou l'autre eſt au poids comme la moitié de l'angle AFB eſt à l'angle AFB, & en ce cas la direction du poids, loin d'être perpendiculaire à l'horizon comme OP, ſera la même que la direction OF de la diagonale LF qui eſt oblique à l'horizon, comme il eſt facile de le prouver; de ſorte qu'afin que les puiſſances A, B, ſoutiennent le poids Q, il faut néceſſairement que la corde OQ paſſe ſur une poulie H qui rende ſa direction OF, oblique.

DE LA VIS.

541. Si tandis qu'une ligne droite AB (*Fig.* 193.) perpendiculaire ſur la baſe BOCE de la ſurface d'un cylindre AC ſe meut uniformement, & toujours parallelement à elle-même le long de cette ſurface, un point B ſe meut auſſi uniformement de B en A, ce point décrira par ſon mouvement une ligne BLMRA qu'on appelle *ſpirale* autour du cylindre; l'angle CBL s'appelle angle d'inclinaiſon, & la partie BLM de cette ſpirale qui finit au point M de la perpendiculaire AB, ſe nomme premiere révolution.

542. Si l'on développe la surface du cylindre, en sorte qu'elle devienne une surface plane ou un rectangle ABQP (*Fig.* 194.) chaque révolution de la spirale sera une ligne droite; car si l'on conçoit que la base BQ de la surface ait été divisée en parties égales, & que la ligne AB ait été aussi divisée en parties égales entr'elles, quelque rapport que ces parties ayent avec les parties de la base, il est évident que quand la ligne AB aura parcouru par exemple deux parties de BQ de B en X, le point B aura aussi parcouru deux parties de AB de X en F, de sorte que quand AB se trouvera en Q, le point B aura parcouru sur QP un nombre de parties égales au nombre de parties de la base BQ que la ligne AB aura parcouru; donc on aura BX, BQ : : XF, QR; or la même chose arrivera dans tous les points de division de la base; donc BQR sera un triangle, puisque ses ordonnées XF, QR, sont entr'elles comme les abscisses BX, BQ, & par conséquent la premiere révolution BR de la spirale sera une ligne droite, & on prouvera la même chose des autres révolutions.

543. Si l'on conçoit qu'un prisme triangulaire flexible, s'entortille autour du cylindre, en sorte que l'une de ses faces soit toujours appliquée sur la surface du cylindre, & que l'une de ses arêtes soit toujours exactement sur la ligne spirale, la figure entiere composée du cylindre & du prisme entortillé, formera ce qu'on appelle une *vis*, comme il a été dit ci-dessus, & si l'on développe la surface du cylindre & le prisme qui l'entoure, en sorte que cette surface devienne un rectangle ABQP (*Fig.* 194) chaque révolution du prisme sera un prisme oblique tronqué qu'on pourra mesurer en multipliant sa coupe *mno* perpendiculaire à la base BQ par la base BQ de la surface du cylindre, car comme les arêtes BR, *Sr*, du prisme doivent être obliques à la base BQ, il est évident que la premiere révolution de l'arête *Sr* commençant en S, doit finir en G, d'où il suit que quand la premiere révolution sera finie, si l'on développe la surface du cylindre, la partie Y*Gg* qui paroît appartenir à la seconde révolution, appartient cependant à la premiere; or si je prolonge AB en V, & *Sr* en V, il est évident que la partie prismatique Y*Gg* est égale à la partie BSV; mettant donc BSV, au lieu de Y*Gg*, nous aurons un prisme incliné BV*r*R dont la solidité est par conséquent le produit de la base B*u*V ou de la coupe *mno* par la hauteur BQ.

Donc si à la solidité du cylindre on ajoute celle du prisme, on aura la solidité de la vis entiere.

544. On construit ordinairement la vis (*Fig.* 195.) de façon que la vis femelle FE est enchassée fixement à deux poteaux BC, DL, qui tiennent à un pied commun MN, & la vis mâle AR est aussi enchassée dans une piece HQ en forme de cube, laquelle est percée à jour aux quatre côtés montans, & dans ces trous on passe un levier TX, auquel la puissance étant appliquée, la vis mâle monte ou descend selon que la puissance la fait tourner d'un côté ou d'un autre ; par ce moyen, la vis mâle en montant éleve le poids qui seroit en A, ou qu'on lui attacheroit par-dessous sa base HQ, & en descendant elle presse ce qui se trouve entre sa base HQ & le pied MN.

La distance RS d'une révolution à l'autre, s'appelle par quelques-uns *pas de vis*, & il est visible que cette distance marque de combien un corps élevé ou pressé par la vis est monté ou descendu d'une révolution à l'autre.

PROPOSITION CLXII.

545. *Si une puissance appliquée à l'extremité* X *du levier* TX (Fig. 195.) *est aussi forte que le poids d'un corps qu'il faut élever, ou que la résistance d'un corps qu'il faut presser, la puissance est au poids ou à la résistance, comme la distance* SR *d'une révolution à l'autre, est à la circonférence décrite par la longueur* VX *du bras de levier.*

DEMONSTRATION.

Supposons qu'on veuille élever un poids mis en A, quand la puissance mise en X aura fait une révolution entiere, elle aura décrit une circonférence dont le centre est le point V qu'il faut regarder comme étant dans l'axe du cylindre, & le poids A ne se sera élevé que de la hauteur RS ; ainsi la circonférence décrite par le point X marquera la vitesse de la puissance, & la hauteur RS la vitesse du poids ; or par la supposition, le poids & la vitesse sont en équilibre, donc leur forces sont égales ; ainsi nommant z la circonférence décrite par la puissance X, nous avons $X \times z = A \times RS$; donc X, A :: RS, z.

Si on veut presser un corps, il n'y a qu'à supposer un poids A qui pese autant vers le centre de la terre que le corps qu'on veut presser résiste, & on trouvera de même que la puissance est à ce poids, & par conséquent au corps qu'on veut presser comme RS est à z.

COROLLAIRE I.

546. Il eſt évident que plus le bras VX du levier eſt long, moins auſſi il faut de force pour élever un poids A, puiſque z devient plus grand par rapport à RS, & par la même raiſon il faut moins de force lorſque la diſtance RS eſt moindre que lorſqu'elle eſt plus grande.

COROLLAIRE II.

547. Puiſque la puiſſance parcourt l'eſpace z, tandis que le corps ne parcourt que RS, il eſt encore évident que plus on gagne du côté de la force, plus on perd du côté du tems.

COROLLAIRE III.

548. Connoiſſant la diſtance RS de deux révolutions, le bras VX du levier, & la puiſſance appliquée à ce levier, on connoîtra aiſément le poids ou la réſiſtance qui eſt égale à la puiſſance en cette ſorte.

Soit la diſtance RS $= 3'$, c'eſt-à-dire égale à trois dixiémes d'un pied, ainſi que nous l'avons expliqué dans l'*Arithmetique des Geometres*, en parlant des fractions décimales, la diſtance VX $= 25'$, la puiſſance $= 30$ ℔; je cherche d'abord la circonférence décrite par VX en me ſervant du rapport 7, 22, ou 100, 314, du diametre à la circonférence, c'eſt-à-dire, je fais 100, 314 :: $50'$, $\frac{15700'}{100} = 157$, & ce quatriéme terme eſt la circonférence décrite par VX; ainſi pour trouver le poids ou la réſiſtance égale à la puiſſance X, je fais 3, $157'$ :: 30, $\frac{4710'}{3} = 1570'$, & ce quatriéme terme eſt le poids ou la réſiſtance cherchée.

Donc pour peu qu'on augmente la puiſſance X, elle enlevera le poids ou ſurmontera la réſiſtance qui lui eſt oppoſée.

DEFINITION.

549. Si l'on joint une manivelle DABC à une vis CE (*Fig.* 196.), & que les pas de cette vis s'engrainent dans les dents d'une roue dentée, en ſorte qu'à chaque pas de la vis il paſſe une dent de la roue, & qu'une puiſſance attachée au bras de la manivelle ſoutienne ou enleve un poids Q ſuſpendu à l'aiſſieu ou treuil de la roue dentée; cette Machine s'appelle *Vis ſans fin*.

Il eſt viſible que la puiſſance faiſant tourner la vis par le moyen de la manivelle, fait le même effet qu'elle feroit ſi elle agiſſoit ſur l'extremité A d'un levier AB qui ſeroit enchaſſé dans le cylindre BE de la vis.

PROPOSITION CLXIII.

550. *Si une puiſſance* Z *appliquée à la manivelle d'une vis ſans fin* (Fig. 196.) *ſoutient un poids* Q *ſuſpendu à l'aiſſieu d'une roue dentée, la puiſſance eſt au poids en raiſon composée de la circonférence de l'aiſſieu à la circonférence de la roue, & de la diſtance* HS *d'une révolution de vis à la circonférence décrite par* AB, *ou par la puiſſance* Z.

DEMONSTRATION.

Suppoſons qu'une puiſſance miſe en L ſoutienne le poids Q, & nommons cette puiſſance $= X$, nous aurons LV, TV :: Q, $\frac{Q \times TV}{LV} = X$; car la puiſſance X eſt au poids Q réciproquement comme le rayon TV de l'aiſſieu au rayon LV de la roue, ainſi qu'il a été démontré pluſieurs fois; or la puiſſance Z ſoutenant le poids Q, fait le même effort que ſi elle ſoutenoit la puiſſance $\frac{Q \times TV}{LV}$ miſe en L; donc par la propoſition 161 (*N.* 543.) nous avons Z, $\frac{Q \times TV}{LV}$ :: HS, *c*, en nommant *c* la circonférence décrite par Z ou par AB; mais nous venons de trouver $\frac{Q \times TV}{LV}$, Q :: TV, LV; donc la raiſon de Z à Q, laquelle eſt compoſée de la raiſon Z, $\frac{Q \times TV}{LV}$, & de la raiſon de $\frac{Q \times TV}{LV}$, Q eſt par conſéquent compoſée des raiſons HS, *c*, TV, LV, & mettant au lieu de TV, LV, leur circonferences qui ſont en même raiſon, nous aurons Z eſt à Q en raiſon compoſée de la diſtance *HS* à la circonférence décrite par Z, & de la circonférence de l'aiſſieu à la circonférence de la roue; donc la puiſſance Z eſt au poids comme le produit de la circonférence de l'aiſſieu par la diſtance HS eſt au produit de la circonférence de la roue par la circonférence que la puiſſance Z décrit.

COROLLAIRE I.

551. *L'eſpace parcouru par le poids, eſt à l'eſpace parcouru par la puiſſance, comme la circonférence de l'aiſſieu multipliée par le nombre des*

des révolutions de la roue est à la circonférence décrite par la puissance Z multipliée par le nombre des révolutions de la vis.

Supposons que la roue fasse deux révolutions, le poids aura parcouru un espace double de la circonférence de son aissieu, car la corde se sera entortillée deux fois autour de cet aissieu; or la vis fait une révolution à chaque dent de la roue qui passe, ainsi supposant que la roue ait dix dents, la vis aura fait vingt révolutions; mais à chaque révolution, la puissance décrit sa circonférence, donc quand la roue aura fait deux révolutions, la puissance aura décrit sa circonférence vingt fois, & par conséquent l'espace qu'elle aura parcouru sera sa circonférence multipliée par le nombre des révolutions de la vis; donc, &c.

COROLLAIRE II.

552. Il est aisé de voir que cette machine fait gagner beaucoup du côté de la force, mais qu'on perd aussi beaucoup du côté du tems.

COROLLAIRE III.

553. Connoissant le nombre des dents, la circonférence de l'aissieu, la puissance Z, & la circonférence qu'elle décrit, on connoîtra le poids Q en cette sorte.

Je multiplie la circonférence que la puissance décrit par le nombre des dents, & le produit est l'espace que la puissance décrit tandis que la roue fait une révolution, & par conséquent le poids aura parcouru un espace égal à la circonférence de l'axe; or les vitesses sont comme les espaces; donc en supposant que la puissance & le poids soient en équilibre, la puissance multipliée par son espace sera égale au poids multiplié par son espace; ainsi pour connoître le poids, je prens une quatriéme proportionnelle à l'espace du poids, à celui de la puissance & à la puissance, & cette quatriéme proportionnelle est le poids cherché.

Pour abreger en calculant, on peut mettre les rayons à la place des circonférences, à cause que la raison des uns & des autres est la même.

Soit $Z = 100$ ℔, $AB = 3$, $TV = 1$, & le nombre des dents $= 48$; je multiplie 48 par 3, & le produit 144 est comme l'espace de la puissance, je dis comme l'*espace*, parce que pour avoir l'espace, il faudroit multiplier 144 par la circonférence

que le rayon 3 décrit, mais cela ne fait rien à cause qu'au lieu de la circonférence de l'axe qui eſt l'eſpace du poids je mets ſon rayon. Je dis donc 1, 144 :: 100, 14400, & ce quatriéme terme eſt la valeur du poids.

DU COIN.

554. Le Coin ſert à fendre les ſolides & à vaincre la réſiſtance qu'ils font lorſqu'on veut deſunir leur parties; c'eſt pourquoi cette réſiſtance doit être regardée comme un poids que la puiſſance doit ſoutenir ou enlever.

PROPOSITION CLXIV.

555. *Si une puiſſance dont la direction eſt la perpendiculaire* CD, (Fig. 197.) *eſt égale à la réſiſtance que fait un corps pour empêcher la déſunion de ſes parties, la puiſſance eſt au poids comme la perpendiculaire* CD *eſt au côté* AB.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que le coin ſe ſoit enfoncé dans le ſolide de D en C, l'eſpace parcouru par la puiſſance ſera la perpendiculaire CD; or ſi au lieu de la réſiſtance, nous mettons un poids égal à cette réſiſtance, & qui au commencement du mouvement fut en C, il eſt viſible que ce poids ſe trouveroit en A quand le coin ſe trouveroit enfoncé juſqu'en C; & par conſéquent l'eſpace parcouru par le poids ſeroit la droite AB, mais les eſpaces parcourus dans le même tems ſont comme les viteſſes; donc les droites DC, AB, expriment les viteſſes de la puiſſance & du poids; or par la ſuppoſition, les forces de la puiſſance & du poids ſont égales, nommant donc A la puiſſance, & P le poids, nous aurons $A \times CD = P \times AB$; donc A, P :: CD, AB; mais la réſiſtance fait le même effet que le poids, donc la puiſſance eſt à la réſiſtance comme CD eſt à AB.

COROLLAIRE.

556. Plus le côté AB eſt grand, & moins la puiſſance eſt grande par rapport à la réſiſtance, ce qui eſt évident par la Demonſtration précédente; donc les coins les plus aigus demandent moins de force que ceux qui ſont moins aigus, mais en revanche il leur faut plus de tems pour faire leur effet.

REMARQUE.

557. Les différentes combinaiſons que l'on peut faire des machines que nous venons d'expliquer dans ce Chapitre, produiſent ce qu'on appelle *Machines compoſées*, & il eſt évident qu'on peut toujours en inventer de nouvelles, attendu que les différentes poſitions des machines ſimples les unes à l'égard des autres, leur différentes grandeurs, & les directions différentes de la puiſſance & du poids, peuvent faire une infinité de variations ; or ſi l'on a bien pris garde à la maniere dont nous avons trouvé le rapport de la puiſſance au poids dans les machines ſimples, il ſera fort aiſé d'en trouver le rapport dans les machines compoſées, c'eſt pourquoi je me diſpenſerai d'entrer ici dans un détail qui me menant trop loin, m'empêcheroit de traiter des autres parties de la Mechanique dont je dois parler dans les Volumes ſuivans, d'autant plus que ſi on ne veut pas ſe donner la peine de travailler ſoi-même ſur cette matiere, on peut avoir recours au premier Volume de l'*Architecture hydraulique*, où ce ſujet eſt traité de façon à contenter les Curieux. Il ne me reſte donc plus pour finir ce premier Livre qu'à parler des frottemens dont nous avons fait abſtraction dans les Propoſitions précédentes, & c'eſt ce que je vais faire dans le Chapitre ſuivant.

CHAPITRE XV.

Du Frottement des Machines.

DEFINITION.

558. LA difficulté que l'on éprouve lorſque l'on veut faire gliſſer deux ſurfaces planes ou courbes l'une ſur l'autre, eſt ce qu'on appelle *Frottement*.

559. Toutes les ſurfaces quelques polies quelles puiſſent être, ont des élevations & des concavités, qui venant à s'engraîner les unes dans les autres, forment la réſiſtance que l'on éprouve lorſqu'on veut faire mouvoir un corps ſur la ſurface d'un autre corps ; or parmi les Auteurs qui ont écrit ſur cette matiere, les uns ont prétendu que pour vaincre cette réſiſtance, il ne s'agiſſoit que de déſengraîner les ſurfaces, c'eſt-à-dire d'élever le

corps ſupérieur à peu près comme on éleve un corps ſur un plan incliné, & d'autres ont voulu qu'il falloit ajouter à cela le briſement qui ſe fait des petites éminences des ſurfaces, fondés ſur ce qu'il arrive tous les jours que les machines qui ont ſervi un certain tems ont moins de frottement que les autres, ce qui ne peut provenir que du briſement des petites élevations des ſurfaces, leſquelles deviennent plus unies & forment moins de réſiſtance.

Pour mieux entendre ceci, ſuppoſons que la ligne dentée AB (*Fig.* 198.) repreſente le profil de la ſurface du corps inférieur, & la ligne dentée CD le profil de la ſurface du corps ſupérieur; ſelon les premiers Auteurs, chaque dent ou élevation de la ſurface AB eſt un petit plan incliné le long duquel il faut néceſſairement que le corps ſupérieur monte ſi l'on veut qu'il ſe meuve de C vers D, ou de D vers C, ainſi le frottement eſt égal à la force néceſſaire pour faire monter ce corps, ou à la peſanteur relative de ce corps ſur le plan incliné; ſelon les autres, il faut ajouter à cela la force requiſe non-ſeulement pour émouſſer les pointes des dents, mais encore pour briſer entierement celles dont le plan eſt perpendiculaire ſur les ſurfaces; car toutes ces petites élevations étant extremement irrégulieres, il s'en trouve de perpendiculaires, de même qu'il y en a qui ſont plus ou moins inclinées ſur les ſurfaces, & d'autres auſſi qui ſont plus ou moins élevées, d'où il ſuit que la force requiſe pour ſurmonter le frottement eſt plus grande que celle qu'il faudroit employer pour élever ſimplement le corps ſuperieur. Ce dernier ſentiment me paroît préférable au premier, à cauſe des expériences journalieres ſur leſquelles il eſt fondé; au reſte on peut ſe convaincre aiſément qu'il n'eſt point de ſurface entierement polie, ſi l'on fait attention à l'uſage où l'on eſt de faciliter le mouvement des machines en les frottant d'huile; car cette liqueur rempliſſant les concavités des ſurfaces, les empêche de s'engrainer auſſi profondement qu'elles feroient ſans cette précaution, & par conſéquent le frottement en devient moindre.

Les dents ou éminences des ſurfaces étant extrêmement petites & d'ailleurs fort irregulieres, il n'eſt pas poſſible de trouver par la ſeule Geométrie des regles exactes de meſurer la quantité de frotement des corps; mais ſi on a recours aux expériences, & qu'on les réitere ſouvent, & toujours avec beaucoup de ſoin, on pourra découvrir facilement des regles générales pour le frot-

tement des machines telles qu'elles ſoient, ainſi qu'on verra par l'eſſai que nous en allons faire dans les Propoſitions ſuivantes. Je commence par la poulie parce qu'il n'eſt gueres poſſible de bien rechercher ce qui regarde le frottement des autres machines ſans le ſecours de celle-ci.

PROPOSITION CLXV.

560. *Trouver le frottement d'une poulie dont la matiere & le poids ſont connus.*

SOLUTION.

Je ſuppoſe que la poulie ſoit, par exemple, de bois de chêne (*Fig.* 199), qu'on l'ait polie autant qu'on a pû, & que ſon poids, c'eſt-à-dire, celui de ſa roue ſoit de 6 ℔; cette poulie étant ſuſpendue au point fixe R ſera ſans mouvemement parce que toutes ſes parties ſeront en équilibre autour de ſon axe, mais pour peu qu'on ajoûte à l'un de ſes côtés, il eſt sûr que l'équilibre ne doit plus exciter, & que ſi le contraire arrive, cela ne peut venir que du frottement qui ſe trouvera plus fort que la quantité qu'on aura ajoûtée à l'un des côtés.

Pour trouver donc ce frottement, je paſſe dans la poulie une petite corde très-déliée, aux extrémités de laquelle je ſuſpens deux baſſins de balance qui peſent également, & qui par conſéquent ſeront en équilibre, de même que la poulie l'étoit auparavant; je mets dans l'un des baſſins B un petit poids, & ſi la poulie ne tourne point, j'augmente ce poids juſqu'à ce que l'équibre commence à ſe rompre. Suppoſant donc que le poids qui rompt l'équilibre ſoit, par exemple, $\frac{1}{20}$ d'once, je retire la corde & les baſſins, je peſe le tout enſemble, & trouvant, par exemple, que le poids eſt d'une livre, j'ajoûte cette livre aux 6 ℔ que peſe la roue de la poulie ce qui fait 7, & je dis que l'aiſſieu de la poulie étant chargé de 7 ℔ de poids, le frottement qui ſe fait autour de cet aiſſieu eſt $\frac{1}{20}$ d'once.

Maintenant ſi je veux trouver le frottement de la ſeule roue de la poulie, je dis par regle de trois; ſi l'aiſſieu étant chargé de 7 ℔, le frottement eſt $\frac{1}{20}$ d'once, de combien ſera ce frottement lorſque l'aiſſieu ne ſera chargé que de 6 ℔? Et faiſant la regle je trouve $\frac{6}{140}=\frac{3}{70}$ d'once.

De même ſi je veux ſavoir le frottement cauſé par le ſeul poids de la corde & des baſſins; je dis, ſi l'aiſſieu étant chargé de 7 ℔

le frottement eſt $\frac{1}{20}$ d'once, de combien ſera ce frottement lorſque l'aiſſieu ne ſera chargé que d'une livre? Et faiſant la regle je trouve $\frac{1}{140}$ d'once.

Que ſi l'on conſidere l'un des baſſins comme un poids, & l'autre comme une puiſſance qui ſe tiennent en équilibre, & qu'on veuille ſavoir le frottement qu'ils cauſeront pour peu que l'un vienne à ſurmonter l'autre, on peſera les deux baſſins ſans la corde, & ſuppoſant qu'ils peſent $\frac{1}{2}$ ℔, on dira, ſi 7 ℔ donnent $\frac{1}{20}$ d'once de frottement, combien donnera $\frac{1}{2}$ ℔? Et faiſant la regle on trouvera $\frac{1}{280}$ d'once; & comme la corde peſera auſſi $\frac{1}{2}$ ℔, à cauſe que nous avons ſuppoſé que la corde & les baſſins peſoient enſemble une livre, il s'enſuit que le frottement produit par le poids de la corde ſera auſſi $\frac{1}{280}$ d'once.

Je ne parle point du frottement de la corde ſur la circonférence de la poulie, car il eſt viſible que l'engrainement qui ſe fait des parties de la corde avec celles de la ſurface de C en D ne ſert qu'à mieux tirer la poulie, & qu'en D les parties de la corde ſe deſengrainent d'elles-mêmes, à cauſe que la circonférence de la poulie commence à ce point à ſe derober à la corde de façon que les parties engrainées ſe ſéparent les unes des autres par la ſeule force de leur peſanteur.

Je conviens que les cordes ont des parties filaſſeuſes leſquelles venant à s'accrocher avec les irregularités de la ſurface de la poulie ne s'en détachent pas aiſément; mais comme on a grand ſoin de bien ſavonner les cordes que l'on employe pour cet uſage, ces ſortes d'accrochemens ſont aſſez rares & peuvent être négligés.

COROLLAIRE I.

561. Le frottement d'une poulie d'une grandeur & d'une matiere déterminée étant connu, on connoîtra aiſément le frottement cauſé par des poids de telle grandeur que l'on voudra en cette ſorte.

Suppoſant que le frottement d'une poulie de bois de chêne peſant 6 ℔, ſoit de $\frac{6}{140}$ ou $\frac{3}{70}$ d'onces, & qu'on veuille ſavoir le frottement que cauſeront deux poids dont l'un ſera de 30 ℔ & l'autre de 40, les directions étant toujours ſuppoſées perpendiculaires à l'horiſon; on fera la ſomme 70 ℔ des deux poids, on y ajoûtera le poids de la corde que je ſuppoſe être de 4 ℔, ce qui fera 74 ℔, à quoi on ajoûtera encore le poids 6 ℔ de la pou-

lie, ce qui sera 80, après quoi on dira si l'aissieu étant chargé de six livres le frottement est $\frac{3}{70}$ d'once, de combien sera ce frottement lorsque l'aissieu sera chargé de 80 ℔? Et faisant la regle on trouvera $\frac{240}{420} = \frac{4}{7}$ d'onces pour le frottement causé par les poids, la corde & la poulie; & retranchant de $\frac{4}{7}$ ou $\frac{40}{70}$, le frottement $\frac{3}{70}$ de la roue de la poulie, on aura $\frac{37}{70}$ pour la partie du frottement que les deux poids & la corde causent, & si on retranche encore de ce frottement celui qui est causé par la corde, laquelle pesant 4 ℔, donnera $\frac{2}{70}$ de frottement, le reste $\frac{35}{70} = \frac{1}{2}$ once, sera le frottement causé par la somme 70 des deux poids, & ainsi des autres.

Au reste, je sépare les frottemens de la poulie, de la corde & des poids, pour faire voir comment on peut les séparer si l'on veut, mais dans la pratique il faut les unir ensemble, parce que la puissance qui tient lieu d'un poids, & qui doit enlever l'autre supporte tous ces frottemens, & que par conséquent on doit l'augmenter d'autant, ainsi que l'on va voir dans l'exemple suivant.

Supposons que la poulie soit la même que ci-dessus, & que le poids B pese 30 ℔; s'il n'y avoit point de frottement une puissance A qui auroit le moindre petit poids au-dessus de 30 ℔ enleveroit le poids B; mais à cause du frottement il faut quelque chose de plus à cette puissance, & pour le trouver j'ajoûte à 30 ℔ le poids de la corde que je suppose de 4 ℔, ce qui fait 34, j'y ajoûte encore le poids 6 ℔ de la roue de la poulie ce qui fait 40, & je dis, si l'aissieu étant chargé de 6 ℔, le frottement est de $\frac{3}{70}$ d'once, de combien sera ce frottement lorsque l'aissieu sera chargé de 40 ℔, & faisant la regle, je trouve $\frac{120}{420} = \frac{2}{7}$ d'once pour le frottement total que la puissance A doit surmonter, ainsi la puissance doit être 30 ℔ & $\frac{2}{7}$ donce, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

562. Le frottement d'une poulie d'un poids & d'une matiere déterminée étant connu, on pourra connoître aisément le frottement d'une autre poulie de même matiere de quelque poids qu'elle puisse être, en cette sorte.

Supposons, comme ci-dessus, que la roue d'une poulie de bois de chêne pese 6 ℔, & que son frottement soit de $\frac{3}{70}$ d'once, & qu'on veuille connoître le frottement d'une autre poulie de même matiere dont la roue pese 10 ℔; je dis, si 6 ℔ de poids

donnent $\frac{3}{70}$ d'once pour le frottement, combien donneront 10 ℔? Et faisant la regle, je trouve $\frac{30}{420}=\frac{5}{70}$ d'once.

COROLLAIRE III.

563. Ce que je viens de dire dans le Corollaire précédent suppose que les aissieux des poulies soient tous égaux entr'eux, mais si cela n'est pas, le frottement devient plus grand ou moindre selon que l'aissieu est plus grand ou plus petit, parce qu'il se trouve beaucoup plus de parties à briser, & voici comme on pourra le trouver.

Supposons les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, à l'exception que l'aissieu de la poulie qui pese 6 ℔, étant d'un pouce de diametre, celui de la poulie dont la roue pese 10 ℔ est de 3 pouces de diametre; je néglige d'abord la différence des aissieux, & faisant le calcul comme dans le Corollaire précédent je trouve $\frac{5}{70}$ d'once pour le frottement de la seconde poulie, en supposant que son aissieu est égal à celui de la premiere, mais cela n'étant, j'observe que les surfaces de ces deux aissieux, que je suppose également longs, étant entr'elles comme leurs diametres, je puis prendre la raison des diametres au lieu de celles des circonférences, & par conséquent je dis, si 1 de diametre donne $\frac{5}{70}$ pour le frottement, combien donnera 3 de diametre? Et faisant la regle, je trouve $\frac{15}{70}=\frac{3}{14}$ d'onces pour le frottement de la poulie dont la roue pese 10 ℔, & dont le diametre est de 3 pouces, & ainsi des autres.

Mais si les aissieux différoient non-seulement par leurs diametres, mais encore par leurs longueurs, alors il est visible que les surfaces de ces aissieux seroient entr'elles en raison composée de la raison de leurs diametres, & de la raison des longueurs des aissieux, lesquelles ne sont autre chose que les largeurs des surfaces, c'est pourquoi on trouveroit le frottement en cette sorte.

Supposons toujours les mêmes choses que ci-dessus, à l'exception que l'aissieu de la poulie, dont la roue pese 6 ℔, ayant 1 pouce de diametre & 2 pouces de longueur, celui de la poulie dont la roue pese 10 à 3 pouces de diametre & 4 de longueur, je prens la raison 1, 3 des diametres, & la raison 2, 4 des longueurs, & faisant la raison composée, j'ai 2, 12, ou 1, 6 pour la raison des surfaces des deux aissieux; c'est pourquoi je dis, si 1 de surface donne $\frac{3}{70}$ pour le frottement, combien donnera 6

de

de surface? Et faisant la regle, je trouve $\frac{18}{70} = \frac{9}{35}$ d'once pour le frottement de la poulie proposée, & ainsi des autres.

COROLLAIRE IV.

564. Si la puissance ou le poids, ou tous les deux ensemble avoient des directions obliques à l'horizon, voici comme on pourra trouver le frottement.

Supposons comme ci-dessus que la roue de la poulie AB (*Fig.* 200.) soit de 6 ℔, que le poids Q tirant selon la direction BQ perpendiculaire à l'horison, soit de 30 ℔, & que la puissance P tirant selon la direction AP soit aussi de 30 ℔, il y aura équilibre entre le poids & la puissance, ainsi pour peu qu'on ajoûtât à la puissance elle l'emporteroit s'il n'y avoit point de frottement; mais à cause du frottement il lui faut quelque chose de plus, & pour le trouver, je suppose que AP exprime la valeur de la puissance P ou du poids Q, & tirant de A la droite AR perpendiculaire à l'horison, & du point P la droite PR perpendiculaire à AR, & achevant le parallelogramme RS, la force AP équivaut aux deux forces AR, AS, ou AR, RP; or la force RP ne pese point sur la poulie puisque sa direction est horizontale, donc il n'y a que la force AR qui pese sur la poulie ou sur son aissieu, c'est-à-dire la poulie n'est chargée que de la partie AR de la puissance; ainsi la partie AR qui charge la poulie est à la puissance comme AR est à AP; supposant donc AR = 3, & AP = 5, nous aurons la valeur de la partie de la puissance qui charge la poulie en faisant 5, 3 :: 30, $\frac{90}{5} = 18$, & ce dernier terme 18 sera la partie de la puissance qui charge la poulie; ajoûtant donc 18 à la valeur 30 du poids Q, ce qui fait 48, puis y ajoûtant le poids de la poulie qui est 6, la somme est 54; j'y ajoûte encore le poids de la corde que je suppose être de 4 ℔; comme cette corde à cause de la direction oblique AP du côté de la puissance pesera moins sur la poulie de ce côté qu'elle ne pesera du côté du poids, je suppose qu'il y ait deux livres de corde de chaque côté, & faisant l'analogie que nous avons faite ci-dessus pour la puissance, je dis, AP est à AR comme 2 ℔ de corde est à un quatriéme terme, c'est-à-dire 5, 3 :: 2, $\frac{6}{5}$, & ce quatriéme terme $\frac{6}{5}$ exprime combien la corde AP pese sur la poulie; donc la corde entiere pese sur la poulie $2\frac{6}{5} = 3\frac{1}{5}$, lequel ajoûté à 54 fait $57\frac{1}{5}$ qui est le poids total dont la poulie est chargée; ainsi je fais 6, $\frac{3}{70}$ :: $57\frac{1}{5}$, $\frac{858}{2100} = \frac{143}{350}$ onces, & ce quatriéme terme est le

frottement que la puiſſance doit ſurmonter ; ainſi cette puiſſance doit être 30 ℔ $\frac{143}{350}$ onces, pour ſurmonter le frottement, mais outre cela il faut lui ajoûter les $\frac{4}{5}$ du poids de la corde qu'elle ſupporte, puiſque nous venons de voir qu'en ſuppoſant qu'il y ait deux livres de corde de ſon côté, la poulie n'en ſupporte que $\frac{6}{5}$ & que par conſéquent la puiſſance en ſupporte $\frac{4}{5}$, donc la puiſſance doit être 31 ℔ $\frac{73}{350}$.

Comme il n'eſt pas toujours aiſé dans un triangle rectangle d'exprimer le rapport de l'hypotènuſe AP au côté AR, on obſervera qu'en prenant AP pour ſinus total, le côté AR eſt le ſinus de l'angle APR qui eſt l'angle d'inclinaiſon de la direction AP ſur l'horiſon, c'eſt pourquoi on dira que la puiſſance AP eſt à ſa partie AR qui charge la poulie comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon.

Et il faut obſerver la même choſe à l'égard de la puiſſance toutes les fois que ſa direction eſt oblique, parce que quoique la corde qui eſt ſon côté peſe moins ſur la poulie & donne moins de frottement, la puiſſance ne laiſſe pas que de ſupporter le reſte du poids de cette corde.

Si les directions de la puiſſance & du poids étoient obliques à l'horizon, on chercheroit la partie de la puiſſance qui peſeroit ſur la poulie, comme il vient d'être fait, puis la partie du poids qui peſeroit ſur la poulie, & ajoûtant enſemble ces deux parties avec le poids de la roue de la poulie, on ajoûteroit encore à cette ſomme les deux parties de la corde qui peſeroient ſur la poulie de part & d'autre, & la ſomme ſeroit le poids total dont l'aiſſieu ſeroit chargé, c'eſt pourquoi le frottement ſe trouveroit comme ci-deſſus.

Que ſi la direction TV de la puiſſance étoit horizontale, cette puiſſance ne chargeroit point la poulie, ainſi l'on n'auroit qu'à ajoûter au poids de la roue de la poulie celui du poids Q, celui de ſa corde, & celui de la partie du poids de la corde du côté de A que la roue ſupporte ; ce qui donneroit le poids total dont l'aiſſieu ſeroit chargé, enſuite de quoi le frottement ſe trouveroit comme il a été dit.

COROLLAIRE V.

565. Tout ce que nous venons de dire dans cette Propoſition & ſes Corollaires, ne regarde que les poulies faites d'une même matiere ; c'eſt pourquoi ſi l'on avoit des poulies qui ſuſ-

sent d'une autre matiere, par exemple de fer, il faudroit faire sur l'une d'entr'elles les expériences, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, & le frottement de celle-ci étant connu, on connoîtroit sans peine le frottement de toutes les autres de même matiere de quelque poids qu'elles pussent être chargées, quelle que fût la direction de ces poids, & de quelque grandeur que fussent les diametres des axes, ainsi que nous avons dit.

PROPOSITION CLXVI.

566. *Trouver le frottement d'une poulie à l'aissieu de laquelle le poids est suspendu.*

SOLUTION.

Soit la poulie AB (*Fig.* 201.) ayant à son aissieu O un poids suspendu Q, lequel est soutenu par la puissance P à la faveur d'une corde PABR, laquelle est attachée au point fixe R, & soient les directions PA, RB perpendiculaires à l'horizon ; nous avons vû dans le Chapitre précédent en parlant de cette machine, que si l'on fait abstraction du poids de la poulie, de celui de la corde OQ, & de celui de la corde PAV, la puissance est au poids comme 1 à 2 ; ainsi supposant Q = 10, la puissance dans cette hypotèse seroit = 5, mais comme il n'y a point de poulie ni de corde qui ne pesent, supposons que la poulie avec son aissieu pese 6 ℔, & la corde OQ $\frac{1}{2}$ ℔, ce qui fait en tout 6 ℔ $\frac{1}{2}$; j'ajoûte ces 6 ℔ $\frac{1}{2}$ au poids Q = 10, ce qui fait 16 ℔ $\frac{1}{2}$, & il est visible que la puissance en soutient la moitié, c'est-à-dire 8 $\frac{1}{4}$, à cause que le point fixe R en soutient l'autre moitié, ainsi la puissance devroit être 8 $\frac{1}{4}$; mais cette puissance soutient encore la corde PAV, car la corde VBR est soutenue par le point fixe R, supposant donc que PAV vaille $\frac{1}{4}$ de livre, j'ajoûte ce $\frac{1}{4}$ à 8 $\frac{1}{4}$, & par conséquent la puissance P qui soutient le poids doit valoir 8 ℔ $\frac{1}{2}$.

Pour trouver le frottement de cette machine je mets une poulie en P, & prolongeant la corde PA, ensorte que son prolongement PH lui soit égal & de même poids, je fais passer cette corde sur la poulie X, mettant le point P à l'extrémité du diametre perpendiculaire à l'horison, & attachant en H un poids de 8 ℔ $\frac{1}{4}$, ce poids sera en équilibre, car de côté & d'autre il y aura un poids de 8 ℔ $\frac{1}{4}$ & une corde de $\frac{1}{4}$ ℔; je cherche par la Proposition précédente ce qu'il faut ajoûter au poids H pour surmonter le frottement de la poulie X, & supposant que ce soit $\frac{1}{2}$ once, il est sûr

que cette demi-once étant ajoûtée au poids H, ce poids entraineroit un poids de 8 ℔ $\frac{1}{4}$ qui seroit attaché en A, mais à cause du frottement de la poulie AB qu'il faut surmonter, le poids H augmente de demi-once, c'est-à-dire 8 ℔ 4 onces $\frac{1}{2}$, n'entraineront pas le poids Q; j'ajoûte donc au poids H des petites quantités, jusqu'à ce que l'équilibre commence à se rompre, & supposant que ce qui commence à rompre l'équilibre soit $\frac{1}{4}$ once, je dis que le frottement de la poulie AB ayant le poids Q suspendu en O est $\frac{1}{4}$ once.

COROLLAIRE I.

567. Le frottement de cette poulie étant trouvé, il sera facile de trouver son frottement lorsqu'elle sera chargée de tel autre poids que l'on voudra.

Supposons le poids Q=25 ℔, la corde OQ=2 ℔, le tout ensemble est donc 27 ℔, lesquelles étant ajoûtées aux 6 ℔ que la poulie pese font 33 ℔; je dis donc, si le poids total étant de 16 ℔ $\frac{1}{2}$, comme nous l'avons supposé dans l'expérience que nous avons faite, le frottement est de $\frac{1}{4}$ once, de combien sera ce frottement lorsque le poids total sera 33 ℔? Et faisant la regle je trouve $\frac{33}{66}=\frac{1}{2}$ once, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

568. Le frottement d'une poulie étant connu on connoîtra sans peine le frottement de tout autre poulie plus grande ou moindre, pourvû qu'elle soit de même matiere.

Supposons d'abord que les deux axes soient égaux & en diametres & en longueur, & que la seconde poulie pese 12 ℔, son poids joint à sa corde 14 ℔, ce qui fait en tout 26 ℔; je fais comme dans le Corollaire précédent $16\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ :: 26, $\frac{26}{66}=\frac{13}{33}$ d'once, & ce quatriéme terme est le frottement de la seconde poulie.

Que si les deux aissieux ont des diametres différens & des longueurs égales, les surfaces de ces aissieux seront comme les diametres; supposant donc que le diametre du premier aissieu soit 2 pouces, & celui de la seconde 5, je dis, puisque les deux aissieux étant supposés égaux, le frottement de la seconde poulie est $\frac{13}{33}$, les aissieux étant comme 2 à 5, il est visible que le frottement $\frac{13}{33}$ doit être au frottement que je cherche comme 2 à 5; je

fais donc 2, 5 :: $\frac{13}{33}$, $\frac{65}{66}$ d'once, & ce quatriéme terme eſt le frottement cherché.

Enfin ſi les aiſſieux étoient inégaux en diametres & en longueurs, alors les ſurfaces des aiſſieux ſeroient en raiſon compoſée des diametres & des longueurs; ſuppoſant donc le diametre de l'aiſſieu de la premiere poulie $= 2$, ſa longueur $= 3$, le diametre de l'aiſſieu de la ſeconde $= 5$, & ſa longueur $= 6$, faiſant la raiſon compoſée des diametres 2, 5, des diametres & de la raiſon 3, 6 des longueurs, j'aurai 10, 18, ou 5, 9, qui ſera la raiſon des ſurfaces des aiſſieux; je dis donc, les ſurfaces des aiſſieux étant égales le frottement de la ſeconde poulie eſt $\frac{13}{33}$, donc les ſurfaces étant comme 5, 9, je dois faire 5, 9 :: $\frac{13}{33}$, $\frac{117}{165} = \frac{39}{55}$, & ce dernier terme eſt le frottement cherché.

COROLLAIRE III.

569. Si la direction de la puiſſance étoit oblique à l'horiſon, le frottement ſeroit le même que ſi la direction étoit perpendiculaire, car la puiſſance & le point d'appui ſoutiendroient toujours enſemble la même quantité de poids, de ſorte que la roue de la poulie ſeroit preſſée également contre ſon aiſſieu.

COROLLAIRE IV.

570. Si les poulies étoient d'une matiere différente de celle de la poulie ſur laquelle on auroit fait l'expérience, on feroit une nouvelle expérience ſur l'une d'entrelles, après quoi on trouveroit tout le reſte de même que ci-deſſus.

PROPOSITION CLXVII.

571. *Trouver le frottement de pluſieurs poulies qui forment une même machine.*

SOLUTION.

Soient quatre poulies AB, CD, EF, GH, diſpoſées comme on les voit ici (*Fig.* 202), & chargées du poids Q que la puiſſance P tient en équilibre, il ſe trouve ici deux ſortes de frottemens, celui des poulies AB, CD, ſur lequel la piece MN, qui les lie n'influe rien, & celui des poulies EF, GH qui ſe trouve augmenté par le poids du lien RS.

Suppoſons donc le poids Q $= 50$ ℔, la roue AB $= 10$ ℔, la roue CD $= 4$ ℔, la poulie EF $= 3$ ℔, la poulie GH $= 6$ ℔, &

le lien RS = 5 ℔ ; donc le poids Q, la poulie EF, la poulie GH, & le lien RS peseront ensemble 50 + 3 + 6 + 5 = 64 ℔ ; or ce poids de 64 ℔ tirant également les quatre cordes GC, EN, FP, HB chacune d'elles supporte le quart du poids & les 4 poulies supportent aussi chacune le quart du poids, c'est-à-dire 16 ℔.

Supposons que tous les aissieux soient égaux & en diametres & en longueurs, & que la matiere des poulies soit la même que celle sur laquelle nous avons supposé avoir fait l'expérience dans la Proposition précédente; je conçois une puissance en D qui soutient la poulie EF chargée du quart du poids par le moyen de la corde DFEN attachée fixement en N, & comme il y a 16 ℔ de poids, je dis par la Proposition précédente $16\frac{1}{2}, \frac{1}{4} :: 16, \frac{16}{66} = \frac{8}{33}$, & ce quatriéme terme est le frottement de la poulie EF; or sans ce frottement la puissance seroit égale à la moitié de 16, c'est-à-dire à 8, parce que le point fixe N soutient l'autre moitié du poids 16; donc puisque cette puissance doit vaincre le frottement elle doit être $8\frac{8}{33}$; je ne parle point de la corde qu'elle soutient parce qu'elle va se trouver dans le frottement de la poulie suivante.

Je conçois deux puissances suspendues de part & d'autre à la poulie CD égales chacune à 8, $\frac{8}{33}$, & dont les cordes sont chacune égales à la corde DF, ou pour mieux dire à la corde ODX, en faisant OCV = ODX = 2 ℔ ; l'aissieu de cette poulie est donc chargé de sa roue, des deux puissances, & de la corde VCDX ; je cherche le frottement de cette poulie par les regles de la Proposition 164, & supposant qu'elle soit $\frac{9}{33}$ onces, la puissance en V qui doit surmonter le frottement doit donc être $8, \frac{8}{33} + \frac{9}{33} = 8$ ℔ $\frac{17}{33}$ d'onces.

Je conçois une puissance en B qui soutient la poulie GH par le moyen de la corde BHGCDFN, il est sûr que cette puissance soutient non-seulement les 8 ℔ $\frac{17}{33}$ que soutenoit la puissance en V, mais encore la moitié 8 du poids 16 que la poulie GH soutient, ainsi cette puissance est 16 ℔ $\frac{17}{33}$ d'onces ; or le frottement de cette poulie est $\frac{8}{33}$, par les regles de la Proposition précédente, donc la puissance en B doit être 16 ℔ $\frac{17}{33} + \frac{8}{33} = 16$ ℔ $\frac{25}{33}$ d'onces.

Je conçois deux puissances chacune de 16 ℔ $\frac{25}{33}$ d'onces suspendues à la poulie AB avec la longueur de la corde VGHBAP & par conséquent l'aissieu de la poulie AB est chargé de sa roue, des deux puissances & de la corde que je suppose = 3 ℔, je cherche par la Proposition 164 le frottement de cette poulie, & sup-

posé qu'il soit $\frac{16}{33}$, la puissance P doit donc être 16 ℔ $\frac{25}{33} + \frac{16}{33}$ $=$ 16 ℔ $\frac{41}{33}$ d'onces $=$ 16 ℔ 1 once $\frac{8}{33}$, & par conséquent le frottement est 1 once $\frac{8}{33}$.

Au reste, ces frottemens tels que je les mets ici ne sont que des suppositions pour montrer comment il faudroit faire les calculs, si on avoit fait les expériences dont j'ai parlé dans les deux Propositions précédentes, c'est pourquoi il faudroit bien se garder de les prendre pour les véritables valeurs des frottemens dont nous avons parlé.

PROPOSITION CLXVIII.

572. *Trouver le frottement d'un corps qui se meut sur la surface horizontale d'un autre corps.*

SOLUTION.

Un corps peut se mouvoir sur la surface horizontale d'un autre, en razant cette surface ou en roulant sur elle, ce qui fait deux différens cas; car il est visible que si la surface supérieure raze l'inférieure, il se fait à la fois plus d'engraînures que si elle rouloit dessus, & que par conséquent y ayant plus de parties accrochées qu'il faut attenuer ou briser tout-à-fait, il y a aussi plus de frottement; je commence par les corps dont les frottemens sont razants.

Soit un corps AB de marbre $=$ 10 ℔ (*Fig.* 203.) sa base AC $=$ 1 pouce quarré, & supposons que la surface TS sur laquelle ce corps se meut, soit aussi de marbre. J'attache à ce corps une corde RHQ que je fais passer sur une poulie H dispoſée de façon que la direction RH de la corde soit horizontale, de même que la surface TS; je suspends à l'extremité de cette corde differens poids jusqu'à ce que j'en trouve un qui commence à faire mouvoir le corps AB; il est sûr que si l'on fait abstraction du frottement de la poulie & du poids de la corde, le frottement du corps AB doit être égal au poids Q qui fait mouvoir ce corps; car la direction de la pesanteur du corps AB n'étant point opposée au mouvement horizontal, ce corps est indifférent au repos ou au mouvement horizontal; donc le moindre atôme Q poussé actuellement par sa pesanteur, devroit faire mouvoir AB, à cause que par la disposition de la corde, cet atôme Q agiroit sur le corps AB de la même façon que s'il le choquoit avec une vitesse égale à celle que sa pesanteur lui donne; or par l'expérience, il faut un

poids beaucoup plus considérable qu'un atôme pour donner du mouvement à AB; donc la résistance que fait ce corps ne peut venir que du frottement; ainsi supposant que le poids Q pese une livre, il y auroit une livre de frottement, mais de cette livre il faut retrancher le frottement de la poulie causé par la pesanteur du poids Q de sa corde HQ, de sa roue H, & de la moitié de la corde RH, à cause que l'autre moitié de cette corde est soutenue par le poids AB, donc en supposant que ce frottement estimé par les regles ci-dessus soit un once, le frottement de AB sera 15 onces; ajoutant donc à AB le poids de la moitié de la corde RH que je suppose être un once, je conclus que le corps AB pesant 10 ℔ 1 un once, & sa surface AC étant un pouce quarré, le frottement est de 15 onces.

COROLLAIRE I.

573. Le frottement de ce corps étant trouvé, on trouvera aisément celui de tel autre corps de même matiere que l'on voudra, quelque puisse être son poids, & sa surface AC; car le frottement étant causé par la pesanteur & par la grandeur des surfaces qui exigent un plus grand ou un moindre brisement de parties, selon qu'elles sont moindres ou plus grandes, il est visible qu'en supposant toujours la même poulie & le même poids de la corde, les frottemens sont en raison composée des pesanteurs & des surfaces; donc supposant un autre corps dont le poids fut de 25 ℔, & la surface AC de 4 pouces quarrés, on diroit d'abord en supposant les bases égales; si 10 ℔ 1 once donnent 15 onces de frottement, combien donneront 25 ℔, & faisant la regle, on trouveroit 2 ℔, 5 onces $\frac{43}{16}$, après quoi on diroit; si un pouce quarré de surface donne 2 ℔, 5 onces $\frac{43}{161}$ de frottement, combien donneront 4 pouces? & faisant la regle, on trouveroit 3 ℔, 5 onces $\frac{13}{161}$ pour le frottement cherché, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

574. Si le corps AB & la surface TS étoient d'une autre matiere, il faudroit faire une expérience comme ci-dessus, & le reste s'acheveroit de même.

COROLLAIRE III.

575. Si le corps AB étoit sphérique & qu'il roulât sur la surface TS, il faudroit faire aussi une experience pour trouver son

ſon frottement, & enſuite celui de tous les corps ſemblables qui ſeroient plus ou moins grands, & il faudroit la faire de même ſi ce corps ſpherique raſoit la ſurface; car le frottement dans ce dernier cas ſeroit plus grand que ſi le corps rouloit, à cauſe que les parties engraînées ſe deſengraîneroient moins facilement; par exemple, ſi le corps ſpherique DB (*Fig.* 204.) eſt tirée par la puiſſance P ſelon la direction PO parallele à la ſurface AC, & que ce corps ne roule point, c'eſt-à-dire qu'il touche toujours la ſurface AC par l'extremité du même rayon OB, il eſt viſible que pour deſengraîner la partie B, il faut néceſſairement faire monter le centre de gravité, & que pendant ce mouvement, l'effort que cette partie B fait contre la partie de la ſurface qui s'oppoſe à ſon mouvement, eſt toujours le même; au contraire, ſi le corps roule en ſorte que le rayon OB prenne la portion BR, le centre de gravité ſe dérange ſans monter, & par ſon propre poids il acheve de deſengraîner le rayon BR, lequel s'inclinant toujours davantage ſur la ſurface, agit ſur la partie qui s'oppoſoit à ſon mouvement avec un effort qui diminue de plus en plus.

COROLLAIRE IV.

576. Il ſuit delà que le frottement d'un corps ſpherique qui roule ſur une ſurface eſt moindre que celui du même corps qui raſe cette ſurface, & que celui-ci eſt auſſi moindre que le frottement que ce même corps ſouffriroit ſi on lui donnoit une figure qui eut pluſieurs ſurfaces, en ſorte que l'une de ſes ſurfaces portât ſur la ſurface du corps inférieur.

COROLLAIRE V.

577. Il eſt aiſé de voir ce qu'il faut faire pour trouver le frottement d'un corps C qui ſe meut le long d'un plan incliné AB, (*Fig.* 205.), mais afin qu'on n'y ſoit pas embarraſſé, voici comment on fera.

S'il n'y avoit point de frottement, le poids P qui ſoutient le poids Q à l'aide de la poulie E, ſeroit à ce poids comme la hauteur BC eſt au plan incliné AB, ainſi qu'il a été démontré en parlant du plan incliné, mais à cauſe des frottemens, ſoit ſur le plan incliné, ſoit ſur la poulie, le poids P doit être plus fort.

Pour trouver donc ce qu'il faut ajouter au poids P, je mene du point E où la direction QE touche la poulie E, la droite ER perpendiculaire à l'horizon; je prens ſur QE la droite EX à diſ-

cretion, & du point X menant XR parallele à l'horizon, j'acheve le parallelogramme RZ, il eſt évident que ſi la force du poids Q eſt exprimée par la diagonale EX, cette force équivaudra aux forces exprimées par les côtés XZ, ZE, mais la force ZE n'agit point ſur la poulie, donc il n'y a que la force XZ qui peſe ſur elle, ainſi l'effort que le poids Q fait ſur la poulie, eſt à l'effort qu'il feroit ſi ſa direction étoit perpendiculaire comme XZ eſt à XE; je trouverai de la même façon l'effort que la corde EQ fait ſur la poulie, & par conſéquent ſi j'employe les regles de la Propoſition 164, je trouverai le frottement de la poulie cauſé par les poids P, Q, par les cordes EQ, EP, & par la roue de poulie; ajoutant donc cette quantité de frottement au poids P, & la partie du poids de la corde EQ que le poids Q ſoutient, ce poids P n'entraînera pas encore le poids Q, parce qu'il y a encore à ſurmonter le frottement ſur le plan incliné. J'ajoute donc au poids P des petites quantités, juſqu'à ce que j'en trouve une qui commence à faire mouvoir le corps Q, & cette quantité étant trouvée, je dis qu'elle eſt égale au frottement de Q ſur le plan incliné en retranchant neanmoins la partie du poids de la corde QE que le poids Q ſoutient, ce qui n'a pas beſoin de Demonſtration après tout ce que nous avons dit ci-deſſus; & delà il eſt aiſé de connoître les frottemens des autres corps ſemblables au corps Q, & qui ſeront plus grands ou moindres, en ſuppoſant qu'ils ſoient de même matiere; car s'ils étoient de différente matiere, il faudroit toujours avoir recours à l'experience.

PROPOSITION CLXIX.

578. *Trouver le frottement d'une roue dans ſon aiſſieu.* (Fig. 207).

SOLUTION.

La roue dans ſon aiſſieu eſt ordinairement ſoutenue ſur deux pieds EF, HL, ſur leſquels elle tourne, & les parties de ſon aiſſieu qui portent ſur ces pieds ſont moins épaiſſes que le reſte du même aiſſieu autour duquel la corde du poids Q s'entortille.

S'il n'y avoit point de frottement, & que ni la roue, ni ſon aiſſieu, ni les cordes du poids Q & du poids P qui le ſoutient ne peſaſſent point, le poids P feroit au poids Q comme le rayon OT de l'aiſſieu eſt au rayon OA de la roue, comme il a été démontré plus haut en parlant de cette machine; ſuppoſant donc que le rapport du rayon de la roue à celui de l'aiſſieu ſoit comme

4 à 1, & que le poids Q fut de 300 ℔, le poids P devroit être 75 ℔ qui est le quart de 300 ℔, en supposant que le poids de la corde du poids P fut celui de la corde du poids Q dans la même raison de 1 à 4, ce qui est facile à faire ; c'est pourquoi la moindre quantité qu'on ajouteroit au poids P entraîneroit le poids Q, s'il n'y avoit point de frottement.

Or ce frottement vient non-seulement de la pesanteur des deux poids & de leur cordes, mais encore de celle de la roue & de son aissieu qui pesent sur les deux pieds ; supposant donc que la roue & son aissieu pesent 200 ℔, & les deux cordes 4 ℔, ce qui fait 204 ℔ ; j'ajoute à cette somme le poids $Q = 300$, & le poids $P = 75$, & le tout ensemble fait 579 ℔ pour le poids total qui pese sur les deux pieds ; j'ajoute donc au poids P des petites quantités jusqu'à ce que j'en trouve une qui commence à rompre l'équilibre, & supposé que cette quantité soit 2 ℔, je dis que le frottement que le poids P doit surmonter est de 2 ℔, & que par conséquent ce poids doit être de 77 ℔.

COROLLAIRE I.

579. Le frottement de la machine chargée, ainsi que nous l'avons supposé étant trouvé, on trouvera facilement celui de la même machine qui ne seroit chargée ni des poids ni des cordes ; car la pesanteur totale étant 579 ℔, si l'on en retranche celui des poids & des cordes qui est 379 ℔, le reste sera 200 ℔, & l'on dira si 579 ℔ donnent 2 ℔ de frottement, combien donneront 200 ℔, & faisant la régle, on trouveroit $\frac{400}{579}$ ℔ pour le frottement.

COROLLAIRE II.

580. Le frottement de cette roue étant connu, on connoîtra sans peine le frottement d'une autre roue plus grande ou moindre faite de la même matiere, en supposant que les diametres & les longueurs des parties des aissieux qui portent sur les pieds soient toujours les mêmes.

Car si une autre roue avec son aissieu pese par exemple 600 ℔, on dira si 200 ℔ donnent $\frac{4\ 0}{579}$ de frottement, combien donneront 600 ? & la regle faite, on trouvera $\frac{1200}{579}$ ℔ pour le frottement, & ainsi des autres.

COROLLAIRE III.

581. Si les diametres des parties des aissieux qui portent sur les pieds étoient différens, leur circonférences seroient entr'elles comme les diametres ; ainsi en supposant que dans la roue qui pese 600 ℔, le diametre de la partie de l'aissieu qui porte sur les pieds fut à celui de la partie de l'aissieu qui porte sur les pieds dans l'autre roue comme 1 à 3 ; on diroit en supposant les diametres égaux le frottement dans la roue de 600 ℔ est $\frac{1200}{579}$; donc en supposant les diametres comme 1 à 3, ce frottement doit être à celui que je cherche comme 1 à 3, c'est pourquoi il doit être $\frac{3600}{579}$ ℔ = 6 ℔, $\frac{135}{579}$ = 6 ℔ $\frac{45}{193}$.

COROLLAIRE IV.

582. Si les diametres & les longueurs des parties des aissieux qui portent sur les pieds étoient différens, alors les surfaces de ces parties seroient en raison composée des diametres & des longueurs ; supposant donc que dans la roue de 600 ℔ le diametre fut 4 pouces, & la longueur 6, & que dans la roue de 200 ℔ le diametre fut 3 pouces, & la longueur 5, la raison composée de la raison 4, 3, des diametres & de la raison 6, 5, des longueurs, seroit 12, 30, ou 2, 5, c'est pourquoi ayant trouvé qu'en supposant égalité entre les surfaces des parties des aissieux qui portent sur les pieds le frottement de la roue de 600 ℔ est $\frac{1200}{579}$ ℔, je dis 2, 5 :: $\frac{1200}{579}$, $\frac{6000}{1158}$ = 5 ℔, $\frac{35}{193}$, & c'est le frottement cherché.

COROLLAIRE V.

583. Si les roues étoient d'une autre matiere, on feroit une experience sur l'une d'entr'elles, après quoi le reste se trouveroit comme ci-dessus.

PROPOSITION CLXX.

584. *Trouver le frottement des roues dentées.* (Fig. 206.)

SOLUTION.

Soient les trois roues dentées de la figure 206. ces trois roues portent chacune sur deux pivots qui les soutiennent, & il est visible qu'il s'y fait deux sortes de frottement dont le premier est

celui des aissieux sur leurs pivots, & le second est celui des dents des roues & des aissieux.

Pour trouver donc le frottement total de la machine, je suppose d'abord que nous n'ayions que la premiere roue OI à l'aissieu de laquelle soit suspendu un poids P, lequel avec sa corde PR pese par exemple 40 ℔, & qu'en I il y ait une puissance qui soutienne ce poids ; cette roue ainsi chargée n'est autre chose qu'une roue dans son aissieu, c'est pourquoi je cherche son frottement par les regles de la Proposition précédente, & supposant que ce frottement soit 1 once, je l'écris à part sans l'ajouter à la puissance I, parce que les divisions que je ferai obligé de faire dans les operations suivantes en diminueroient la quantité ; or en supposant que le rayon TO soit au rayon OI, comme 1 à 5, la puissance I est au poids comme 1 à 5, comme il a été dit en parlant de la roue dans son aissieu ; ainsi cette puissance seroit 8 s'il n'y avoit point de frottement seroit 8 ℔, & elle devroit être 8 ℔ 1 once si elle devoit surmonter le frottement, c'est-à-dire, s'il n'y avoit point d'autres roues.

Je mets une seconde roue dont je suppose que le rayon FG & le rayon GI de l'aissieu soient de même grandeur que ceux de la premiere roue, & mettant au lieu de la premiere roue & de son poids une puissance en I de 8 ℔ qui tire selon la direction horizontale I*i*, & une autre en F qui pousse selon la direction horizontale *f*F, & qui soutienne la puissance I; il est visible 1°. que ces deux puissances font le même effet que si la puissance F soutenoit le poids P. 2°. Que la puissance F doit être à la puissance I, comme 1 à 5, & que par conséquent elle doit être 1 ℔, 9 onces $\frac{1}{5}$. 3°. Que les deux puissances ne chargent point la roue FG, puisque leur directions sont horizontales, & que par conséquent le frottement sur les parties de son aissieu qui portent sur les pivots, n'est causé que par le poids de cette roue & de son aissieu; cherchant donc ce frottement, & supposant qu'il soit $\frac{1}{5}$ onces, je l'écris à part, pour les raisons dites ci-dessus.

Je mets une troisiéme roue AC égale en tout aux précédentes, & mettant en F une puissance qui vaille 1 ℔, 9 onces $\frac{1}{5}$ au lieu de la seconde roue, laquelle puissance pousse selon la direction *f*F, & en A une autre puissance qui tire selon la direction A*a*, & qui soutienne la puissance F, je trouve en raisonnant comme ci-dessus, que la puissance A doit être 5 onces $\frac{3}{25}$, & le frottement de la roue $\frac{1}{5}$ onces.

La puiſſance A doit être 5 onces $\frac{3}{25}$ pour ſoutenir le poids P $=$ 40 ℔, lorſqu'il n'y a point de frottement, mais comme nous venons de trouver que le frottement des trois aiſſieux des roues eſt 1 once $+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$ 1 once $\frac{2}{5}$, il s'enſuit que s'il n'y avoit que le frottement des trois aiſſieux, la puiſſance A devroit être de 6 onces $\frac{13}{25}$ pour le ſurmonter, paſſons au frottement des dents.

Je ſuppoſe d'abord qu'il n'y ait que les deux premieres roues IO, FG, & je mets en *f* une poulie de même matiere que les roues ayant le diametre de l'aiſſieu égal au diametre des parties de l'aiſſieu O qui portent ſur les pivots, & la longueur de l'aiſſieu égale aux longueurs de ces deux parties de l'aiſſieu priſes enſemble ; j'attache en F une corde que je fais paſſer ſur la poulie, & à l'extremité de laquelle eſt un poids peſant avec ſa corde Q*f*, 1 ℔, 9 onces $\frac{3}{5}$, & par conſéquent les poids P, Q, ſont en équilibre ; j'ajoute au poids Q des petites quantités juſqu'à ce que j'en trouve une qui commence à donner du mouvement aux deux roues, & ſuppoſant que cette quantité ſoit 1 ℔, 3 onces, je dis que le frottement des deux roues & de la poulie *f* eſt d'une livre 3 onces.

Or pour avoir le ſeul frottement des dents, je dois retrancher d'une livre trois onces. 1°. Le frottement une once $\frac{1}{5}$ des deux roues. 2°. Le frottement de la poulie que je conſidere chargée du poids Q & de ſa roue, faiſant abſtraction de la corde *f*F, parce que la poulie & la roue F*g* la ſoutenant également, elle cauſe un égal frottement de part & d'autre, à cauſe de l'égalité des ſurfaces des aiſſieux que nous avons ſuppoſées telles uniquement pour négliger le poids de cette corde ; ſuppoſant donc que le frottement de la poulie ſoit $\frac{3}{5}$ onces, je l'ajoute au frottement 1 once $\frac{1}{5}$ des aiſſieux des deux roues, & retranchant la ſomme 1 once $\frac{4}{5}$ du frottement 1 ℔, 3 onces, le reſte 1 ℔, 1 once $\frac{1}{5}$ eſt le frottement des dents des deux roues ; ainſi la puiſſance F doit être 1 ℔, 9 onces $\frac{3}{5}+$ 1 ℔, 1 once $\frac{1}{5}$, c'eſt-à-dire 2 ℔, 10 onces $\frac{4}{5}$, ſi l'on veut que cette puiſſance ſurmonte le frottement des deux roues, quand le poids P eſt de 40 ℔.

Je mets la troiſiéme roue, & je tranſporte la poulie avec ſa corde en *a*, où je ſuſpends un poids L peſant avec ſa corde 5 onces $\frac{5}{25}$, & ce poids eſt en équilibre avec le poids P ; j'ajoute donc à ce poids des petites quantités, juſqu'à ce que j'en trouve une qui commence à donner du mouvement, &

ſuppoſant que cette quantité ſoit 2 ℔, je dis que le frottement des trois roues & de la poulie *f* eſt de 2 ℔.

Et pour avoir le ſeul frottement des dents de la troiſiéme & ſeconde roue, je n'ai qu'à retrancher de ce frottement, le frottement des aiſſieux des trois roues, celui de la poulie, & celui des dents de la ſeconde & premiere roue, & le reſte ſera le frottement cherché.

La puiſſance A doit donc être 5 onces $\frac{3}{25}$ + 2 ℔, c'eſt-à-dire 2 ℔, 5 onces $\frac{3}{25}$, ſi l'on veut qu'elle ſurmonte le frottement de la machine, quand le poids $P = 40$ ℔.

COROLLAIRE.

585. Le frottement de cette machine étant trouvé pour un poids de 40 ℔, il eſt facile de trouver le frottement pour tel autre poids qu'on voudra ; car ſi l'on ſuppoſe que ce poids ſoit 70 ℔, le frottement de l'aiſſieu de la premiere roue ſe trouvera en diſant : ſi 40 donnent une once, combien donneront 70 ? & la regle faite, on trouvera $\frac{70}{40} = \frac{7}{4} =$ 1 once $\frac{3}{4}$; les frottemens des aiſſieux des deux autres roues ſeront toujours chacun $\frac{1}{5}$; ainſi le frottement total des aiſſieux ſera 1 once $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$ 2 onces $\frac{3}{20}$.

La puiſſance I ſeroit au poids P comme 1 à 5, & par conſéquent 14 ℔, & la puiſſance F ſeroit auſſi le cinquiéme de la puiſſance F, ou 2 ℔, 12 onces $\frac{4}{5}$, & l'on diroit quand le poids eſt de 40 ℔, le frottement que doit ſurmonter la puiſſance F eſt de 1 ℔, 3 onces, de combien doit être ce frottement, lorſque le poids eſt de 70 ? & la regle faite, on trouveroit la valeur de ce frottement, & retranchant de cette valeur le frottement des aiſſieux des deux roues, le reſte ſeroit le frottement des dents de la premiere roue & de l'aiſſieu de la ſeconde, & on trouveroit même le frottement total des trois roues, &c.

COROLLAIRE III.

586. Si les roues de la machine qu'on veut employer étoient faites d'une autre matiere, ou que les rapports de leurs rayons ne fuſſent pas les mêmes non plus que ceux de leur aiſſieux, il faudroit faire une expérience en ayant égard à toutes ces choſes ; après quoi il ſeroit aiſé de trouver les frottemens de cette machine pour tous les poids poſſibles.

I. REMARQUE.

587. On m'objectera peut être que mon experience donne plus de frottement aux dents des roues, qu'elles n'en ont, parce que je m'arrête au premier instant où les roues commencent à avoir du mouvement, & que dans cet instant l'effort mutuel des dents étant perpendiculaire, se trouve plus fort que dans les instans suivans où les directions de ces efforts deviennent obliques de plus en plus, & causent par conséquent moins de frottement; mais à cela je répons 1°. qu'en fait de machine on ne risque rien de donner toujours à la puissance un peu plus qu'il ne faudroit, d'autant plus que les machines sont faites bien moins pour tenir les poids en équilibre que pour les enlever. 2°. Qu'à la verité, le frottement est moins grand que je ne le fais, si l'on ne considere que le frottement de deux dents qui peu à peu se désengraînent, mais il faut faire attention que pendant ce tems, il y a deux autres qui s'engraînent aussi peu à peu, & qui par conséquent font un frottement qui peut compenser ce qu'on donne de trop de l'autre côté ; ainsi quoiqu'il me paroisse assez facile de résoudre la question géometriquement en n'y employant que les principes méchaniques que nous avons vus dans ce Livre, je ne m'y arrêterois cependant pas de peur de grossir trop cet Ouvrage auquel j'ai encore bien des choses à ajouter.

II. REMARQUE.

588. Les principes que j'ai donné dans ce Chapitre peuvent s'appliquer à toute sorte de machines quelques composées qu'elles puissent être, & l'on pourroit en tirer des regles generales, & en composer même des tables qui seroient d'une grande utilité dans la pratique. Je pourrai même le faire un jour si Dieu me donne assez de vie & du loisir, mais en attendant si quelqu'un vouloit s'y appliquer, il pourroit s'assurer que son Ouvrage ne seroit pas du nombre de ceux dont le Public ne tire aucun profit.

ADDITION



ADDITION
A CETTE PREMIERE PARTIE.

OU L'ON TRAITE DE LA FORCE DU choc des Corps projettés, & du choc des Corps qui se frappent, ensorte que leurs centres de gravité ne sont pas sur la Ligne de Direction.

De la force des Corps projettés.

589. IL faut se rappeller ici, 1°. Que lorsqu'un corps A est projetté selon une direction quelconque AB (*Fig.* 208), il décrit une courbe AOS qui est une parabole (*N.* 270). 2°. Que tandis que dans les tems 1, 2, 3, 4, &c. à commencer toujours depuis l'origine A du mouvement, il décriroit par le mouvement uniforme de son impulsion les droites AC, AD, AE, &c. qui sont entr'elles comme les tems, le mouvement acceleré de sa pesanteur lui feroit décrire les droites CL, DM, EN, FO, &c. qui sont entr'elles comme les quarrés des tems (*N.* 270), de façon que lorsque le corps par le mouvement d'impulsion décriroit dans des tems des espaces égaux AC, CD, DE, &c. ce même corps décriroit dans le même tems par l'effet de sa pesanteur, des espaces qui seroient les différences des droites CL, DM, EN, &c. ou les différences 1, 3, 5, 7, &c. des quarrés 1, 4, 9, 16, &c. des tems 1, 2, 3, 4, &c. 3°. Que si du point A on mene une droite horizontale AS, & que des extrémités des arcs de parabole AL, LM, MN, &c. parcourus dans des tems égaux, on abaisse des perpendiculaires LT, MV, NY, &c. sur l'horizontale AS, les espaces horizontaux AT, TV, VY, &c. correspondans aux arcs de parabole seront égaux entr'eux (*N.* 275), de façon que si l'on prend pour la mesure d'un instant, la droite AT qui repond à l'arc AL parcouru dans le pre-

mier instant, la droite AS sera égale à la droite AT multipliée par le nombre des instans que le corps aura employé à parcourir la courbe AOS, & par conséquent cette droite représentera le tems employé à parcourir l'arc AOS, de même la droite AZ qui répond à l'arc ALMNOP sera égale à AT multipliée par le tems ou par le nombre des instans employés à parcourir l'arc ALMNOP, & par conséquent elle représentera le tems employé à parcourir l'arc ALMNOP, & ainsi des autres, ce qui est évident par la seule inspection de la figure.

590. Si l'on coupe l'horizontale AS (*Fig.* 209.) en parties infiniment petites & égales, & que des points A, B, C, D, &c. on éleve des perpendiculaires BF, CG, &c. jusqu'à la rencontre de la parabole, les arcs AF, FG, GH, &c. seront les arcs parcourus par le corps dans des tems infiniment petits & égaux; or ces arcs à cause de leur extréme petitesse peuvent passer pour des lignes droites qui marquent les changemens de direction du corps à chaque instant, & par conséquent on peut regarder ces petits arcs comme faisant partie des tangentes de la courbe aux points A, F, G, H, &c.

La droite AB (*Fig.* 208.) étant l'espace que la force uniforme de la poudre feroit parcourir au corps pendant le tems AS, il est visible que la droite AC est l'espace que cette même force feroit parcourir au corps dans le premier instant AT, ainsi AC peut être pris pour la force de la poudre; or le corps en parcourant AC s'avance vers le côté opposé à l'origine A du mouvement d'une quantité égale à AT, donc AT est la vitesse de A vers S dans le tems qu'il s'avance vers C, & par conséquent AC étant regardée comme la force de la poudre, la droite AT peut être regardée comme la force respective de la poudre, eu égard au mouvement des corps de A vers S, dans le tems que par sa direction il parcourroit AC; pour abreger le discours nous nommerons simplement *force de la poudre*, la force respective AT.

591. *Si le corps projetté* A (Fig. 209.) *choque en un point quelconque* F *de la parabole, un plan qui soit perpendiculaire à sa direction, la force du choc est égale à la racine du parametre du diametre* FB *qui passe par ce point* F.

L'arc AF étant infiniment petit, peut être regardé comme une ligne droite qui fait partie de la tangente FP, ainsi AF marque la direction de la force qui pousse le corps vers F; or cette force est équivalente aux deux AB, BF, dont la derniere BF

quoique retardée par la pesanteur, peut être regardée comme uniforme, à cause du tems infiniment petit que le corps employe à parcourir l'arc AF; & à cause des triangles semblables ABF, FRP, nous avons AB, BF, comme FR est à RP, donc les forces AB, BF qui composent la force AF, sont entr'elles comme les forces FR, RP qui composeroient la force FP, mais il est visible que la force AB est égale à la force FR divisé par le tems que le corps employeroit à parcourir l'arc FO qui se termine au sommet O de la parabole, donc la force FB est égale à la force PR divisée par le même tems, & la force AF est égale à la force FP, divisée aussi par le même tems.

Supposant que l'ordonnée FR contienne trois parties égales, l'arc FO sera parcouru dans trois instans; or par la proprieté de la parabole les ordonnées FR sont comme les racines des abscisses OR, donc le tems employé à parcourir l'arc FO étant représenté par FR, sera comme la racine de OR.

Je nomme le parametre de l'axe $= a = 1$, & l'abscisse OR $= x$; donc par la proprieté de la parabole $PO = x$, $PR = 2x$, $FR = \sqrt{ax}$, & $\sqrt{OR} = \sqrt{x}$, égal au tems employé à parcourir l'arc FO; or à cause du triangle rectangle FPR, nous avons $\overline{FP}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{FR}^2$, donc $\overline{FP}^2 = 4x^2 + ax$, & $FP = \sqrt{4xx + ax}$; mais AF est égal à FP divisé par le tems, ainsi que nous venons de voir, donc $AF = \frac{\sqrt{4xx + ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{4x + a}$; or par la proprieté de la parabole le parametre du diametre qui passe par le point F est égal à quatre fois l'abscisse OR plus le parametre de l'axe, donc ce parametre est $4x + a$, & par conséquent la force du choc au point F est égal à la racine de ce parametre.

De même si le choc se fait en G, la petit arc FG étant la continuation de la tangente Gg seroit la direction du choc; or cette direction est composée des deux Ff, fG, & à cause des triangles rectangles semblables Ffg, Grg, on a Ff, $fG :: Gr$, rg, donc les deux forces Ff, Gg qui composent la direction FG sont comme les forces Gr, rg qui composeroient la force Gg, mais Gr étant le tems que la bombe employeroit à parcourir l'arc GO, la force Ff est égale à Gr divisé par le tems, c'est-à-dire par $\sqrt{Or}$, donc Gf est égale à gr divisé par le même tems $\sqrt{Or}$, & par conséquent la force composée FG, c'est-à-dire la force du choc en G est égale à Gg, divisé par le tems; nommant donc $Or = x$ on

aura $gr = 2x$, $Gr = \sqrt{ax}$, & par conféquent $Gg = \sqrt{\overline{Gr}^2 + \overline{rg}^2}$ $= \sqrt{ax + 4xx}$, & divifant par $\sqrt{x}$, on aura $FG = \frac{\sqrt{4xx + ax}}{\sqrt{ax}}$ $= \sqrt{4x + a}$, ainfi la force du choc en G eft égale à la racine du parametre du diametre qui paffe par G, & on démontrera la même chofe, non-feulement pour tous les points de la demi-parabole AO, mais encore pour tous les points de l'autre demi-parabole OS prolongée à l'infini, ainfi qu'on va voir.

Suppofons, par exemple, que le corps choque en M, quand ce corps eft parvenu de A au fommet O, fa pefanteur a éteint toute la force qu'il avoit pour s'élever, de façon que fa viteffe en O le long de la verticale eft zero, c'eft-à-dire, qu'en cet inftant le corps eft comme s'il étoit en repos, eu égard à la direction verticale, & qu'il commençât à defcendre, ainfi l'inftant d'après lorfqu'il a parcouru l'arc OV, il a un degré de viteffe acquife, & lorfqu'il a parcouru l'arc OX, il a deux degrés de viteffe acquife, & ainfi de fuite; maintenant quand il fera parvenu en M, où il choquera felon la direction PM, le tems employé à parcourir l'arc OM fera exprimé par la droite RM ou par la racine de OR, c'eft-à-dire par $\sqrt{x}$, à caufe que les ordonnées RM font comme les racines des abfciffes OR, donc la viteffe acquife en M par la force de la pefanteur fera auffi $\sqrt{x}$, puifque dans l'hypotefe de Galilée les viteffes acquifes font comme les tems; or l'abfciffe OR étant la hauteur dont la pefanteur a fait defcendre le corps lorfqu'il eft arrivé en M, fi nous doublons cette abfciffe, c'eft-à-dire, fi nous prenons la foutangente RP, cette foutangente fera l'efpace que le corps parcourroit avec une viteffe uniforme égale à $\sqrt{x}$ dans le même tems que la pefanteur lui a fait parcourir l'abfciffe OR (*N.* 63); fuppofant donc que la force uniforme de la poudre, eu égard à la direction horizontale, fût exprimée par RM, la force de la direction PM feroit compofée des deux forces $PR = 2x$, & $RM = \sqrt{ax}$, ainfi à caufe du triangle rectangle PRM qui donne $\overline{PR}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{PM}^2$, nous aurons $\overline{PM}^2$ $4x^2 + ax$ & $PM = \sqrt{4x^2 + ax}$; mais la force de la poudre n'eft pas RM, mais $MN = VS = AB$, c'eft-à-dire RM divifé par le tems $\sqrt{x}$, donc l'autre force compofante doit être PR divifé par $\sqrt{x}$ & la force compofée doit être PM divifé par $\sqrt{x}$, & par conféquent cette force eft $\frac{\sqrt{4x^2 + ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{4x + a}$.

Et pour s'en mieux convaincre, il n'y a qu'à faire attention que MN étant la force de la poudre, si de l'extrémité N je mene la verticale NS sur la direction PM prolongée, les deux forces MN, NS seront les forces composantes de la force NS; or les triangles rectangles RPM, SNM étant semblables donnent MN, RM :: NS, PR :: MS, PM, & nous avons $MN = \frac{RM}{\sqrt{x}}$, donc $NS = \frac{PR}{\sqrt{x}}$ & $MS = \frac{PM}{\sqrt{x}} = \sqrt{4x + a}$.

On dira peut-être que puisque la pesanteur rendue uniforme aura fait parcourir au corps l'espace PR dans le même tems que la force uniforme de la poudre aura fait parcourir l'espace RM, la force de la direction étant composée de ces deux forces doit être PM, & non pas PM divisé par $\sqrt{x}$; cela est vrai par rapport à l'espace parcouru, c'est-à-dire, que si la pesanteur avoit été rendue uniforme, le corps auroit parcouru la diagonale PM dans le même tems qu'il a parcouru l'arc OM, mais par rapport au choc, il faut prendre garde que les forces uniformes ne frappent pas plus fort à la fin du second instant de leur mouvement, du troisiéme, du quatriéme, &c. qu'elles ne frappent à la fin du premier, & qu'ainsi la force de leur choc au premier instant étant exprimée par l'espace parcouru dans ce premier instant, celle du choc à la fin du mouvement étant la même, doit être aussi exprimée par l'espace parcouru à la fin du mouvement, divisé par le nombre des instans de la durée de ce mouvement, c'est-à-dire par le tems. Supposant donc que le tems employé à parcourir les espaces PR, RM soit trois instans, la force de la poudre à la fin du premier instant sera RQ = AB, à la fin du second elle sera QZ = RQ = AB, & à la fin du troisiéme elle sera ZM ou MN = AB, & par conséquent elle sera $\frac{1}{3}$ RM, ou RM divisé par 3, ou RM divisé par le tems de la durée du mouvement; par la même raison la force de la pesanteur rendue uniforme ne sera à la fin du premier instant, ou du second, ou du troisiéme, que le $\frac{1}{3}$ de PR ou PR divisé par le tems, & par conséquent la force de la direction étant composée de la force de la poudre exprimée par $\frac{RM}{\sqrt{x}}$ & de celle de la pesanteur exprimée par $\frac{PR}{\sqrt{x}}$ ne sera que $\frac{PM}{\sqrt{x}}$, c'est-à-dire le $\frac{1}{3}$ de PM en supposant que le tems est égal à 3.

Quand le corps choque en O, l'ordonnée correspondante

x eſt égale à zero, & par conſéquent la formule $\sqrt{4x+a}$ devient $\sqrt{a}$, c'eſt-à-dire que la force du choc au ſommet eſt égale à la racine du parametre de l'axe.

592. A meſure que le corps monte de A vers O les parametres des diametres qui paſſent par les points A, F, G, H, &c. vont en diminuant, puiſque ces parametres ſont égaux au parametre de l'axe plus quatre fois les abſciſſes correſpondantes OE, OR, &c. qui vont en diminuant; donc les chocs du corps dans ces points vont en diminuant juſqu'en O, après quoi ils vont en augmentant de O en S, de façon que ceux qui ſe font de part & d'autre dans des points également éloignés du point O ſont égaux; ainſi le choc en F, lorſque le corps eſt parvenu de A en F, eſt égal au choc en M lorſque le corps eſt parvenu de O en M, ce qui eſt facile à démontrer.

593. *Si le plan choqué* TZ (Fig. 210.) *étant perpendiculaire au plan de projection* AMS, *eſt cependant oblique à la direction* PM *du choc, la force du choc au point* M *eſt égale au ſinus de l'angle d'incidence* PMR *de la direction ſur le plan, en prenant pour ſinus total la racine du parametre du diametre qui paſſe par le point* M.

Suppoſons que la commune ſection du plan choqué TZ & du plan de projection AMS ſoit la droite MV, & que ces deux plans ſe coupent à angles droits, je prolonge MV, & du point P j'abaiſſe PR perpendiculaire ſur MR, la droite PR ſera perpendiculaire au plan TZ, car concevant que ce plan ſoit prolongé, & menant dans ce même plan la droite HL qui paſſe par le point L, & qui ſoit perpendiculaire à MR, la droite PR ſera perpendiculaire à HL, à cauſe qu'elle eſt dans le plan AMS, lequel par la ſuppoſition étant perpendiculaire au plan TZ, n'incline pas plus vers L que vers H, donc PR étant perpendiculaire aux deux lignes MR, HL, qui ſont dans le plan TZ, eſt par conſéquent perpendiculaire à ce plan; cela poſé, la force de la direction PM eſt compoſée de la force PR & de la force RM; mais la force RM étant parallele au plan TZ, n'agit point ſur ce plan, donc la force PM n'agit ſur ce plan que comme la force PR qui lui eſt perpendiculaire; or en prenant pour ſinus total la direction PM, la droite PR eſt le ſinus de l'angle d'inclinaiſon PMR, donc ſi le choc de la direction PM ſur un plan qui lui ſeroit perpendiculaire, étoit exprimée par PM, la force du choc de cette même direction ſur le plan oblique TZ ſeroit exprimée par PR ou par le ſinus de l'angle d'inclinaiſon PMR, en prenant PM pour ſinus

total ; mais la force du choc de PM ſur un plan perpendiculaire eſt PM diviſé par $\sqrt{x}$, ainſi que nous avons vû ci-deſſus (*N.* 592), donc la force du choc de PM ſur le plan oblique TZ eſt PR diviſé par $\sqrt{x}$, ou le ſinus de l'angle d'inclinaiſon PMR par rapport au ſinus total PM diviſé par $\sqrt{x}$; mais PM diviſé par $\sqrt{x}$ eſt égal à la racine du parametre qui paſſe par le point M, donc la force du choc ſur le plan TZ eſt égale au ſinus de l'angle d'inclinaiſon PMR en prenant pour ſinus total la racine du parametre du diametre qui paſſe par le point M.

594. *Si le plan choqué* TZ (Fig. 211.) *eſt oblique au plan de la projection & à la direction* PM, *on concevra un plan* PRM *perpendiculaire au plan choqué* TZ, *& qui paſſe par la direction* PM, *& menant dans ce plan la droite* PR *perpendiculaire à la commune ſection* RM *des deux plans* TZ, PRM, *on dira que la force du choc eſt comme* PR *diviſé par le tems* $\sqrt{x}$, *ou comme le ſinus de l'angle d'incidence* PRM *fait par la direction* PM *& la commune ſection* RM *en prenant pour ſinus total la droite* PM *diviſé par* $\sqrt{x}$, *c'eſt-à-dire la racine du parametre du diametre qui paſſe par le point* M.

Suppoſons que l'angle que le plan TZ fait avec le plan AMS de la projection du côté de K, ſoit moindre que l'angle qu'il fait du côté de T, je conçois que ce plan ſoit prolongé vers R, & de l'extrémité P menant ſur ce plan la perpendiculaire PR ; je mene du point R au point M la droite RM, laquelle ſera dans le plan TZ ; or PR étant perpendiculaire au plan TZ ſera auſſi perpendiculaire à la droite RM qui eſt dans ce plan, & par conſéquent le triangle MPR ſera perpendiculaire au plan TZ, & il ſera rectangle ; maintenant la force de la direction PM eſt compoſée des forces RM, PR & la force RM étant parallele au plan TZ n'agit point ſur ce plan, donc la force PM n'agit que comme PR ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon PMR ; mais ſi la force de la direction PM choquoit directement, elle ſeroit $\frac{PM}{\sqrt{x}}$, donc en choquant dans la direction oblique elle doit être $\frac{PR}{\sqrt{x}}$, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon PMR, en prenant pour ſinus total la racine du parametre du diametre qui paſſe par le point M ou la droite PM diviſée par $\sqrt{x}$.

Il ſuit de là que ſi un corps projetté pluſieurs fois de la même façon & avec la même force, & qui par conſéquent décrit toujours la même parabole, choque toujours dans le même point

des plans qui ſoient différemment inclinés à ſa direction ; les chocs ſur ces différens plans ſeront comme les ſinus des angles d'inclinaiſon de la direction ſur ces plans, à cauſe que les rayons totaux de ces angles ſeront toujours les mêmes ; mais ſi les corps choqués ſont dans des différens points de la parabole, les chocs ne ſeront pas ſimplement comme les ſinus des angles d'inclinaiſon, mais comme ces ſinus par rapport à différens ſinus totaux qui ſeront les racines des parametres des diametres qui paſſeront par les points où les chocs ſe feront.

Du choc oblique des Corps qui ſe meuvent uniformement.

595. Si deux corps ſpheriques *a*, *b* (*Fig.* 212.) ſe choquent de façon que leurs directions D*a*, E*b* paſſent l'une & l'autre par les deux centres *a*, *b*, ces corps ſe choquent directement, car ſuppoſant un plan qui paſſe par le point V d'attouchement, les directions *a*V, *b*V des deux corps ſeront perpendiculaires à ce plan, & par conſéquent le plan ST ſera choqué directement par l'un & l'autre corps, mais le choc des deux corps ſur le plan eſt le même que leur choc mutuel, puiſque les directions ſont les mêmes, donc les deux corps ſe choquent directement.

Mais ſi les deux corps *a*, *b* viennent à ſe choquer avec des directions AC, BC, qui ne paſſent pas chacune par les deux centres *a*, *b*, ces corps ſe choquent obliquement ; car ſuppoſant un plan ST qui paſſe par leur point d'attouchement ; il eſt viſible que la ligne *ab* qui joint les deux centres ſera perpendiculaire ſur ce plan, & par conſéquent les directions AC, BC qui ne paſſent pas par ces centres ſeront obliques ſur ST ; donc le choc des deux boules ſur ST ſera oblique, mais le choc des boules ſur ST eſt le même que le choc mutuel des deux boules, donc les deux boules ſe choquent obliquement.

596. *Si un corps ſpherique* M (Fig. 213.) *choque ſelon une direction oblique* AM *un autre corps ſpherique m, qui eſt en repos, & qui eſt plus grand ou moindre que le corps m après le choc, ſuivra la direction* M*m qui joint les deux centres, & le corps* M *prendra une direction compoſée de la même direction* M*m, & de la direction* AO, *avec laquelle il n'a point frappé le corps* M, *& ſa route variera ſelon que* M *ſera plus grand ou moindre que m.*

La direction AM eſt compoſée de la direction AO, qui ne frappe point le corps *m*, & de la direction OM qui frappe ce corps directement,

directement, donc le corps M après le choc doit ſuivre la direction Mm; cherchons maintenant les eſpaces parcourus par l'un & l'autre corps. Je nomme V la viteſſe OM du corps M avant le choc, & $u=0$ la viteſſe du corps m, laquelle eſt zero avant le choc, le corps m étant en repos peut être regardé comme ayant une viteſſe infiniment petite qui ſoit dans la même direction que la viteſſe OM du corps M & qui tende du même côté; or par la regle que nous avons enſeignée dans le Chapitre du choc des corps (*N. 336.*) la viteſſe de m après le choc ſera $\frac{2MV+mu-Mu}{M+m}$ $=\frac{2MV}{M+m}$, à cauſe $u=0$, & la viteſſe du corps M après le choc ſur la direction Om ſera $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}=\frac{MV-mV}{M+m}$, donc le corps m parcourra l'eſpace $mS=\frac{2MV}{M+m}$ dans un tems égal à celui que le corps M a employé avant le choc pour parcourir la direction AM, & quant au corps M, ſi ſa maſſe eſt plus grande que celle de m, ſa viteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ après le choc ſera poſitive, & par conſéquent il parcourra dans le même tems ſelon la direction MS un eſpace $=\frac{MV-mV}{M+m}$; mais comme la direction AO qui n'a point frappé le corps m ſubſiſtera toujours, il prendra un mouvement composé de la direction AO & de la direction MS; c'eſt pourquoi du point M menant la droite MZ égale & parallele à AO, & élevant au point Z la perpendiculaire ZY parallele à MS & égale à l'eſpace $\frac{MV-mV}{M+m}$ que M doit parcourir ſelon cette direction, la droite MY ſera la direction du corps M après le choc, & l'eſpace qu'il parcourra dans le même tems que m parcourra mS.

Si M eſt moindre que m, le corps m parcourera toujours ſur mS un eſpace $=\frac{2MV}{M+m}$, mais la viteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ étant négative, nous fera connoître que le corps M rebrouſſera ſon chemin de M vers O; c'eſt pourquoi prenant ſur MO une grandeur $MX=\frac{mV-MV}{M+m}$, & menant du point X la droite XT égale & parallelle à AO, le corps M ſuivra la direction composée MT & la parcourra dans le même-tems que m parcourra la droite $mS=\frac{2MV}{M+m}$.

597. *Poſant les mêmes choſes que dans le nombre précédent, ſi*

les corps M, *m*, *sont égaux, le corps* M *ne suivra que la seule direction* AO.

La vitesse $\frac{MV-mV}{M+m}$ sera en ce cas égale à zero ; donc si le corps M n'avoit que la direction OM, il resteroit en repos après le choc, mais comme la direction AO agit toujours sur lui, il parcourra l'espace MZ égal & parallele à AO ; & quant au corps *m* sa vitesse $\frac{2MV}{M+m}$ après le choc sera $\frac{2MV}{2M} = V$; donc ce corps parcourra un espace égal à OM dans le même-tems que M parcourra MZ.

598. *Trouver le point* V (Fig. 212.) *où se fait le choc de deux corps spheriques qui se choquent obliquement.*

Soient les deux corps A, B, qui se meuvent avec les directions AC, BC, en sorte que A puisse parcourir AC dans le tems que B peut parcourir BC ; je joins les centres de gravité par la droite AB, ensuite je dis la base AB du triangle BAC est au côté AC comme la somme des rayons est à un quatriéme terme que je porte de C en *a*, & du point *a* menant *ab* parallele à AB, je partage *ab* en V en deux parties égales aux rayons des boules, & le point V est le point du choc ; car à cause des triangles semblables ABC, *ab*C, la vitesse AC est à la vitesse BC comme la vitesse A*a* est à la vitesse B*b* ; ainsi les deux corps arriveront dans le même instant en *a* & *b* ; & il est visible qu'ils se choqueront, puisque la droite *ab* est égale à la somme de leur rayons.

599. *Les mêmes chocs étant posées que dans le nombre précédent, trouver la force du choc des deux corps* A, B, *& les directions & les vitesses qu'ils auront après le choc.*

Par le point d'attouchement V, je mene la tangente ST, laquelle sera perpendiculaire à la droite DE qui joint les deux centres ; des points A, B, je mene les droites AD, BE, qui coupent la droite DE en D & en E ; & la vitesse avec laquelle le corps A choque le corps B est D*a*, & celle avec laquelle le corps B choque A est *b*E ; car les directions A*a*, BE, étant composées, la premiere des directions AD, D*a*, & l'autre des directions BE, E*b*, il est visible que les deux corps ne se choquent qu'avec les directions D*a*, E*b* ; cela posé.

1°. Si les corps sont égaux, & que les vitesses avant le choc soient aussi égales, le choc se fera avec la somme des vitesses avant le choc, ce qui arrive toujours dans tous les cas (*N.* 335.)

& après le choc ils rebrousseront leur chemin avec la même vitesse, (*N.* 327.) ainsi le corps *a* iroit en D, & le corps *b* en E, mais à cause des directions AD, BE, si l'on prolonge ces directions en H & en R, & qu'on fasse DH égal à DA; & ER égal à EB, le corps *a* parcourra la diagonale *a*H dans le tems que le corps *b* parcourra *b*R.

2°. Si les masses sont réciproques aux vitesses, je nomme M la masse du premier, V sa vitesse D*a*, *m* la masse du second, & *u* sa vitesse *b*E; ainsi le mouvement du premier avant le choc sera MV, & celui du second sera mu, mais par l'hypotèse on a M, $m :: u$, V; donc $MV = mu$, & par conséquent les forces avant le choc seront égales, la force du choc sera $MV + mu$; or après le choc, la vitesse de M sera pour le cas present où les directions du choc sont contraires $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ (*N.* 336.); mais nous avons $mu = MV$; mettant donc cette valeur de mu, nous aurons $-\frac{MV - mV}{M + m} = -V$, c'est-à-dire le corps *a* rebroussera chemin avec la vitesse qu'il avoit auparavant, & par conséquent à cause de la direction AD qui le presse toujours, il parcourra la diagonale *a*H, la vitesse du corps *b* après le choc sera $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, & mettant au lieu de 2MV sa valeur $2mu$, nous aurons $\frac{MV + mu}{M + m} = u$, c'est-à-dire le corps *b* ira avec la vitesse qu'il avoit avant le choc, & à cause de la direction BE il parcourra la diagonale *b*R.

3°. Si les masses sont inégales & les vitesses égales (*Fig.* 214.) les forces avant le choc sont MV, mu, & par conséquent à cause de l'égalité des vitesses, le choc est comme la somme $M + m$ des masses; la vitesse du corps *a* après le choc sera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$, & mettant V au lieu de u son égale, nous aurons $\frac{MV - 3mV}{M + m}$, & par conséquent si M est plus grand que $3m$, la vitesse du corps *a* après le choc iroit de *a* en E, mais à cause de la direction AD qui le pousse toujours, si l'on mene *a*X parallele & égale à AD, & qu'en X on éleve XZ perpendiculaire à *a*X & égale à $\frac{MV - 3mV}{M + m}$, le corps *a* parcourera la diagonale *a*Z, mais si M est moindre que $3m$, le corps *a* parcourroit de *a* vers D un espace $aX = \frac{3mV - MV}{M + m}$, mais à cause de la direction AD, si

l'on mene XV parallele & égal à AD, le corps *a* parcourra la diagonale *a*V ; la viteſſe du corps *b* après le choc ſera $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, ou $\frac{3MV - mV}{M + m}$, à cauſe de $u = V$; ainſi ſuppoſant $bE = \frac{3MV - mV}{M + m}$, & prolongeant BE en H, en ſorte qu'on ait $EH = BE$, le corps *b* parcourra la diagonale BH.

Il eſt aiſé de juger de ce qui arriveroit ſi les maſſes étoient égales & les viteſſes inégales, ou ſi les maſſes & les viteſſes étoient inégales, ce qui ne merite pas que je m'y arrête davantage.

599. Si deux boules inégales A, B, (*Fig.* 215) qui roule ſur un plan HI, viennent à ſe choquer, le centre de la petite ſera moins élevé au-deſſus du plan, que celui de la grande, c'eſt pourquoi la ligne qui joindra leur centres dans le moment du choc ne ſera pas parallele au plan HI, & ſi la petite boule oblige la grande de rebrouſſer chemin, celle-ci par la ſeule direction du choc ſuivra la ligne MR élevée ſur le plan, mais la direction MN avec laquelle la grande boule ne frappe point ſur la petite, agiſſant ſur la grande, la direction de la grande après le choc ſera compoſée des directions MR, MN, & par conſéquent elle ſuivra la direction MO qui eſt encore plus élevée ſur le plan que la direction du choc; d'où l'on voit que ceux qui s'imaginent avoir de l'avantage en jouant au Billard avec une bille plus groſſe que celle de leur adverſaire, ſe trompent beaucoup; car ſi leur adverſaire a le poignet bon, la viteſſe qu'il donnera à ſa bille relevera la grande ſelon la direction MR du choc qui ſera ici la ſeule, à cauſe que la grande bille avant le choc étoit en repos, & par conſéquent cette bille ſera toujours en danger de ſauter hors du billard, & pour faire voir que le joueur qui a la petite bille a toujours de l'avantage, ſoit qu'il pouſſe ſa bille contre celle de ſon adverſaire, ou que ſon adverſaire pouſſe la ſienne contre lui. Entrons un peu plus dans le détail de ce mouvement.

Suppoſons que la petite bille B (*Fig.* 216.) parte du point C, & rencontre en S la grande bille en A où elle eſt en repos, je joins les deux centres A, B, par la droite AB; de ces mêmes centres, j'abbaiſſe ſur le plan du billard HL les perpendiculaires AH, BL, & du centre B menant BE parallele au plan du billard, & qui coupe AH en E, la droite AE eſt la différence des

rayons AH, BL, des deux billes, & la droite AB eſt la ſomme de ces mêmes rayons; ainſi prenant dans le triangle rectangle AEB l'hypotènuſe AB pour ſinus total, le côté AE ou la différence des rayons eſt le ſinus de l'angle ABE, mais le corps A étant choqué par le corps B ſelon la direction AB ſuivra cette direction; ainſi ce corps s'élevera au-deſſus du plan ſous un angle ABE dont le ſinus AE eſt la différence des rayons en prenant pour ſinus total la ſomme AB des rayons; or le corps A en ſuivant la direction AX ſera pouſſé par ſa peſanteur vers le plan du billard; donc ce corps décrira dans ſon mouvement une parabole, c'eſt pourquoi ſi l'amplitude de cette parabole eſt plus longue que la droite HY qui reſteroit à parcourir ſur le billard depuis le point H juſqu'à l'extremité Y du billard, & que la parabole ne rencontre point la bande YZ, laquelle pourroit repouſſer la bille dans le billard, la bille A tombera néceſſairement par terre.

Maintenant je mene du point d'attouchement la tangente SV, du centre B la droite BD parallele à SV, du point C la droite CD perpendiculaire ſur BD, & j'acheve le parallellogramme DM; la viteſſe CB du corps B eſt compoſée de la viteſſe CM & de la viteſſe CD; or CM étant parallele à SV ne choque point le corps A, donc CD eſt la viteſſe avec laquelle le corps B choque le corps A; ſuppoſant donc qu'après le choc il lui reſte ſelon cette direction une viteſſe égale à NB, la direction CM ou BO ſon égale agiſſant toujours, le corps B prendra la direction BP compoſée des directions BN, BO; mais la direction BP eſt compoſée de la direction BR parallele au billard, & de la direction BQ perpendiculaire au billard; donc le corps B étant empêché de ſuivre la direction BQ, ſuivra la direction BR, & par conſéquent la bille BR reſtera ſur le billard ſans danger de tomber, tandis que la bille A ſautera hors du billard, ou du moins ſera en danger de ſauter.

Suppoſons à preſent que la bille B étant en repos (*Fig.* 217.), l'autre joueur pouſſe la bille A du point C, ſa viteſſe CA ſera compoſée de la viteſſe CM qui ne choque point le corps B, & de la viteſſe MA qui le choque directement; ainſi ſuppoſant qu'après le choc, il reſte au corps A ſelon la direction MA une viteſſe AR, la direction CM ou AO ſon égale agiſſant toujours, le corps A prendra la direction relevée AP, & par conſéquent ce corps ſautera hors du billard ou ſera en danger de ſauter; au

contraire ſuppoſant que la bille B aye reçu ſelon la direction AB du choc la viteſſe BZ, cette viteſſe ſera compoſée des deux BX, BY; mais BX étant directement oppoſée au plan du billard, ne peut agir; donc la bille B ſuivra la direction BY, & par conſéquent elle reſtera ſur le plan du billard ſans être en danger de ſauter.

600. On ne ſera pas fâché de trouver ici la ſolution d'un Problême qu'on pourroit propoſer au ſujet de deux billes inégales qui ſe choquent, ce Problême eſt tel.

Deux Billes inégales A, B, (Fig. 216.) *étant données, trouver à quelle diſtance du plan du billard ſe trouve le point du choc.*

Je mene la ligne AB qui joint les deux centres; j'abbaiſſe ſur le plan du billard les rayons AH, BL, qui ſont perpendiculaires ſur ce plan, puiſqu'ils paſſent par les points d'attouchement HL; du point S où les deux billes ſe touchent, j'abbaiſſe ſur HL la perpendiculaire SK, & du point B je mene BE parallele à HL qui coupe AH en E, & SK en I, enfin je nomme le rayon $AH = AS = a$, le rayon $BL = BS = EH = IK = b$, & l'inconnue $SI = x$; donc $AB = AS + SB = a + b$, $AE = AH - EH = a - b$, & $SK = SI + IK = x + b$.

Les triangles ſemblables AEB, SIB, donnent AB, BE :: BS, IS; donc $a+b, a-b :: b, \frac{ab-bb}{a+b} = IS = x$, & par conſéquent $SK = x + b = \frac{ab-bb}{a+b} + b = \frac{ab-bb+ab+bb}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$; donc la diſtance demandée eſt $\frac{2ab}{a+b}$.

Si du diametre $AH = a$, on retranche $SK = \frac{2ab}{a+b}$, le reſte $a - \frac{2ab}{a+b} = \frac{aa+ab-2ab}{a+b} = \frac{aa-ab}{a+b}$ ſera l'excès dont la hauteur du centre A ſurpaſſe la hauteur du point S d'attouchement.

Le triangle rectangle ABE donne $\overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EA}^2$; donc $\overline{EB}^2 = aa + 2ab + bb - aa + 2ab - bb = 4ab$; donc $EB = HL = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$, c'eſt la valeur de la diſtance horizontale compriſe entre les deux centres A, B.

Le triangle rectangle SBI donne $\overline{BI}^2 = \overline{SB}^2 - \overline{SI}^2 = b^2 - \frac{a^2bb + 2ab^3 - b^4}{a^2 + 2ab + bb} = \frac{a^2bb + 2ab^3 + b^4 - a^2bb + 2ab^3 - b^4}{a^2 + 2ab + bb} = \frac{4ab^3}{a^2 + 2ab + bb}$ valeur de la diſtance horizontale KL compriſe entre SK & BL.

Si de $HL = 2\sqrt{ab}$, on ôte $KL = \frac{4ab^3}{a^2 + 2ab + bb}$, le reſte $2\sqrt{ab} - \frac{4ab^3}{a^2 + 2ab + bb} = HK$ ſera la diſtance horizontale HK compriſe entre AH & SK.

Si le rayon AS étoit donné, & la diſtance SK du point d'attouchement au plan du billard, & qu'on demandât la grandeur du rayon SB d'une bille qui devroit toucher en S, on meneroit du point F la tangente SF, puis prenant ſur le plan du billard la droite FL égale à FS, & élevant en L la droite LB, le point B où elle couperoit le rayon AS prolongé ſeroit le centre de la bille demandée, & ſon rayon ſeroit BS ou BL, ce qui eſt facile à démontrer ; car menant la droite BF, les triangles rectangles FSB, FLB, auront l'hypotenuſe commune, & les côtés FS, FL, égaux par la conſtruction ; donc les deux autres SB, BL, ſeront égaux, & par conſéquent la bille qui aura BS pour rayon, touchera le plan du billard au point L.

Du Choc d'une Boule qui frappe pluſieurs autres Boules immédiatement.

601. Lorſqu'une boule choque immediatement pluſieurs autres boules, il eſt viſible qu'il n'y en peut avoir qu'une qui ſoit dans ſa direction, & que les autres ſont choquées obliquement. Les viteſſes qu'elles reçoivent du choc ſont donc différentes, & la queſtion eſt de les déterminer ; c'eſt-là ce fameux Problême que M. Jean Bernoulli a regardé comme une difficulté dont la ſolution lui étoit réſervée, ainſi qu'on peut voir dans ſon diſcours ſur les loix de la communication du mouvement, & dans ſa Lettre à Meſſieurs de l'Academie Royale des Sciences, qu'on trouve à la tête de ce Diſcours. *Non content*, dit-il, *de déterminer ce qui doit arriver à deux corps qui ſe choquent, ſoit directement, ſoit obliquement, l'Auteur* (c'eſt de lui-même dont il parle) *détermine ce qui réſulte d'un corps qui en rencontre deux ou pluſieurs autres à la fois, ſelon différentes directions : Problême ſi épineux que perſonne n'avoit encore entrepris de le réſoudre, & comment en ſeroit-on venu à bout ? puiſque ſa réſolution ſuppoſe une connoiſſance exacte de la theorie des forces vives.* Qui ne croiroit en liſant ceci que M. Bernoulli n'eut réſolu le Problême d'une façon générale à ne laiſſer rien à déſirer ? Il s'en faut cependant de beaucoup, ſa ſolution n'eſt que pour un nombre pair quelconque de boules égales,

& qui prises deux à deux sont de part & d'autre à égale distance de la direction de la boule qui les choque. Nous allons voir que sans avoir recours à sa prétendue theorie des forces vives, on peut résoudre le Problême non-seulement dans les cas particuliers ausquels il s'est borné, mais encore pour tel nombre pair ou impair que l'on voudra de boules choquées égales ou inégales, & dont les directions fassent des angles égaux ou inégaux avec la direction de la boule qui les choque. Je commencerai par le cas de M. Bernoulli, en supposant d'abord les boules non élastiques, & ensuite élastiques, & de-là je passerai au cas général ; or voici quelques principes dont je crois devoir me servir. Nous supposons que les boules se meuvent sur un plan horizontal, & que par conséquent leur mouvement est uniforme.

602. *Si une boule non élastique* A (Fig. 218.) *poussée selon une direction* CA *vient à choquer immédiatement deux ou plusieurs autres boules*, B, D, *non élastiques, toutes les boules se sépareront dans l'instant même du choc.*

Supposons que la boule A après avoir choqué les boules B, D, prenne la direction AX, & que BP represente l'espace que la boule B a parcouru depuis l'instant du choc jusqu'au moment où les deux boules A, B, se seront séparées, en supposant que cette séparation ne se soit pas faite dans l'instant du choc ; je partage l'espace BP en plusieurs autres égaux & infiniment petits BS, SK, KQ, &c. qui representeront des espaces que B aura parcouru dans des instans égaux. Je prens la distance BA des centres B, A, des boules B, A, & du point S pris pour centre, je décris l'arc MN, & le point N sera le point où se trouvera le centre A de la boule A, lorsque le centre de la boule B sera en S; car comme à la fin de l'instant BS, les deux boules A, B, se toucheront encore par la supposition, la distance SN des deux centres doit être égal à BA ou SM, c'est-à-dire à la somme des deux rayons BV, VA ; des points K, Q, P, &c. & toujours avec le même intervalle BA, je decris les arcs OR, VT, ZX, & il est visible que le centre A de la boule A se trouvera aux points R, T, X, quand le centre de la boule B se trouvera aux points K, Q, P, à cause que les deux boules A, B, se toucheront encore par la supposition ; donc quand le centre B aura parcouru les espaces égaux BS, SK, KQ, &c. le centre A aura parcouru les espaces AN, NR, RT, TX, mais ces

espaces

eſpaces vont en augmentant, comme je vais le prouver ; donc le mouvement de la boule A ſeroit un mouvement acceleré, ce qui eſt contre la ſuppoſition, puiſque nous conſiderons les boules dans un plan horizontal.

Pour démontrer que les eſpaces AN, NR, RT, TX, vont en augmentant, je mene des points M, O, V, Z, les droites M*n*, O*r*, V*t*, Z*x*, tangentes aux arcs MN, OR, &c. ces droites étant perpendiculaires ſur AB ſeront paralleles entr'elles, & par conſéquent à cauſe des triangles ſemblables AM*n*, AO*r*, &c. les droites A*n*, *nr*, *rt*, *tx*, ſeront égales entr'elles ; or les droites *n*N, *r*R, *t*T, *x*X, vont en augmentant ; car ſi l'on tranſporte par la penſée l'eſpace OR*r* ſur l'eſpace MN*n*, on comprendra aiſément que l'arc OR étant plus grand que l'arc MN, & la tangente O*r* plus grande que la tangente M*n*, la droite *r*R ſera plus grande que la droite *n*N, & ainſi des autres ; donc ſi à la droite A*n*, on ajoute la droite *n*N, & qu'ayant retranché *n*N de la droite *nr* égale à A*n*, on lui ajoute *r*R qui eſt plus grand que *n*N, la ſomme NR ſera plus grande que la ſomme AN, & on prouvera de la même façon que RT eſt plus grand que NR, &c. donc, &c.

Et il ne faut pas dire que les différences de AN, NR, RT, &c. ſont infiniment petites, car quoique cela ſoit vrai d'un eſpace à l'autre, il ſera toujours vrai auſſi de dire que la différence du premier eſpace AN au dernier TX ne ſera pas infiniment petite, & que par conſéquent les eſpaces AN, TX, parcourus dans des tems égaux, ſeroient inégaux.

603. *Connoiſſant la viteſſe & la direction* CA *d'une boule non élaſtique* A (Fig. 219.), *qui choque deux ou pluſieurs autres boules non élaſtiques en nombre pair, & avec des directions* AB, AD, *qui priſes deux à deux font avec la direction* CX *des angles égaux* BAX, DAX, *connoître quel doit être le rapport de la viteſſe* AX *de la boule* A *après le choc, à la viteſſe* VO, *ou* HR, *&c. de chacune des boules choquées.*

Les boules B, D étant égales & également éloignées de la direction de la boule A, il eſt viſible que ces deux boules ſont également choquées, & que la boule A après le choc doit ſuivre ſa premiere direction, cela poſé.

Suppoſons que la viteſſe de la boule B ſoit VO, c'eſt-à-dire, que B parcoure la droite VO ſur ſa direction, dans un tems égal à celui que la boule A a employé à parcourir CA, & que la

vitesse restante de la boule A soit la droite AX; du point V où les deux boules A, B se touchent dans l'instant du choc, je mene la droite VT égale & parallele à AX; il est clair que le point V de la boule A se trouvera en T lorsque son centre se trouvera en X; tirant donc la droite TX, & décrivant du point X avec la droite TX un cercle TH, ce cercle marquera la position de la boule A lorsque son centre sera parvenu en X, de même prenant NO = BV, & du point N décrivant avec le rayon NO le cercle ZO, ce cercle marquera la position de la boule B lorsqu'elle aura parcouru la quantité VO.

Maintenant supposons que les droites AX, VO, soient des espaces infiniment petits parcourus par les boules A, B dans l'instant d'après le choc, je mene la droite OT, & je dis que cette ligne doit être perpendiculaire sur OV; car 1°. Si elle est perpendiculaire sur OV, elle le sera aussi sur TX, qui est parallele à OV ou OA, à cause des droites VT, AX égales & paralleles; & par conséquent OT sera tangente des boules ZO, TH, & ces deux boules ne se toucheront pas, ainsi nous aurons ce qui est requis. 2°. Si l'angle VOT fait par la droite OT avec la droite OV étoit aigu, il est clair que OT seroit coupé par la boule TH & par la boule ZO, & que par conséquent ces deux boules ne manqueroient pas de se toucher encore, ce qui est contraire à ce que nous avons démontré dans l'article précédent. 3°. Enfin l'angle VOT pourroit être à la vérité aigu, mais alors les boules ZO, TH se trouveroient séparées d'une distance plus grande qu'il ne faut, eu égard à la nature du mouvement, car lorsqu'un corps non élastique en choque un autre qui est en repos, il ne doit lui communiquer de son mouvement qu'autant qu'il en faut pour lui laisser la liberté de continuer à se mouvoir; or en faisant l'angle VOT droit, la boule A peut continuer son mouvement sans en être empêchée par la boule B, donc il seroit contre la nature de la communication du mouvement de prétendre que cet angle devint aigu.

De l'extrémité C de la direction CA j'abaisse la perpendiculaire CF sur la direction AB prolongée vers F, l'angle aigu OVT est égal à l'angle aigu VAX à cause des paralleles AX, VT, mais VAX est égal à CAF qui lui est opposé au sommet, donc l'angle aigu OVT est égal à l'angle aigu CAF, & par conséquent les triangles rectangles CAF, BVT sont semblables; donc TV, VO :: CA, AF, or en prenant pour sinus droit la direction CA,

la droite CF est le sinus de l'angle CAF ou BAX fait par les directions des boules A, B, & la droite FA est le sinus de son complement, donc on doit établir pour regle, que *lorsqu'une boule non élastique* A *choque plusieurs boules égales & non élastiques* B, D, *avec des directions également éloignées de la direction moyenne* CA, *la vitesse* AX *de* A *après le choc est à la vitesse* VO *de l'une des boules* B, *comme le sinus total est au sinus de complement de l'angle* BAX *fait par la direction* BA *de la boule* B, *avec la direction* CA *de la boule* A.

604. *Dans le choc des corps élastiques ou non élastiques, la quantité de mouvement après le choc, selon la direction primitive, est toujours égale à la quantité de mouvement avant le choc.*

Tous les Geométres ne conviennent point de cette Proposition, mais si l'on vouloit s'entendre, les deux partis comprendroient aisément que leur querelle, sur cet article, n'est qu'une dispute de mots. Tâchons de les concilier en examinant d'abord les différens cas du choc des corps non élastiques, & ensuite ceux du choc des corps élastiques.

Par rapport aux corps non élastiques tous conviennent que si l'un des corps est en repos, ou s'il se meut plus lentement dans la même direction que l'autre, la quantité de mouvement après le choc est égale à la quantité de mouvement avant le choc (*N.* 305), il ne reste donc plus qu'à examiner les autres cas; or ces cas se reduisent à deux, car ou les deux corps se meuvent avec des directions & des forces contraires & égales, ou ils se meuvent avec des directions & des forces contraires & inégales.

Si les deux corps se meuvent avec des directions & des forces contraires & égales, le mouvement cesse dans l'instant du choc (*N.* 308); donc (disent les Geométres qui ne tiennent pas pour l'égale quantité de mouvement) il n'est pas toujours vrai que la quantité de mouvement soit égale avant & après le choc. Que répondent à cela les Cartesiens? Le voici: Les forces des deux corps avant le choc étant contraires & égales, si l'on nomme l'une a, l'autre sera $-a$ puisqu'elle est dans un sens contraire; or la somme des deux est $a-a=0$, donc cette somme est égale à la quantité de mouvement après le choc; ceci paroît d'abord un sophisme, les deux corps se sont approchés l'un de l'autre, il y a donc eu du mouvement avant le choc, au lieu qu'après le choc il n'y en a plus; les Cartesiens ne le contestent point, mais s'il y en a une certaine quantité selon la direction du premier corps,

il y a eu auſſi une égale quantité contraire ſelon la direction du ſecond, donc la direction du premier n'a rien gagné ſur celle du ſecond, ni celle du ſecond ſur celle du premier, & par conſéquent c'eſt comme s'il n'y avoit point eu de mouvement ; en un mot, les Carteſiens s'expliquent ; ce ne ſont pas les mouvemens en particulier de chaque corps qu'ils conſiderent, c'eſt le mouvement qui reſulte des deux ſelon une même direction, ſi les deux forces contraires s'entredétruiſent, ils regardent le mouvement comme nul ; ſi l'une l'emporte ſur l'autre c'eſt l'excès de celle-là ſur celle-ci qu'ils prennent pour quantité de mouvement; c'eſt vouloir faire la guerre à des ſons que de les chicaner là deſſus.

Si les deux corps ſe meuvent avec des directions contraires & des forces inégales, la différence de leurs quantités de mouvement après le choc eſt égale à la ſomme de leurs quantités avant le choc (*N.* 306), c'eſt ainſi que parlent ceux qui conſidérent les quantités de mouvement de chaque corps en particulier ; au contraire, ſelon les Carteſiens ce ſont les quantités de mouvement avant & après le choc qui ſont égales, parce qu'ils ne prennent pour quantité de mouvement, ſoit avant ſoit après le choc, que ce qui reſte de mouvement ſelon la même direction ; les uns & les autres ont raiſon, mais ils ne s'entendent pas. A ſe meut contre B avec trois degrés de force, & B ſe meut contre A avec un ſeul degré, de trois retranchés un, voilà la différence des quantités de mouvement des deux corps, cela eſt certain ; de deux retranchez un, voilà la quantité de mouvement ſelon la même direction, cela eſt ſûr auſſi ; or après le choc les deux corps vont enſemble avec une même viteſſe ſelon la direction du plus fort, mais avec des quantités de mouvement égales ou inégales ſelon que les corps ſont égaux ou inégaux, & la ſomme des quantités de mouvement après le choc eſt 2, donc ſelon les uns cette ſomme eſt égale à la différence avant le choc, & ſelon les autres elle eſt égale à la ſomme avant le choc ; dans tout cela il n'y a préciſément que les têrmes entre leſquels il ſe trouve de la différence.

Par rapport aux corps élaſtiques tous conviennent que la quantité de mouvement après le choc eſt égale à la quantité avant le choc lorſque les deux corps ſuivent la même direction avant & après le choc ; & quant aux autres cas on trouvera aiſément que les uns & les autres penſent la même choſe, ſi l'on veut nom-

mer avec les Cartesiens quantité de mouvement selon la même direction, ce que les autres appellent différence des quantités de mouvement, lorsque les corps vont avec des directions différentes avant & après le choc.

605. *Connoissant la quantité de mouvement qu'une boule non élastique* A *communique à une autre boule non élastique* B, *qui étoit en repos avant le choc, connoître la quantité de mouvement que la même boule* A *communiqueroit à* B *si l'une & l'autre boule étoient élastiques.*

Doublez la quantité de mouvement que A non élastique communique à B non élastique, & ce double sera la quantité de mouvement que A élastique communiqueroit à B élastique.

Je nomme M la masse du corps A, m celle du corps B, & V la vitesse de A, nous avons vû (*N.* 312.) que la vitesse commune de A & de B après le choc est $\frac{MV}{M+m}$ & par conséquent la quantité de mouvement de B après le choc est $\frac{mMV}{M+m}$ lorsque les deux corps ne sont pas élastiques.

Nous avons vû de même (*N.* 336.) que si les deux corps sont élastiques & qu'ils suivent la même direction avant le choc, la vitesse après le choc du corps B, qui avant le choc avoit moins de mouvement que l'autre est $\frac{2MV - Mu + mu}{M+m}$ en nommant u la la vitesse du corps B; or si B est en repos avant le choc, sa vitesse u sera infiniment petite & égale à zero; donc la vitesse de B après le choc se changera en $\frac{2MV}{M+m}$ à cause de $u = 0$, & par conséquent sa quantité de mouvement sera $\frac{2mMV}{M+m}$, mais cette quantité est double de la quantité $\frac{MV}{M+m}$ que B auroit reçû de A, si les deux boules n'avoient par été élastiques, donc, &c. Ces principes posés.

606. PROBLEME I. *Connoissant la direction* CA *& la quantité de mouvement d'une boule non élastique* A (Fig. 219.) *qui choque deux autres boules égales & non élastiques* B, D *avec des directions obliques* AB, AD *qui font des angles égaux* BAX, DAX *avec la direction* CX *de la boule* A, *connoître les vitesses & les quantités de mouvement des trois boules après le choc.*

Nous savons déja que les boules B, D après le choc suivront les directions AB, AD, & qu'à cause de l'égalité de ces boules,

la boule A ne faisant pas plus d'effort d'un côté que de l'autre suivra sa premiere direction CX. Cela posé.

Supposons que la vitesse du corps A après le choc soit égale à AX, du point d'attouchement V des deux boules A, B, je mene VT égale & parallele à AX, & du point T menant TO perpendiculaire sur AB, la droite VO marquera la vitesse de B après le choc (*N. 603*), & on trouvera de la même façon que la vitesse de la boule D après le choc sera exprimée par HR = VO; du point O je mene OQ perpendiculaire sur VT, & il est visible que VQ marquera la vitesse de B selon la direction VT ou CX, & que la vitesse de D selon HS ou CX sera égale à VQ; du point E je mene EL perpendiculaire sur CX, & l'on prouvera aisément que les triangles rectangles ECB, TQV étant semblables, les triangles EAL, QVO sont aussi semblables, & que par conséquent on a CA, LA :: VT, VQ.

Je nomme CA $= a$, EA $= b$ & AX ou VT $= x$; les triangles semblables CAE, EAL donnent CA, AE :: AE, AL, donc $\overline{CA}^2$, $\overline{AE}^2$ :: CA, LA ou $a^2, b^2 :: a, \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} =$ CL; or nous avons CA, LA :: VT, VQ, donc $a, \frac{b^2}{a} :: x, \frac{b^2x}{a^2} =$ VQ, ainsi la vitesse de B après le choc selon la direction VQ est $\frac{b^2x}{a^2}$, & par conséquent celle de D est aussi $\frac{b^2x}{a^2}$. Je nomme M la masse de A & m la masse de B ou de D, donc la quantité de mouvement de A après le choc est Mx, celle de B, selon la direction VQ ou CA, est $\frac{mb^2x}{a^2}$ & celle-ci est la même que celle de D selon la même direction; or ces trois quantités prises ensemble doivent être égales à la quantité de mouvement avant le choc, & cette quantité est Ma; donc nous avons $Mx + \frac{2mbbx}{aa} = Ma$, & multipliant par aa, nous aurons $Maax + 2mbbx = Ma^3$, & divisant par $Maa + 2mbb$, nous aurons $x = \frac{Ma^3}{Maa + 2mbb}$, & par conséquent la quantité de mouvement de A après le choc sera connue; & mettant cette valeur de x dans $\frac{mb^2x}{a^2}$ qui est la quantité de mouvement de B ou de D, selon la direction CA, nous aurons $\frac{mMab^2}{Maa + 2mbb}$ pour la valeur de cette quantité.

Pour connoître la quantité de mouvement de B ou de D selon

leurs directions AB ou AD, on aura dans les triangles semblables CAE, TVO, cette analogie CA, AE :: TV, VO, donc $a, b :: x, \frac{bx}{a} = \text{VO}$, & mettant la valeur de x nous aurons $\frac{\text{M}a^3b}{\text{M}a^3 + 2mabb} = \text{VO}$, & multipliant VO par m, on aura $\frac{m\text{M}a^3b}{\text{M}a^3 + 2mabb}$ pour la quantité de mouvement de B ou de D sur leurs directions AB, AD.

Supposons que les trois boules soient égales & que l'angle BAX ou CAF soit de 30 degrés, je fais en A l'angle FAM égal à l'angle CAF, & je prolonge CF en M, l'angle CAF étant de 30 degrés, l'autre angle aigu ACF du triangle rectangle CAF sera donc de 60 degrés; or l'angle CAM est aussi de 60 degrés par la construction, donc le troisiéme angle CMA du triangle CMA est aussi de 60 degrés, & par conséquent ce triangle est isoscele & son côté CM est coupé en deux également en F par la perpendiculaire CF, donc $\text{CF} = \frac{1}{2}\text{CM} = \frac{1}{2}\text{CA}$; ainsi faisant $\text{CA} = 2$, nous aurons $\text{CF} = 1$, & comme à cause du triangle rectangle CAF nous avons $\overline{\text{FA}}^2 = \overline{\text{CA}}^2 - \overline{\text{CF}}^2$, nous aurons $\overline{\text{FA}}^2 = 4 - 1 = 3$, & $\text{FA} = \sqrt{3}$, je fais $\text{M} = 1 = m$, & mettant ces valeurs dans celles de AX & de VQ, que nous avons trouvées ci-dessus, nous aurons $x = \frac{\text{M}a^3}{\text{M}aa + 2mbb} = \frac{8}{4+6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ & $\text{VQ} = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{3 \times 4}{4 \times 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$; ainsi la vitesse de A après le choc sera $\frac{4}{5}$, celle de B selon la direction CA sera $\frac{3}{5}$, & celle de D selon la même direction sera aussi $\frac{3}{5}$; multipliant donc ces vitesses par leurs masses, dont la valeur est 1, la somme des quantités de mouvement, selon la direction CA après le choc, sera $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} = 2$; or la quantité de mouvement avant le choc étoit $\text{M} \times \text{CA} = 1 \times 2 = 2$, donc la quantité du mouvement après le choc, selon la direction CA, est égale à la quantité de mouvement avant le choc, & par conséquent le Problême est bien resolu.

Supposons encore que l'angle BVX soit de 30 degrés, mais que la masse de A soit 2, & celle de B ou de D soit 1, nous aurons donc $x = \frac{\text{M}a^3}{\text{M}aa + 2mbb} = \frac{16}{8+6} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$ & $\text{VQ} = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{\text{M}ab^2}{\text{M}aa + 2mbb} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$, ainsi la vitesse de A après le choc sera $\frac{8}{7}$, celle de B, selon la direction CA, sera $\frac{6}{7}$, & celle de D, selon la même direction, sera aussi $\frac{6}{7}$; multipliant donc ces vitesses par leurs masses, la quantité de mouvement de A après le choc sera

$\frac{2\times 8}{7}=\frac{16}{7}$, celle de B ſera $\frac{1\times 6}{7}=\frac{6}{7}$, & celle de D ſera auſſi $\frac{6}{7}$, & par conſéquent la ſomme de ces quantités de mouvement ſera $\frac{16}{7}+\frac{6}{7}+\frac{6}{7}=\frac{28}{7}=4$; or la quantité de mouvement avant le choc eſt $M\times a=2\times 2=4$, donc les quantités de mouvement ſont encore égales avant & après le choc, & la même choſe arrivera, quelque rapport que l'on mette entre les maſſes A & B ou D, & quelque ſoit l'angle BAX, donc, &c.

607. PROBL. II. *Trouver les mêmes choſes que ci-deſſus en ſuppoſant les trois boules élaſtiques.*

Cherchez comme dans le Problême précédent la viteſſe de B ou de D, ſelon la direction CA lorſque les boules ne ſont pas élaſtiques, & le double de cette viteſſe ſera la viteſſe de B ou de D lorſque les boules ſont élaſtiques.

Par exemple, en ſuppoſant que les trois boules ſont égales & non élaſtiques, & que l'angle BAX eſt de 30 degrés, nous avons trouvé $VQ=\frac{3}{5}$, je double cette viteſſe & j'ai pour le cas de l'élaſticité $VQ=\frac{6}{5}$, donc la viteſſe de D eſt auſſi $\frac{6}{5}$, & comme la ſomme $\frac{6}{5}+\frac{6}{5}$ de ces deux quantités, c'eſt-à-dire $\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$ eſt plus grande que la quantité 2 de mouvement avant le choc, il s'enſuit que A après le choc doit avoir une quantité négative de mouvement $=-\frac{2}{5}$, de ſorte qu'en ajoûtant enſemble les trois quantités $\frac{6}{5}+\frac{6}{5}-\frac{2}{5}$, on aura juſtement $\frac{10}{5}=2$, & par conſéquent la quantité de mouvement ſera égale avant & après le choc.

De même en ſuppoſant $M=2$, $m=1$ & les boules non élaſtiques, nous avons trouvé $VQ=\frac{6}{7}$, donc en ſuppoſant les boules élaſtiques nous aurons $VQ=\frac{12}{7}$ & la viteſſe de $D=\frac{12}{7}$, ainſi ces viteſſes étant multipliées par leurs maſſes feront $\frac{1\times 12}{7}$, $\frac{1\times 12}{7}$ & par conſéquent les quantités de mouvement de B & D feront enſemble $\frac{24}{7}$; or la quantité de mouvement de A avant le choc eſt $M\times a=2\times 2=4=\frac{28}{7}$, donc il reſte encore pour la quantité de mouvement de A après le choc $\frac{4}{7}$ ou $2\times\frac{2}{7}$, c'eſt-à-dire que A après le choc s'avancera toujours du même côté avec une viteſſe égale à $\frac{2}{7}$, & ainſi des autres.

On peut reſoudre ce Problême directement en cette ſorte ; par la Propoſition 121 (*N.* 355.) lorſque deux corps élaſtiques ſe choquent avec la même direction ou avec des directions contraires, la ſomme des maſſes multipliées par les quarrés de leurs viteſſes eſt la même avant & après le choc ; or dans le cas preſent les viteſſes de B & D avant le choc étant infiniment petites, c'eſt-

c'est-à-dire égales à zero ; il s'ensuit que le produit de la boule A multipliée par le quarré de sa vitesse CA avant le choc, est égal à la somme des produits des trois boules multipliée chacune par le quarré de la vitesse qu'elle a sur sa propre direction après le choc, ceci posé.

Je nomme x la vitesse de la boule A (*Fig.* 220.) après le choc, & y la vitesse de la boule B ou D sur les directions AB, AD ; ainsi supposant que les droites VO, HR représentent les vitesses égales de B & D après le choc ; je joins la droite OR, & des points V, H je mene les droites VQ, HS paralleles à AX, ces droites représenteront les vitesses de B & D selon la direction AX ; or à cause des triangles semblables CAF, VOT, on a CA, AF : : VO, VQ, donc $a, b :: y, \frac{by}{a}$, & par conséquent $\frac{by}{a}$ sera la vitesse de B après le choc selon la direction VQ ou CX, & celle de D sera aussi $\frac{by}{a}$; multipliant donc les vitesses $x, \frac{by}{a}, \frac{by}{a}$ par leur masses, les produits $Mx + \frac{bmy}{a} + \frac{bmy}{a}$ seront les quantités de mouvement des trois boules après le choc, mais la somme de ces produits doit être égale à la quantité de mouvement Ma de A avant le choc, donc $Mx + \frac{2bmy}{a} = Ma$.

D'autre part nous devons avoir $Mxx + my^2 + my^2$, ou $Mxx + 2my^2 = Maa$ par la Proposition citée (*N.* 355), donc nous avons ici deux équations ; je fais le quarré de la premiere $Mx + \frac{2bmy}{a} = Ma$, ce qui donne $M^2x^2 + \frac{4bmMyx}{a} + \frac{4bbmmy^2}{aa} = M^2a^2$, & divisant par M j'ai $Mx^2 + \frac{4bmyx}{a} + \frac{4bbmmy^2}{Maa} = Maa$; or nous avons $Maa = Mxx + 2my^2$, comparant donc ces deux valeurs de Maa, nous aurons $2my^2 = \frac{4bmyx}{a} + \frac{4bbmmy^2}{Maa}$, d'où je tire $Mmaay^2 = 2bmMayx + 2bbmmy^2$, & $x = \frac{Mmaay^2 - 2bbmmy^2}{2bmMay} = \frac{Ma^2y - 2bbmy}{2bMa}$. Or par la premiere équation nous avons $x = \frac{Maa - 2bmy}{Ma}$, comparant donc ces deux valeurs de x, nous aurons $\frac{Maay - 2bbmy}{2bMa} = \frac{Maa - 2bmy}{Ma}$ ou $Maay - 2bbmy = 2aabM - 4bbmy$, d'où je tire $Maay + 2bbmy = 2aabM$ & $y = \frac{2aabM}{Maa + 2mbb}$.

Et mettant cette valeur de y dans $Mx + \frac{2bmy}{a} = Ma$, ou Max

$+ 2bmy = Maa$, j'ai $Max + \frac{4aabbmM}{Maa + 2mbb} = Maa$, ou $x + \frac{4abbm}{Maa + 2mbb} = a$, ou $Maax + 2mbbx = Ma^3 - 2ambb$, d'où je tire $x = \frac{Ma^3 - 2ambb}{Maa + 2mbb}$.

Je mets auſſi la valeur de y dans $VQ = \frac{by}{a}$, & j'ai $VQ = \frac{2aabbM}{Ma^3 + 2ambb}$.

Suppoſons comme auparavant $M = m$, & que l'angle OAX ſoit de 30 degrés, & nous aurons $x = \frac{8 - 12}{4 + 6} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$, ainſi que nous l'avons trouvé ci-deſſus, de même $VQ = \frac{8 \times 3}{8 + 12} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$ de même qu'auparavant, &c.

M. Bernoulli s'eſt ſervi de cette méthode pour réſoudre ce Problême, & delà il a tiré occaſion de donner des nouveaux éloges à ſa theorie des forces vives, mais il n'a pas pris garde que puiſqu'après le choc, le mouvement ſe décompoſe en trois directions compoſantes qui donnent une égale quantité de mouvement ſur la direction AC, rien n'empêche de compoſer de même la direction AC avant le choc des trois mêmes directions, leſquelles multipliées l'une par la maſſe M, & les deux autres par la maſſe m, auroient le pouvoir de donner avant le choc la même quantité de mouvement ſur la direction AC, & dont les quarrez multipliés par leur maſſe ſeroient égaux à $\overline{AC}^2$ multiplié par M ; on a beau faire, tout ce qui peut ſe dire des forces vives, peut ſe dire également des forces mortes, pourvû qu'on faſſe la comparaiſon comme il faut entre les unes & les autres, & il n'y aura jamais de différence qu'autant qu'on s'aviſera de les mal comparer. Je ne m'arrête point à réfuter davantage ce ſentiment, on peut voir ce que j'en ai dit dans la Remarque en forme de Diſſertation qui ſe trouve dans le Chapitre IV. de ce premier Livre (*N.* 106.)

608. PROBL. III. *Connoiſſant la direction* CA *& la quantité de mouvement d'une boule non élaſtique* A (Fig. 221.) *qui choque pluſieurs autres boules égales, non élaſtiques, en nombre pair plus grand que deux, & dont les directions priſes deux à deux font des angles égaux avec la direction* CX, *connoître les viteſſes de toutes les boules après le choc.*

Du point C j'abbaiſſe ſur les directions prolongées les perpendiculaires CF, CH, &c. & ſuppoſant que AX ſoit la vi-

teſſe reſtante du corps A après le choc, je mene des points V, R, où les boules B, K, touchent la boule A, les droites VT, RL égales & paralleles chacune à AX ; ainſi les points V, R, de la boule A, ſe trouveront en T & en L, lorſque ſon centre A ſe trouvera en X ; des points T, L, je mene les droites TO, LS, perpendiculaires ſur les directions AO, AS, de B & de K ; les droites VO, RS, marquent les viteſſes de B & de K ſur leur directions, & ces viteſſes ſont égales aux viteſſes des boules D, P ; des points O, S, je mene les droites OQ, SN, perpendiculaires ſur VT, RL ; les droites VQ, RN, marqueront les viteſſes de B & de K ſelon la direction AX, & ces viteſſes ſeront égales à celles de D & de P ſelon la même direction ; des points F, H, je mene les droites FZ, HY, perpendiculaires ſur AC, & l'on prouvera aiſément qu'à cauſe des triangles ſemblables CFA, TOV, ZFA, QOV, on a CA, ZA :: VT, VQ, & qu'à cauſe des triangles ſemblables CHA, LSR, YHA, NSR, on a CA, YA :: RL, RN.

Je nomme $CA = a$, $FA = b$, $HA = c$, $AX = VT = RL = x$; les triangles ſemblables CAF, FAZ, donnent :: CA, FA, ZA ; donc $\overline{CA}^2$, $\overline{FA}^2$ :: CA, ZA, ou a^2, b^2 :: a, $\frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} =$ ZA ; or nous avons CA, ZA :: VT, VQ, donc a, $\frac{b^2}{a}$ :: x, $\frac{b^2x}{a^2} =$ VQ, & par conſéquent la viteſſe de B ſelon la direction CX, eſt $\frac{b^2x}{a^2}$, de même que la viteſſe de D ſelon la même direction ; les triangles ſemblables CAH, HAY, donnent :: CA, AH, AY ; donc $\overline{CA}^2$, $\overline{AH}^2$ :: CA, AY, ou aa, cc :: a, $\frac{acc}{aa} = \frac{cc}{a} =$ YA ; or nous avons CA, YA :: RL, RN ; donc a, $\frac{cc}{a}$ :: x, $\frac{ccx}{aa} =$ RN, & par conſéquent la viteſſe de K, & celle de P ſelon la direction CA ſont chacune égales à $\frac{ccx}{aa}$; nommant donc M la maſſe de A, & m la maſſe de chacune des boules égales B, K, D, P, & multipliant les viteſſes par les maſſes, les produits Mx, $\frac{mbbx}{aa}$, $\frac{mbbx}{aa}$, $\frac{mccx}{aa}$, $\frac{mccx}{aa}$ ſeront les quantités de mouvement des cinq boules après le choc ; or ces quantités priſes enſemble ſont égales à la quantité de mouvement Ma du corps A avant le choc ; donc $Mx + \frac{2bbmx}{aa} + \frac{2ccmx}{aa} = Ma$,

ou $Maax + 2bbmx + 2ccmx = Ma$, d'où l'on tire $x = \frac{Ma^3}{Maa + 2bbm + 2ccm}$, & mettant cette valeur de x dans $VQ = \frac{b^2x}{a^2}$, & dans $RN = \frac{c^2x}{a^2}$, nous aurons $VQ = \frac{Mab^2}{Maa + 2bbm + 2ccm}$, & $RN = \frac{Mac^2}{Maa + 2bbm + 2ccm}$, & par conféquent les viteffes des cinq boules après le choc feront connues.

Suppofons que l'angle $BAX = CAF$ foit de 30 dégrés; l'angle ACF fera de 60, & par conféquent nommant $AC = 2$, nous aurons $AF = \sqrt{3}$. Suppofons auffi que l'angle RAX, ou CAH foit de 60 degrés, l'angle ACH fera de 30, & par conféquent AC étant $= 2$, on aura $AH = 1$, ainfi $b = \sqrt{3}$, & $c = 1$; enfin, fuppofons $M = 4$, & $m = 1$.

Je mets ces valeurs dans les expreffions des viteffes que nous venons de trouver, & j'ai $x = \frac{4 \times 8}{4 \times 4 + 6 + 2} = \frac{32}{24} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, $VQ = \frac{24}{24} = \frac{3}{3}$ & $RN = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$; multipliant donc ces viteffes par leurs maffes, j'ai $xM = \frac{16}{3}$, $2VQ \times m = \frac{6}{3}$ & $2RN \times m = \frac{2}{3}$, & ajoûtant enfemble ces quantités de mouvement, j'ai $\frac{16 + 6 + 2}{3} = \frac{24}{3} = 8$, c'eft-à-dire la quantité de mouvement des cinq boules après le choc felon la direction CA eft $= 8$; or la quantité Ma de A avant le choc eft auffi $= 8$; donc les quantités de mouvement font égales avant & après le choc, & le problême eft réfolu.

609. PROBL. IV. *Trouver les mêmes chofes que dans le Probléme précédent, en fuppofant les boules élaftiques.*

Je double les viteffes des quatre boules choquées, ce qui me donne pour leurs quantités de mouvement $\frac{6}{3} + \frac{6}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$, ainfi il refte encore $\frac{8}{3}$ de quantité de mouvement pour la boule A felon la même direction après le choc; or $A = 4$, donc fa quantité de mouvement eft $\frac{4 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$, & par conféquent A après le choc ira encore avec $\frac{2}{3}$ de viteffe, & ainfi des autres.

610. PROBL. V. *Connoiffant la direction* CA (Fig. 222.) *& la quantité de mouvement d'une boule* A *non élaftique qui choque trois autres boules égales, non élaftiques*, B, P, D, *dont l'une* P *eft fur la direction* CA *& les deux autres* B, D *ont des directions* AB, AD *qui font des angles égaux* BAX, DAX *avec la direction* CX, *connoître les viteffes des quatre boules après le choc.*

La boule P étant fur la direction de la boule A, & rien n'obli-

geant A de changer de direction après le choc, il est constant que les deux boules A, P peuvent aller de concert après le choc avec la même vitesse; mais quant aux boules B, D, il faut nécessairement qu'elles se séparent de A dans l'instant même du choc pour les raisons que nous en avons données ci-dessus (*N.* 602).

Je nomme la direction $CA = a$, la direction FA ou $EA = b$, & la vitesse AX du corps A après le choc $= x$, à cause qu'elle est inconnue; la vitesse de P sera donc aussi $= x$, celle de B, selon la direction CX ou VT, c'est-à-dire la vitesse VQ, sera $\frac{bbx}{aa}$ (*N.* 606), & par conséquent celle de D sera aussi $\frac{bbx}{aa}$, nommant donc M la masse de A, m celle de B ou P ou D, & multipliant les vitesses par les masses, nous aurons Mx pour la quantité de mouvement de A après le choc, mx pour celle de P, $\frac{mbbx}{aa}$ pour celle de B, & $\frac{mbbx}{aa}$ pour celle de D; or la somme de ces quantités doit être égale à la quantité de mouvement Ma de la boule A avant le choc, donc nous avons $Mx + mx + \frac{2mbbx}{aa} = Ma$, & par conséquent $Maax + maax + 2mbbx = Ma^3$; d'où je tire $x = \frac{Ma^3}{Maa + maa + 2mbb}$ vitesse de A & de P après le choc, & mettant cette valeur de x dans la vitesse $\frac{bbx}{aa}$ de B ou de D après le choc, nous aurons $VQ = \frac{Mabb}{Maa + maa + 2mbb}$.

Supposons que l'angle BAX soit de 60 degrés, & que $M=2$, $m=1$, & $CA=2$, nous aurons AF ou $AE=1$ comme ci-dessus, & mettant ces valeurs dans celle de x, & de VQ nous aurons $x = \frac{2\times 8}{8+4+2} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$, & $VQ = \frac{2\times 2\times 1}{8+4+2} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$, multipliant donc ces vitesses par leurs masses, nous aurons pour la quantité de mouvement de A après le choc $\frac{2\times 8}{7} = \frac{16}{7}$ pour celle de P, $\frac{1\times 8}{7} = \frac{8}{7}$ pour celle de B $\frac{1\times 2}{7} = \frac{2}{7}$ & pour celle de D $\frac{2}{7}$; ainsi la somme de ces mouvemens sera $\frac{16+8+2+2}{7} = \frac{28}{7} = 4$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est $2\times 2 = 4$, donc les sommes des quantités de mouvement avant & après le choc sont égales, & le Problême est bien resolu.

611. PROBL. VI. *Trouver les mêmes choses que dans le Problême précédent en supposant les boules élastiques.*

Je double les viteſſes de B, P, A, ce qui donne pour la viteſſe de P $\frac{16}{7}$ pour celle de B, $\frac{4}{7}$, & pour celle de D, $\frac{4}{7}$; je multiplie ces viteſſes par leurs maſſes & la quantité de mouvement de P eſt $\frac{1 \times 16}{7} = \frac{16}{7}$, celle de B $\frac{1 \times 4}{7} = \frac{4}{7}$, & celle de D auſſi $\frac{4}{7}$, & les ſommes de ces quantités de mouvement eſt $\frac{16+4+4}{7} = \frac{24}{7}$; donc il reſte pour la quantité de mouvement de A $\frac{4}{7}$, ou $\frac{2 \times 2}{7}$, c'eſt-à-dire que A ſuivra ſa direction après le choc avec une viteſſe égale à $\frac{2}{7}$, & ainſi des autres.

612. PROBL. VII. *Connoiſſant la direction* CA (Fig. 223.) *& la quantité de mouvement d'une boule* A *non élaſtique qui choque pluſieurs autres boules égales, non élaſtiques, en nombre impair plus grand que trois, dont l'une eſt ſur la direction* CA *& les autres priſes deux à deux ont des directions également éloignées de la direction* CA, *trouver les viteſſes des boules après le choc.*

Je nomme $CA = a$, FA ou $EA = b$, AH ou $AM = c$ & la viteſſe inconnue AX de A ou de P après le choc $= x$, la viteſſe VQ de B ou de D ſelon la direction AX ſera donc $\frac{bbx}{aa}$, & celle de R ou de K ſera $\frac{ccx}{aa}$; nommant donc M la maſſe de A, m celle de $K = D = P = B = R$; & multipliant les maſſes par les viteſſes, la quantité de A après le choc ſera Mx, celle de P, mx; celle de B ou de D, $\frac{bbmx}{aa}$, & par conſéquent les deux enſemble ſeront $\frac{2bbmx}{aa}$, & celles de R & de K jointes enſemble ſeront $\frac{2ccmx}{aa}$; or la ſomme de ces quantités doit être égale à la quantité de mouvement Ma de A avant le choc, donc nous avons $Mx + mx + \frac{2bbmx}{aa} + \frac{2ccmx}{aa} = Ma$, & par conſéquent $Maax + maax + 2bbmx + 2ccmx = Ma^3$, d'où je tire $x = \frac{Ma^3}{Maa + maa + 2bbm + 2ccm}$ viteſſe de A ou de P après le choc.

Et mettant cette valeur de x dans les viteſſes $\frac{bbx}{aa}$ de B ou D, & $\frac{ccx}{aa}$ de R ou de K, nous aurons $VQ = \frac{Mabb}{Maa + maa + 2mbb + 2mcc}$ & $IN = \frac{Macc}{Maa + maa + 2mbb + 2mcc}$.

Suppoſons $M = 5$, $m = 1$, l'angle BMX ou CAF de 30 degrés, & l'angle IAX ou CAH de 60, nous aurons donc en ſup-

posant $CA = 2$, $FA = \sqrt{3}$ & $HA = 1$, ainsi mettant ces valeurs dans les vitesses trouvées, nous aurons $x = \frac{40}{32}$ $VQ = \frac{10}{32}$ & $IN = \frac{10}{32}$, & multipliant ces vitesses par leurs masses, la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{5 \times 40}{32} = \frac{200}{32}$, celle de P sera $\frac{1 \times 40}{32} = \frac{40}{32}$, celle de B jointe à celle de D sera $\frac{60}{32}$, & celle de R jointe à celle de K sera $\frac{20}{32}$, & toutes ces quantités jointes ensemble feront $\frac{200 + 40 + 60 + 20}{32} = \frac{320}{32} = 10$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est $2 \times 5 = 10$, donc les quantités de mouvement avant & après le choc étant égales, le Problême est resolu.

Si l'on vouloit trouver les vitesses des boules B ou D, R ou K sur leurs directions, on feroit attention que les triangles VTO, ACF étant semblables, on a CA, AF :: VT, VO, ou $2, \sqrt{3} :: \frac{40}{32}, \frac{40\sqrt{3}}{64} = \frac{5}{8}\sqrt{3} = VO$, & par conséquent la vitesse de B sur sa direction est $\frac{5}{8}\sqrt{3}$; de même les triangles ILS, CAH étant semblables donnent CA, AH :: IL, IS, donc $2, 1 :: \frac{40}{32}, \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$, & par conséquent la vitesse IS de B sur sa direction est $\frac{5}{8}$, & ainsi des autres.

613. PROBL. VIII. *Trouver les mêmes choses que dans le Problême précédent en supposant les boules élastiques.*

Je double les vitesses des boules R, B, P, D, K, trouvées par le Problême précédent, & j'ai pour la vitesse de P, $\frac{80}{32}$, pour celle de B ou de D $\frac{60}{32}$ & pour celle de R ou de K $\frac{20}{32}$, donc les quantités de mouvement des cinq boules jointes ensemble est $\frac{80 + 120 + 40}{32} = \frac{240}{32}$, donc il reste pour la boule A $\frac{80}{32}$, ou $\frac{5 \times 16}{32}$, c'est-à-dire que la boule A après le choc suivroit sa direction avec $\frac{16}{32}$ ou $\frac{1}{2}$ de vitesse.

Si on vouloit trouver les vitesses des boules R, B, D, K, selon leurs directions, on doubleroit les vitesses trouvées dans le Problême précédent, & l'on auroit $\frac{10}{8}\sqrt{3}$ pour la vitesse de B ou D, & $\frac{10}{8}$ pour celle de R ou de K.

REMARQUE.

614. De tout ce que nous venons de dire dans les Problêmes précédens, il est aisé de conclure 1°. Que si les corps ne sont pas élastiques, & qu'on tire du point C les perpendiculaires CE,

CF, CM, CH (*Fig.* 223.) sur les directions, les vitesses après les chocs des boules choquées & de la boule qui les choque, prises chacune selon sa direction, sont entr'elles comme les directions en prenant pour directions les droites EA, FA, MA, HA comprises entre les perpendiculaires CE, CF, CM, CH, & l'autre extrémité A de la direction CA; car les triangles ILS, CAH étant semblables IL, IS : : CA, AH, de même les triangles semblables TOV, CFA donnent VT ou IL, VO : : CA, FA, or les antecedens de ces deux proportions sont les mêmes, donc IS, VO : : AH, AF, c'est-à-dire les vitesses des boules R, B, selon leurs directions, sont entr'elles comme leurs directions AH, AF, il est visible que la vitesse IH ou VT de la boule A est à la vitesse de R comme CA est à AH, & à celle de B comme CA est à AF.

2°. Si les boules sont élastiques les vitesses des boules choquées sont encore entr'elles comme leurs directions, puisqu'elles sont les doubles des vitesses des boules qui ne seroient pas élastiques.

Or en prenant pour sinus total la direction CA, la direction AH est le sinus de complement de l'angle CAH ou RAX, fait par la direction de la boule R, avec la direction CX de la boule A, & la direction AF est le sinus de complement de l'angle CAF ou BAX fait par la direction de la boule B avec la direction de la boule A, donc *les vitesses des boules* R, B *sont entr'elles comme les sinus de complement des angles fait par leurs directions avec la direction* CA.

REMARQUE II.

615. Nous avons resolu le Problême dans les deux cas de M. Bernoulli, non-seulement pour les boules élastiques, mais encore pour des boules non élastiques; voyons à present de le resoudre d'une maniere générale pour tous les autres cas.

616. PROBL. IX. *Connoissant la vitesse & la direction* CA (Fig. 224.) *d'une boule non élastique* A *qui choque deux autres boules* B, D *égales entr'elles, non élastiques, & dont les directions forment des angles inégaux* BAX, DAX *avec la direction* AC, *connoître les vitesses des trois boules après le choc.*

La difficulté de ce Problême, que personne n'a encore resolu, m'oblige de faire une hypotèse qui sera justifiée par la solution même de la question; or voici qu'elle est ma pensée.

Si

Si la boule A ne choquoit que la boule B, sa direction CA seroit composée des deux AE, & CE; supposant donc les trois boules égales, la boule A donneroit au corps B une vitesse VO égale à $\frac{1}{2}$ AE selon la direction VO, & elle devroit aller aussi selon la même direction avec une vitesse AH égale à $\frac{1}{2}$ AE, mais comme la direction CE qui ne choque point B agiroit toujours sur A, la boule A prendroit un mouvement composé de AH $=\frac{1}{2}$ AE, & de HS égale & parallele à CE; tout le monde convient de ceci. Par la même raison, si la boule A ne choquoit que la boule D, sa direction AC seroit composée des deux CF, FA, & par conséquent D recevroit sur sa direction une vitesse NM $=\frac{1}{2}$ FA, & A prendroit un mouvement composé des deux AL $=\frac{1}{2}$ AF & LR égale & parallele à CF; & il est visible que les directions NS, LR se couperoient en un point X qui seroit sur la direction CX, car l'angle HAL étant égal à l'angle FAE, & les angles droits AHX, ALX étant égaux aux angles droits AEC, AFC, & de plus les côtés HA, AL du trapeze HALX étant proportionnels aux côtés AE, FA du trapeze EAFC, il s'ensuit que les deux trapezes sont semblables; c'est pourquoi tirant la diagonale AX dans le trapeze HAX, les triangles HAX, EAC seront semblables, de même que les triangles LAX, FAC; donc l'angle HAX sera égal à l'angle EAC, & par conséquent les lignes CA, AX seront en ligne droite puisque les angles HAX, EAC sont opposés au sommet & égaux entr'eux.

Maintenant concevons que la boule A choque à la fois les deux boules B, D, sa direction CA sera composée des quatre CE, AE, CF, AF, ou pour mieux dire des moitiés de ces quatre directions, car les deux ensemble CE, AE étant équivalentes à CA, & les deux CF, FA lui étant aussi équivalentes, il est clair que CA ne peut être composée que des moitiés de ces quatre vitesses; je dis donc que ces quatre demi-vitesses agissent ensemble de façon que les boules B, D reçoivent sur leurs directions des vitesses proportionnelles aux droites AE, EF, & qu'en même tems que la boule A se trouve poussée de part & d'autre, selon ces mêmes directions, les directions CE, CF lui donnent aussi des vitesses proportionnelles à CE, EF, de façon que ces vitesses communiquées aux trois boules, donnent selon la direction CA des vitesses, lesquelles étant multipliées par leurs masses forment une quantité de mouvement égale à la quantité de mouvement de la boule A avant le choc.

Or dans cette ſuppoſition, il eſt évident que la boule AX doit ſuivre après le choc ſa premiere direction, car les viteſſes AH, AL, étant proportionnelles aux droites EA, FA, & les viteſſes HX, CX, étant auſſi proportionnelles aux droites CE, CF, le trapeze AHXL & le trapeze AECF ſont ſemblables, d'où il ſuit que la direction AX que le corps A prendra en conſéquence des quatre directions AH, AL, HX, LX, dont il ſera pouſſé, ſe trouvera en ligne droite avec CA; il ne reſte donc plus qu'à trouver la viteſſe AX de A après le choc, & tout le reſte ſe trouvera comme dans les Problêmes précédens.

Je ſçai que l'hypotèſe ſur laquelle je me fonde ſemble choquer les regles du mouvement, la boule A trouve plus de réſiſtance du côté de B que du côté de D; donc elle devroit ſe déranger de ſa direction, c'eſt l'idée qui ſe préſente d'abord, lorſqu'on commence à examiner ce Problême, mais dès-lors qu'on veut approfondir la choſe, on trouve à chaque pas tant de difficultés & de contradictions, qu'il n'eſt pas poſſible qu'on ne ſoupçonne de faux ce que l'on regardoit comme une verité; au contraire qu'on admette pour un inſtant mon hypotèſe, toutes les difficultés s'applaniſſent, & les principes s'accordent parfaitement. Les boules ſe ſéparent & ne ſe ſéparent qu'autant qu'il eſt néceſſaire pour la liberté du mouvement, les viteſſes qu'elles reçoivent de la boule A ſont proportionnelles aux directions, l'égalité de mouvement ſelon la direction AC ſubſiſte avant & après le choc; & de plus, lorſque les boules ſont élaſtiques, les produits des maſſes par les quarrez de leur viteſſes ſelon leur directions ſont égaux au produit de la boule A par le quarré de ſa viteſſe CA avant le choc; il eſt bien difficile qu'une ſuppoſition qui réunit tant de verités à la fois puiſſe porter le caractere de la fauſſeté, mais venons à la ſolution.

Solution.

Je nomme x, la viteſſe AX de A après le choc, M ſa maſſe, m la maſſe de B ou de D, b la direction AE, & c la direction FA; des points V & N où les boules B, D, touchent la boule A dans l'inſtant du choc, je mene les droites VT, NZ égales & paralleles à AX; ainſi les points V, N, de la boule A ſeront parvenus en T & en Z, lorſque le centre A ſera parvenu en X; des points T, Z, j'abbaiſſe les perpendiculaires TO, ZM, ſur les directions AB, AD, & les droites VO, NM, ſeront les

viteſſes des boules B, D, ſur leur directions; des points O, M, j'abbaiſſe les perpendiculaires OQ, M4, ſur les droites HT, NZ, & les droites VQ, N4, marqueront les viteſſes de B & de D, ſelon la direction CA; enfin des points E, F, je mene ſur CA les perpendiculaires EK, FY.

Les triangles ſemblables CKE, EKA, donnent CA, EA EA, AK, ou $a, b :: b, \frac{bb}{a} =$ AK, & les triangles ſemblables CFA, FYA, donnent CA, FA :: FA, YA, ou $a, c :: c, \frac{cc}{a}$ = YA; or les triangles CAE, VOT étant ſemblables, & leur baſes CA, HT étant coupées proportionnellement par les perpendiculaires EK, OQ, nous avons CA, AK :: VT, VQ; donc $a, \frac{bb}{a} :: x, \frac{bb}{a}x =$ VQ, c'eſt-à-dire la viteſſe de B ſelon la direction CA eſt $= \frac{bb}{aa}x$; on trouvera de même que CA, YA :: NS, N4, ou $a, \frac{cc}{a} :: x, \frac{cc}{aa}x =$ N4, & que par conſéquent la viteſſe de D ſelon la direction CA eſt $= \frac{cc}{aa}x$.

Je multiplie les maſſes par les viteſſes que je viens de trouver, & j'ai Mx pour la quantité de mouvement de A après le choc $\frac{mbbx}{aa}$ pour la quantité de mouvement de B ſelon la direction CA, & $\frac{mccx}{aa}$ pour celle de D ſelon la même direction; or ces quantités jointes enſemble ſont égales à la quantité Ma du mouvement de A avant le choc; donc $Mx + \frac{mbbx}{aa} + \frac{mccx}{aa} = Ma$, ou $aaMx + mbbx + mccx = Ma^3$, d'où je tire $x = \frac{Ma^3}{aaM + mbb + mcc}$, & mettant cette valeur de x dans les viteſſes de B & de D, j'ai $\frac{Mabb}{aaM + mbb + mcc}$ pour la viteſſe de B, & $\frac{Macc}{aaM + mbb + mcc}$ pour celle de la boule D.

Pour trouver les viteſſes de B & de D ſelon leur directions, on obſervera que les triangles CAE, VTO étant ſemblables, donnent CA, AE :: TV, VB; mettant donc les valeurs de ces grandeurs, on aura $a, b :: \frac{Ma^3}{Maa + mbb + mcc}, \frac{Ma^2b}{Maa + mbb + mcc}$ pour la viteſſe de B, & de la même façon on trouvera $\frac{Ma^2c}{Maa + mbb + mcc}$ pour celle de D.

Suppoſons que les trois boules ſoient égales, que l'angle

BAX ſoit de 45 dégrés, l'angle DAX de 60, & que CA ſoit égal à 2, nous aurons AE $=\sqrt{2}$, & AF $=1$; mettant donc ces valeurs dans la viteſſe trouvée, nous aurons $x=\frac{8}{7}$ viteſſe de A après le choc, $\frac{bbx}{aa}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$ viteſſe de B ſelon la direction CA, & $\frac{ccx}{aa}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$ viteſſe de D ſelon la même direction; or à cauſe de l'égalité des maſſes, les quantités de mouvement ſont comme les viteſſes; ajoutant donc les trois viteſſes que nous venons de trouver, nous aurons $\frac{8}{7}+\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{14}{7}=2$ pour la ſomme des quantités de mouvement des trois boules après le choc, mais la quantité de mouvement de A avant le choc eſt auſſi $=2$; donc, &c.

De même, ſuppoſons $M=2$, $m=1$, l'angle BAX de 45 dégrés, & l'angle DAX de 30, nous aurons dans cette ſuppoſition AE $=\sqrt{2}$, FA $=\sqrt{3}$, & mettant ces valeurs dans les viteſſes des boules, nous aurons $x=\frac{2\times 8}{8+2+3}=\frac{16}{13}$, $\frac{bbx}{aa}=\frac{2\times 16}{4\times 13}=\frac{32}{52}=\frac{8}{13}$, $\frac{ccx}{aa}=\frac{3\times 16}{4\times 13}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$, & multipliant ces viteſſes par leur maſſes, nous aurons $Mx=\frac{2\times 16}{13}=\frac{32}{13}$, quantité de mouvement de A après le choc, $\frac{mbbx}{aa}=\frac{1\times 8}{13}=\frac{8}{13}$ quantité de mouvement de B ſelon la direction CA, & $\frac{mccx}{aa}=\frac{1\times 12}{13}=\frac{12}{13}$ quantité de mouvement de D ſelon la même direction, & ajoutant enſemble ces quantités, nous aurons $\frac{32+8+12}{13}=\frac{52}{13}=4$; or la quantité de mouvement de A avant le choc eſt $2\times 2=4$; donc, &c. & ainſi des autres.

617. PROBL. X. *Trouver les mêmes choſes que dans le Problême précédent, en ſuppoſant les boules élaſtiques.*

SOLUTION.

Suppoſons les trois boules égales, la direction CA $=2$, l'angle BAX de 45 dégrés, & l'angle DAX de 60; par le Problême précédent, la viteſſe de B ſelon la direction CA eſt $\frac{4}{7}$, & celle de D eſt $\frac{2}{7}$, je double ces viteſſes, ce qui donne $\frac{8}{7}$ pour la viteſſe de B, en ſuppoſant les boules élaſtiques, & $\frac{4}{7}$ pour celle de D; ajoutant donc enſemble ces deux viteſſes, la ſomme $\frac{8+4}{7}=\frac{12}{7}$ eſt la quantité de mouvement des boules B, D, à cauſe de l'égalité des maſſes, & comme il faut $\frac{14}{7}$ pour faire

égalité de mouvement avant & après le choc, la boule A a encore $\frac{2}{7}$ ſelon la direction AC.

Maintenant quand les boules ne ſont pas élaſtiques, la viteſſe de B ſelon ſa direction AB, eſt $\frac{Maab}{Maa + mbb + mcc} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$, & celle de D, $\frac{Maac}{Maa + mbb + mcc} = \frac{4}{7}$; doublant donc ces viteſſes, nous aurons $\frac{8\sqrt{2}}{7}$ pour la viteſſe de B ſelon ſa direction AB, lorſque les boules ſont élaſtiques, $\frac{8}{7}$ pour la viteſſe de D ſelon ſa direction AD, & $\frac{2}{7}$ pour la viteſſe de A; élevant donc ces viteſſes au quarré, nous aurons $\frac{128}{49}$ pour le quarré de la viteſſe de B, $\frac{64}{49}$ pour celle de D, & $\frac{4}{49}$ pour celle de A; ſuppoſant donc $M = m = 1$, la ſomme des quarrez des viteſſes multipliées par leur maſſes ſera $\frac{128 + 64 + 4}{49} = \frac{196}{49} = 4$; or le quarré de la viteſſe CA de A avant le choc eſt auſſi $2 \times 2 = 4$; donc, &c.

De même ſuppoſant $M = 2$, $m = 1$, $CA = 2$, l'angle BAX de 45 degrés & l'angle DAX de 30, nous avons par le Problême précédent $\frac{8}{13}$ pour la viteſſe de B ſelon CA lorſque les boules ne ſont pas élaſtiques, & $\frac{12}{13}$ pour celle de D; donc en doublant ces viteſſes, nous avons $\frac{16}{13}$ pour la viteſſe de B ſelon CA lorſque les boules ſont élaſtiques, & $\frac{24}{13}$ pour celle de D; multipliant donc ces viteſſes par leur maſſe, la ſomme des produits ou des quantités de mouvement de B & D ſera $\frac{40}{13}$, & comme il faut $\frac{52}{13}$ pour égaler la quantité de mouvement de M avant le choc, il reſtera $\frac{12}{13} = \frac{2 \times 6}{13}$ pour la quantité de mouvement de A après le choc, c'eſt-à-dire A continuera de ſe mouvoir ſelon la même direction avec une viteſſe $= \frac{6}{13}$.

Par le même Problême précédent, nous avons $\frac{Maab}{Maa + mbb + mcc} = \frac{2 \times 4 \times \sqrt{2}}{8 + 2 + 3} = \frac{8\sqrt{2}}{13}$ pour la viteſſe de B ſelon ſa direction AB lorſque les boules ne ſont pas élaſtiques, & $\frac{Maac}{Maa + mbb + mcc} = \frac{2 \times 4 \times \sqrt{2}}{13} = \frac{8\sqrt{3}}{13}$ pour celle de D; doublant donc ces viteſſes, nous aurons $\frac{16\sqrt{2}}{13}$, $\frac{16\sqrt{3}}{13}$ pour les viteſſes de B & D ſelon leur directions, lorſque les boules ſont élaſtiques; faiſant donc les quarrez des viteſſes $\frac{16\sqrt{2}}{13}$, $\frac{16\sqrt{3}}{13}$, $\frac{6}{13}$ des boules B, D, A, après le choc, nous aurons $\frac{512}{169}$ pour le quarré de la viteſſe de B,

$\frac{768}{169}$ pour celui de la viteſſe de D, & $\frac{36}{169}$ pour celui de la viteſſe de A, & multipliant ces quarrez par les maſſes, nous aurons $\frac{512+768+72}{169} = \frac{1352}{169} = 8$; or le quarré de la viteſſe de A avant le choc multiplié par la maſſe, eſt auſſi $4 \times 2 = 8$; donc, &c.

REMARQUE.

618. Avant d'aller plus loin, je ſuis bien aiſe de faire obſerver un cas particulier auquel on n'a peut être pas fait attention, & qui confirmera de plus en plus mon hypotèſe.

Suppoſons que la boule A non élaſtique pouſſée ſelon la direction CA vienne à choquer les deux boules B, D non élaſtiques égales entr'elles, & dont les directions faiſant l'une un angle BAX moindre de 90 degrés; par exemple de 30, & l'autre un angle DAX de 90 degrés; je demande d'abord ſi la boule A donnera quelque mouvement à la boule D, ou ſi elle n'en donnera point.

Si l'on repond que la boule D ne recevra aucun mouvement, à cauſe que la direction AC eſt parallele à la tangente LS, il s'enſuivra que la boule B ſera choquée de même que ſi elle étoit ſeule; or en ce cas la direction CA étant compoſée des deux CF, FA, ſi nous ſuppoſons les boules égales, la boule B recevra par le choc une viteſſe égale à $\frac{1}{2}$ AF ſelon ſa direction, & le corps A devroit aller auſſi du même côté avec la même viteſſe $\frac{1}{2}$ AF=AH, mais comme la direction CF qui n'agit point ſur B agit toujours ſur A, la boule A prendra une direction compoſée de la direction AH & de la direction HM égale & parallele à CF, donc la boule A prendra la direction AM, & l'on prouvera aiſément que la quantité de mouvement ſelon la direction CA, avant & après le choc ſera la même; car la viteſſe NO = AH = $\frac{1}{2}$ AF du corps B, donnera ſelon la direction AC une viteſſe = $\frac{3}{4}$, la viteſſe AH du corps A donnera auſſi ſelon AC une viteſſe = $\frac{3}{4}$, & la viteſſe HM du même corps A donnera ſelon la même direction AC une viteſſe = $\frac{1}{2}$; ainſi ſuppoſant la maſſe A = B = 1, les quantités de mouvement de ces deux maſſes après le choc ſeront $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3+3+2}{4} = \frac{8}{4} = 2$, & par conſéquent elles ſeront égales à la quantité A × AC = 2 du corps A avant le choc.

Mais voici la difficulté; ſi le centre de la boule A prend la direction AM, le point P où la boule A touche la boule D prendra

la direction PN égale & parallele à AM, mais AM passe entre AX, & AP, car les triangles rectangles AHX, AFC étant semblables, on a AH, AF : : HX, CF; or AH $=\frac{1}{2}$AF, donc HX $=\frac{1}{2}$CF $=\frac{1}{2}$HM, & par conséquent l'extrémité M de HM tombe en delà de AX; or PN étant parallele à AM, & AX parallele à LS, il est visible que PN passera entre LS & PD, & que par conséquent le point P ne peut suivre la direction PN sans donner du mouvement à la boule D; ce qui est contraire à ce qu'on prétendoit.

Que si on repond que la boule A choque la boule D, la direction AM étant composée des deux AZ, ZM, la boule D prendra la direction P*p* égale & parallele à $\frac{1}{2}$ZM $=z$Z, & la boule A prendra la direction A*z* composée de *z*Z & de AZ, & on démontrera de même que la quantité de mouvement selon la direction CA avant & après le choc est la même, mais voici l'inconvenient; si le centre A prend la direction A*z*, au lieu de la direction AM, je mene la droite *z*H, & l'angle AHZ n'est plus droit, car l'angle MHA est droit par la construction; menant donc du point V la droite VT égale & parallele à A*z*, & menant les droites TO, T*z* le point V de la boule B se trouvera en O quand le point V de la boule A sera en T, & que le centre de la même boule sera en *z*; or les angles OTV, YOT étant aigus, il est clair que les boules B, A couperont la ligne OT, & que par conséquent les deux boules B, A ne se sépareront pas dans l'instant du choc, ce qui est cependant nécessaire, ainsi que nous l'avons démontré ci-dessus (*N.* 602).

Il y a donc ici de la difficulté de part & d'autre, car si l'on veut que la boule D ne reçoive aucun mouvement & que la boule A agisse sur B comme si elle étoit seule, je fais voir que la boule D recevra du mouvement; si au contraire on veut que la boule D reçoive du mouvement, je prouve que les boules B, A ne peuvent se mouvoir toutes deux d'une maniere uniforme; il faut donc nécessairement avoir recours à d'autres principes, & mon hypotèse est l'unique que l'on puisse employer; les directions AF, CF agissant proportionnellement, il arrive qu'autant le corps A se trouve éloigné de sa direction par la force AF, autant en est-il rapproché par la force CF, & par conséquent la boule D ne reçoit rien puisqu'il ne reste aucune force selon la direction AP, qui puisse la passer. Venons au calcul.

Je nomme *x* la vitesse AX du corps A après le choc, M la

maſſe de A ou de B, b la direction AF & a la direction AC; je mene Vt égale & parallele à AX, tO perpendiculaire à la direction AB, & OQ perpendiculaire ſur Vt; ainſi VO marque la viteſſe de B ſelon ſa direction, & VQ marque ſa viteſſe ſelon la direction CA; or à cauſe de AC, AK :: Vt, VQ, j'ai a, $\frac{bb}{a}$ :: x, $\frac{bb}{aa}x$ = VQ, donc la viteſſe de B ſelon CA eſt $\frac{bb}{aa}x$; multipliant donc les viteſſes de A & de B par les maſſes, j'ai $Mx + \frac{Mbbx}{aa}$ pour la ſomme de leurs quantités de mouvement après le choc; or cette ſomme eſt égale à la quantité de mouvement avant le choc, donc $Mx + \frac{Mbbx}{aa} = Ma$, ou $aaMx + bbMx = Ma^3$, d'où je tire $x = \frac{Ma^3}{aaM + bbM}$ viteſſe de A après le choc; & mettant cette valeur dans $\frac{bbx}{aa}$, j'ai $\frac{Mabb}{aaM + bbM}$ viteſſe de B ſelon la direction CA, & faiſant CA, AF :: Vt, VO, ou a, b :: $\frac{Ma^3}{aaM + bbM}$, $\frac{Ma^2b}{aaM + bbM}$ = VO, j'ai la viteſſe de B ſelon ſa direction AB.

Suppoſons M = 1 & $a = 2$, ce qui donne $b = \sqrt{3}$, donc $x = \frac{8}{4+3} = \frac{8}{7}$ & $\frac{bbx}{aa} = \frac{3 \times 8}{4 \times 7} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$, donc la viteſſe de A après le choc eſt $\frac{8}{7}$, & celle de B ſelon la direction CA eſt $\frac{6}{7}$, & multipliant ces viteſſes par les maſſes, la ſomme des quantités de mouvement après le choc eſt $\frac{1 \times 8}{7} + \frac{1 \times 6}{7} = \frac{14}{7} = 2$, & cette ſomme eſt égale à la quantité de mouvement $1 \times 2 = 2$ de A avant le choc.

Si les boules ſont élaſtiques je double la viteſſe $\frac{6}{7}$, ce qui donne $\frac{12}{7}$ pour la viteſſe de B ſelon CA lorſque les boules ſont élaſtiques, & comme il faut $\frac{14}{7}$ pour faire égalité de mouvement avant & après le choc, la boule A doit donc avoir $\frac{2}{7}$ après le choc; or la viteſſe de B ſelon ſa direction AB lorſque les boules ne ſont pas élaſtiques eſt $\frac{Ma^2b}{Maa + Mbb} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, donc doublant cette viteſſe, j'ai $\frac{8\sqrt{3}}{7}$ pour la viteſſe de B ſelon ſa direction; je fais le quarré de $\frac{8\sqrt{3}}{7}$ & de la viteſſe $\frac{2}{7}$ de la boule A, ce qui donne $\frac{192}{49}$ & $\frac{4}{49}$, je multiplie ces quarrés par les maſſes, & la ſomme des produits eſt $\frac{1 \times 192}{49} + \frac{1 \times 4}{49} = \frac{196}{49} = 4$; or le quarré de la viteſſe de A après le choc

choc étant multiplié par la masse A est aussi $=4$, donc, &c.

619. PROBL. XI. *Connoissant la vitesse & la direction* AC, (Fig. 226.) *d'une boule* A *non élastique qui choque un nombre de boules* B, D, L, I, *non élastiques au-dessus de deux, & dont les directions prises deux à deux ne font pas des angles égaux avec la direction* CA, *connoître les vitesses des boules après le choc.*

SOLUTION.

Je me sers de la même hypotèse du Problême précédent, c'est-à-dire qu'en considérant la boule A comme si elle ne choquoit que B, sa vitesse après le choc seroit composée de la vitesse Ad égale à la vitesse que B recevroit, & d'un vitesse selon la direction dX qui seroit égale & parallele à CG, de même si A ne choquoit que D sa vitesse après le choc seroit composée de la vitesse Aa égale à la vitesse que D recevroit, & d'une vitesse selon la direction aX, laquelle seroit égale & parallele à CE, & ainsi des autres; or en supposant que la boule A choque à la fois les quatre boules, je conçois que le mouvement CA est composé du quart des huit directions, GA, HA, FA, EA, CG, CH, CE, CF, & que les quatre premieres se communiquant proportionnellement aux boules dont elles sont les directions & à la boule A, les quatre autres se communiquent aussi proportionnellement à la boule A, laquelle prendra par conséquent la direction AX, & que tout se fasse de façon que les quantités de mouvement après le choc selon la direction CA soient égales à la quantité de mouvement de A avant le choc.

Je nomme CA $=a$, EA $=b$, GA $=c$, HA $=f$, FA $=l$, la masse A $=$ M, la masse B $=$ D $=$ L $=$ I $=m$, & la vitesse AX de la boule A après le choc $=x$; par les raisonnemens que nous avons faits dans les Problêmes précédens, nous aurons $\frac{ccx}{aa}$ pour la vitesse de B selon la direction CA, $\frac{bbx}{aa}$ pour celle de D, $\frac{ffx}{aa}$ pour celle de I & $\frac{llx}{aa}$ pour celle de L; multipliant donc ces vitesses par les masses la somme des quantités de mouvement sera $Mx + \frac{mccx}{aa} + \frac{mbbx}{aa} + \frac{mffx}{aa} + \frac{mllx}{aa}$, & par conséquent $Mx + \frac{mccx}{aa} + \frac{mbbx}{aa} + \frac{mffx}{aa} + \frac{mllx}{aa} = Ma$, d'où l'on tire $x = \frac{Ma^3}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de A après le choc; & mettant cette valeur de x dans les

autres viteſſes, nous aurons $\frac{ccx}{aa} = \frac{Macc}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ viteſſe de B ſelon la direction CA, $\frac{bbx}{aa} = \frac{Mabb}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ viteſſe de D, $\frac{ffx}{aa} = \frac{Maff}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ viteſſe de I, & $\frac{llx}{aa} = \frac{Mall}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ viteſſe de L.

Pour trouver les viteſſes des boules ſelon leurs directions on obſervera que les triangles ſemblables CGA, VTO donnent CG, CA :: VT, VO, donc $a, c :: \frac{Ma^3}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$, $\frac{Maac}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ = VO viteſſe de B ſelon ſa direction, & par un ſemblable raiſonnement on trouvera $\frac{Maab}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ viteſſe de D ſelon ſa direction $\frac{Maaf}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ viteſſe de I ſelon ſa direction, & $\frac{Maal}{Maa + mbb + mcc + mff + mll}$ viteſſe de L ſelon ſa direction.

Suppoſons $M = 10$, $m = 1$, l'angle BAX ou CAG de 60 degrés, l'angle IAX ou CAH de 45 degrés, l'angle LAX ou CAF de 30 degrés & l'angle DAX, ou CAE d'environ 14 degrés 29 minutes, de façon qu'en nommant le ſinus total $CA = 2$, le ſinus CE ſoit $= \frac{1}{2}$, nous aurons $AG = 1$, $FA = \sqrt{3}$, $HA = \sqrt{2}$, & EA $\sqrt{\frac{15}{4}}$, & mettant ces valeurs dans les viteſſes trouvées, nous aurons $x = \frac{10 \times 8}{40 + 1 + \frac{15}{4} + 2 + 3} = \frac{320}{199}$ viteſſe de A après le choc; $\frac{ccx}{aa} = \frac{80}{199}$ viteſſe de B ſelon la direction CA, $\frac{bbx}{a} = \frac{300}{199}$ viteſſe de D, $\frac{ffx}{aa} = \frac{160}{199}$ viteſſe de I, & $\frac{llx}{aa} = \frac{240}{199}$ viteſſe de L, & multipliant ces viteſſes par leurs maſſes la ſomme des quantités de mouvement après le choc ſera $\frac{3200 + 80 + 300 + 160 + 240}{199} = \frac{3980}{199} = 20$; or la quantité de mouvement de A avant le choc eſt auſſi $Ma = 10 \times 2 = 20$, donc &c.

620. PROBL. XII. *Trouver les mêmes choſes que dans le Problême précédent, en ſuppoſant les boules élaſtiques.*

SOLUTION.

Je double les viteſſes trouvées par le Problême précédent, & j'ai $\frac{160}{199}$ pour la viteſſe de B ſelon la direction CA lorſque les bou-

les ſont élaſtiques, $\frac{600}{199}$ pour celle de D, $\frac{320}{199}$ pour celle de I, & $\frac{480}{199}$ pour celle de L, & multipliant ces viteſſes par leurs maſſes, la ſomme des quantités de mouvement des quatre boules choquées eſt $\frac{160 + 600 + 320 + 480}{199} = \frac{1560}{199}$, & comme il faut $\frac{3980}{199}$ pour faire égalité de mouvement avant & après le choc, il reſte pour la quantité de mouvement de A ſelon ſa direction $\frac{2420}{199} = \frac{10 \times 242}{199}$, c'eſt-à-dire que A après le choc s'avancera ſelon ſa direction avec une viteſſe égale à $\frac{242}{199}$.

Maintenant par le Problême précédent la viteſſe de B ſelon ſa direction AB eſt $\frac{Maac}{Maa + mbb + mcc + mff + mll} = \frac{160}{199}$ & celle de D eſt $\frac{Maab}{Maa + mbb + mcc + mff + mll} = \frac{160\sqrt{\frac{5}{4}}}{199}$, celle de I eſt $\frac{Maaf}{Maa + mbb + mcc + mff + mll} = \frac{160\sqrt{2}}{199}$ & celle de L eſt $\frac{Maal}{Maa + mcc + mbb + mff + mll} = \frac{160\sqrt{3}}{199}$, doublant donc ces viteſſes, & faiſant leurs quarrés de même que le quarré de la viteſſe $\frac{242}{199}$ de A, puis multipliant tout par les maſſes la ſomme des quarrés des viteſſes multipliés par les maſſes après le choc, ſera $\frac{585640 + 102400 + 384000 + 204800 + 307200}{39601} = \frac{1584040}{39601} = 40$; or le produit des quarrés de la viteſſe CA par la maſſe A eſt auſſi $4 \times 10 = 40$, donc, &c.

REMARQUE.

621. La maniere dont nous venons de reſoudre la queſtion eſt generale pour un nombre quelconque de boules pair ou impair, c'eſt-à-dire, ſoit qu'il y en ait un même nombre de part & d'autre, ſoit qu'il y en ait plus d'un côté que de l'autre, on peut auſſi en mettre une qui ſoit ſur la direction CA comme nous avons fait ci-deſſus, enfin la queſtion ſe reſoudra également lorſque les boules choquées ſont inégales entr'elles; au reſte le prétendu principe des forces vives n'a nulle part dans cette queſtion, il eſt vrai que lorſque les corps ſont élaſtiques les quarrés des viteſſes ſelon les différentes directions multipliés par les maſſes ſont égaux au quarré de la viteſſe primitive CA multipliée par la maſſe, mais nous avons fait obſerver que cela n'étoit ainſi que parce que la viteſſe primitive étoit compoſée elle-même d'un même nombre de viteſſes dont les

quarrés multipliés par les masses seroient aussi égaux au quarré de la vitesse CA multipliée par la masse A. D'ailleurs cette proprieté ne peut servir tout au plus que pour faire découvrir ce qui doit arriver lorsque A ne choque que deux boules égales & dont les directions sont également éloignées de la direction CA, mais elle ne sert de rien pour la solution générale de la question, & tout l'usage qu'on en tire n'est autre que celui de faire voir que la solution trouvée se trouve d'accord avec elle; c'est donc à tort que M. Bernoulli releve ici l'efficacité de la théorie des forces vives, s'il a resolu une partie de la question, c'est le principe dont nous venons de parler qui l'y a conduit, encore y a-t'il trouvé de grandes difficultés, comme il l'avoue lui-même, & comme il paroît par la façon dont il traite la matiere lorsqu'il s'agit d'un nombre pair de boules choquées plus grand que deux : il est étonnant qu'un si célébre Geométre n'ait pas pû pousser la chose plus loin, mais les plus grands genies ne sont pas toujours à l'abri de l'offuscation des préjugés.

Du choc des Corps projettés qui se rencontrent pendant leur mouvement.

622. *Deux corps égaux* H, R (Fig. 229.) *étant projettés des points* A, F *avec une même force & sous des angles égaux* PAC, QFD *tournés vers les côtés opposés, ensorte qu'ils viennent à se rencontrer pendant leur mouvement, trouver le point où ils se rencontrent, la force du choc, & leur route après le choc.*

La force & l'angle d'élevation étant connus, l'amplitude AC ou DF de l'un ou l'autre corps sera aussi connue, puisqu'il n'y a qu'à faire un coup d'épreuve avec la même force & sous le même angle; & comme la distance des points A, F des batteries est aussi connue, il est visible qu'on connoîtra aisément la distance KL des points K, L qui coupent les deux amplitudes AC, FD en deux également.

Je retranche de KL la somme HR des rayons des deux bombes, & prenant la moitié du reste, l'ordonnée NH ou RO doit être égale à cette moitié, car il est visible que $NH + HR + NO = KL$; il s'agit donc de trouver l'abscisse BN ou EO correspondante à l'ordonnée NH ou RO; or par la proprieté de la parabole $\overline{NH}^2 = BN \times p$, donc $\frac{\overline{NH}^2}{p} = BN$, c'est-à-dire qu'en faisant

le quarré de l'ordonnée NH, & divisant ce quarré par le parametre lequel se connoît aisément quand l'amplitude & la hauteur sont connus, le quotient sera l'abscisse cherchée ; ainsi prenant BN ou EO égal à ce quotient, & menant l'ordonnée NH ou OR, les bombes se rencontreront lorsquelles seront aux points H, R.

Maintenant si la bombe R choquoit un corps qui fût perpendiculaire sur sa direction MA, son choc seroit MA divisé par le tems (*N.* 591), ainsi nommant a le parametre de l'axe EO, ou BK, x l'abscisse EO ou BN, le tems seroit $\sqrt{x}$, & la force du choc seroit $\sqrt{a+4x}$ (*N.* 591), ou MA divisé par le tems, ou la racine du parametre du diametre qui passe par le point H ou R ; or MR étant composée des deux MO, OR, MR divisé par $\sqrt{x}$ sera aussi composée de MO, OR divisées chacune par $\sqrt{x}$; mais MO ne choque point la bombe H, car la direction TH de cette bombe étant composée des deux TN, NH, il est visible que les deux forces TN, MO qui sont paralleles, ne se choquent point, & qu'il n'y a que les deux OR, NH dont les directions sont contraires qui influent au choc ; donc la bombe R choque avec une force égale à OA divisé par $\sqrt{x}$, & la bombe H choque avec une force égale à NH divisé par $\sqrt{x}$; or par la proprieté de la parabole on a $\overline{RO}^2$ ou $\overline{NO}^2 = ax$, donc $RO = \sqrt{ax}$, & $\frac{RO}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{a}$; nommant donc M la masse de chacune des bombes, la force du choc sera $2M\sqrt{a}$

Les deux bombes étant égales de même que leurs vitesses après le choc, elles doivent rebrousser chemin après le choc avec la même vitesse (*N.* 327) ; ainsi la vitesse de la bombe R vers O doit être encore $\sqrt{a}$, & la vitesse de la bombe H vers N est aussi $\sqrt{a}$, mais les vitesses MO, TN divisées chacune par $\sqrt{x}$ agissant toujours sur ces bombes, & ces vitesses étant $\frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} = \sqrt{4x}$ les bombes prendront des directions Rr, Hh composées des forces $\sqrt{a}$, $\sqrt{4x}$ & par conséquent la vitesse de chacune des bombes sera $\sqrt{a+4x}$ de même qu'avant le choc ; mais R prendra une direction Rr parallele à la direction TH de H avant le choc, & H prendra une direction Hh parallele à la direction MR de R avant le choc ; & comme la force avec laquelle R parcourra sa direction est la même que la force avec laquelle H auroit continué de parcourir sa direction TH s'il n'y avoit point eu de choc, il est visible que la pesanteur agira sur R dans sa nouvelle direction,

comme elle auroit agi sur H dans sa premiere direction, & par conséquent R parcourra un arc de parabole parallele, égal & semblable à l'arc HC dans le même tems que H auroit parcouru HC; par la même raison la bombe H après le choc décrira un arc de parabole parallele, égal & semblable à l'arc RD dans le même tems que R auroit parcouru RD.

623. *Supposant les bombes égales, les hauteurs* BK, EL *égales, & les amplitudes* AC, DE *inégales, trouver les mêmes choses que dans le nombre précédent* (Fig. 231).

Je nomme la distance connue $KL = c$, la somme des deux rayons des deux boules $= b$, le parametre de l'axe $BK = a$, celui de l'axe $EL = p$, la hauteur EO ou BN à laquelle les deux bombes se rencontreront $= x$; il est visible que lorsque les bombes viendront à se choquer on aura $NH + HR + RO = KL$; or par la proprieté de la parabole, j'ai $\overline{NH}^2 = BN \times a = ax$, donc $NH = \sqrt{ax}$; de même j'ai $\overline{RO}^2 = EO \times p = px$, donc $RO = \sqrt{px}$; mettant donc les valeurs de NH, RO, & KL dans $NH + HR + RO = KL$, j'ai $\sqrt{ax} + b + \sqrt{px} = c$, & par conséquent $c - b = \sqrt{ax} + \sqrt{px}$, c'est-à-dire que si de KL je retranche la somme b des rayons, le reste sera composé de deux parties qui seront comme $\sqrt{ax}$, $\sqrt{px}$, ou comme $\sqrt{a}$, $\sqrt{p}$, à cause du multiplicateur commun x; donc si après avoir retranché HR de KL, je divise le reste en deux parties qui soient comme $\sqrt{a}$, $\sqrt{p}$, j'aurai les deux ordonnées NH, RO correspondantes au point du choc; ainsi pour trouver l'abcisse EO, je divise le quarré de RO par le parametre p, & le quotient est la hauteur EO, car par la proprieté de la parabole, j'ai $\overline{RO}^2 = EO \times p$, d'où je tire $\frac{\overline{RO}^2}{p} = EO$, donc le point du choc est trouvé.

Si les bombes se choquoient mutuellement selon leurs directions, le choc de H seroit $\frac{TH}{\sqrt{x}}$, & celui de R seroit $\frac{MR}{\sqrt{x}}$, mais H ne choque que selon la direction NH, & R ne choque que selon OR, donc le choc de H est $\frac{NH}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{a}$, & le choc de R est $\frac{OR}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{px}}{\sqrt{x}} = \sqrt{p}$, & par conséquent le choc total est $M\sqrt{a} + M\sqrt{p}$.

Les deux bombes étant égales, leurs vitesses après le choc,

selon les directions HN, RO se trouvent échangées (*N.* 328), c'est-à-dire R après le choc aura selon la direction RO une vitesse $=\sqrt{a}$, & H aura selon la direction HN une vitesse $=\sqrt{p}$; or la force $\frac{TN}{\sqrt{x}}$ n'ayant point agi sur R, agit toujours sur H, & la force $\frac{MO}{\sqrt{x}}$ n'ayant point agi sur H, agit toujours sur R, donc H prendra une direction composée des deux $\sqrt{p}$, $\frac{TN}{\sqrt{x}}$, & R prend une direction composée des deux $\sqrt{a}$, $\frac{MO}{\sqrt{x}}$; or la direction de H avant le choc étoit composée de $\sqrt{a}$, $\frac{TN}{\sqrt{x}}$ & $\frac{TN}{\sqrt{x}}=\frac{MO}{\sqrt{x}}$, donc cette direction étoit composée de $\sqrt{a}$, $\frac{MO}{\sqrt{x}}$, mais nous venons de voir que la direction de R après le choc est composée aussi de $\sqrt{a}$, $\frac{MO}{\sqrt{x}}$, donc la direction Rr de R après le choc est parallele à la direction TH de H avant le choc; par un semblable raisonnement on prouvera que la direction Hh de H après le choc est parallele à la direction MR de R avant le choc.

Puis donc que R a la même direction & la même vitesse que H avoit dans l'instant du choc, il s'ensuit que la pesanteur de R après le choc l'abaissera de la même façon qu'elle auroit abaissé H, s'il n'y avoit point eu de choc, & que par conséquent R décrira un arc de parabole égal, parallele & semblable à l'arc de parabole HC dans le même tems que H auroit décrit cet arc s'il n'y avoit point eu de choc, & par la même raison H après le choc décrira un arc de parabole égal, parallele & semblable à l'arc RD, dans le même tems que R auroit décrit cet arc s'il n'y avoit point eu de choc.

624. *Les bombes étant égales, & les hauteurs & les amplitudes inégales, trouver les mêmes choses que ci-dessus, & de plus de combien de tems l'une des bombes doit être poussée plutôt que l'autre, afin qu'elles viennent à se choquer dans leurs projections* (Fig. 230).

Les hauteurs BK EO étant connues, leur différence sera aussi connue; je nomme donc cette différence $=r$, le parametre de l'axe BK $=a$, celui de l'axe EL $=p$, la somme des rayons des bombes $=b$; la distance KL $=c$, la hauteur EO de EL à laquelle les bombes se rencontreront $=x$, donc BN $=x+r$; or par la proprieté de la parabole j'ai $\overline{NH}^2=NB\times a$, donc $\overline{NH}^2=ax$

$+ar$, & $NH = \sqrt{ax+ar}$; de même $\overline{RO}^2 = EO \times p$, donc $\overline{RO}^2 = px$ & $RO = \sqrt{px}$.

$NH + HR + RO = KL$, donc $\sqrt{ax+ar} + b + \sqrt{px} = c$; & $\sqrt{ax+ar} + \sqrt{px} = c - b$, & quarrant chaque membre, j'ai $ax + ar + 2\sqrt{apxx + arpx} + px = c^2 - 2bc + bb$, & par conséquent $2\sqrt{apxx + arpx} = c^2 - 2bc + bb - ax - ar - px$, & pour abreger faisant $c^2 - 2bc + bb = mm$, j'ai $2\sqrt{apxx + arpx} = mm - ax - ar - px$; & quarrant chaque membre, j'ai $4apxx + 4arpx = m^4 - 2am^2x + aax^2 - 2armm + 2aarx + aarr - 2pmmx + 2apxx + 2arpx + ppx^2$, & corrigeant l'expression, j'ai $2apx^2 + 2arpx = m^4 - 2am^2x + aax^2 - 2armm + 2aarx + aarr - 2pmmx + ppx^2$, & ordonnant l'équation, j'ai

$$\begin{array}{llll} +2apx^2 & +2arpx & -m^4 & =0 \\ -aax^2 & +2am^2x & +2armm & \\ -ppx^2 & -2aarx & -aarr & \\ & +2pmmx & & \end{array}$$

& divisant chaque terme de cette équation par $2ap - aa - pp$, puis faisant le coefficient du second terme égal à une seule grandeur $\pm l$ qui sera négative ou positive, selon que l'évaluation de ce coefficient sera positif ou négatif, & faisant aussi le troisiéme terme égal à une seule grandeur $-f$ qui sera nécessairement négative, à cause que le Problême ne pouvant pas avoir deux solutions, l'équation doit avoir une racine fausse auquel cas le signe du troisiéme terme est toujours $-$, soit que celui du second soit $+$ ou qu'il soit $-$, on aura une équation préparée $x^2 \pm lx - f = 0$, donc $x^2 \pm lx = f$, & ajoûtant de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}ll$ de la moitié du coefficient du second terme, on aura $x^2 \pm lx + \frac{1}{4}ll = f + \frac{1}{4}ll$, & tirant la racine quarrée on aura $x \pm \frac{1}{2}l = \sqrt{f + \frac{1}{4}ll}$ & $x = \mp \frac{1}{2}l + \sqrt{f + \frac{1}{4}ll}$, ainsi on aura la valeur de EO; donc menant l'ordonnée OR prolongée jusqu'en N on aura $HR = b$, & par conséquent les bombes étant venues en H & R se choqueront.

Maintenant les bombes ne se choquant que selon leurs directions NH, OR divisées par les tems, c'est-à-dire $\frac{NH}{\sqrt{x+r}} = \frac{\sqrt{ax+ar}}{\sqrt{x+r}} =$

$=\sqrt{a}$, & $\frac{OR}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{px}}{\sqrt{x}}=\sqrt{p}$, il est visible que le choc sera $M\sqrt{a}$ $+M\sqrt{p}$.

Les deux bombes étant égales feront échange de leurs vitesses après le choc (*N.* 328), donc R ira selon la direction RO avec une vitesse $=\sqrt{a}$, & H ira selon la direction HN avec une vitesse $=\sqrt{p}$, mais comme les vitesses $\frac{MO}{\sqrt{x}}=\frac{mR}{\sqrt{x}}=\sqrt{4x}$ & $\frac{TN}{\sqrt{x+r}}$ $=\frac{tH}{\sqrt{x+r}}$ n'ont pas agi pendant le choc, la bombe H prendra une direction vers K composée des deux $\sqrt{p}$ & $\frac{tH}{\sqrt{x+r}}$, & la bombe R prendra une direction vers L composée des deux $\sqrt{a}$ & $\frac{mR}{\sqrt{x}}$.

Pour connoître les paraboles que les bombes décriront en conséquence de leur pesanteur, je multiplie les deux forces composantes de leurs vitesses après le choc par leurs tems, c'est-à-dire, je multiplie les vitesses $\sqrt{a}$, & $\frac{mR}{\sqrt{x}}$ par $\sqrt{x}$, afin de savoir l'espace que R parcourra dans un tems égal à celui qu'elle a employé à parvenir en R, & j'ai $\sqrt{ax}$, mR ou $\sqrt{ax}$, $2x$, à cause que mR $=$MO$=$2EO$=2x$, c'est-à-dire qu'en prenant sur RO une partie R$u=\sqrt{ax}$, les vitesses composantes de R après le choc dans un tems égal à celui que R a employé à parvenir en R seront RV, mR, & par conséquent la composée sera $=m$V, ainsi menant Rr parallele & égale à mV, la bombe R prendra la direction Rr, d'où il suit que si R avant le choc avoit été poussée par les vitesses composantes d'après le choc, sa direction sur rR prolongée du côté de T auroit été égale à Rr ou à mV.

Or comme les directions MO, OR qui auroient fait parcourir à R la direction MR, sont toutes deux uniformes, & que pour avoir les forces qui lui ont fait parcourir l'arc parabolique ER, il faut substituer à la place de la force verticale & uniforme MO, une autre force verticale & accelerée, qui à la fin du même tems donnât une vitesse acquise, égale à la vitesse MO, & qui par conséquent ne fît parcourir dans le même tems qu'un espace EO moitié de l'espace MO (*N.* 63); de même en supposant que les deux vitesses composantes avant le choc fussent mR, RV, il n'y auroit qu'à substituer à la place de la verticale & uniforme mR, une accelerée qui à la fin du même tems donnât une vitesse acquise égale à la vitesse mR, & qui par conséquent ne fît parcourir qu'un espace 7R moitié de mR, & l'on auroit l'arc para-

bolique 7V, qui feroit égal, femblable & parallele à l'arc parabolique, que R auroit décrit en venant du côté de T vers R.

Maintenant les directions mV, & RV ou $7u$ fon égale, étant parcourues dans le même tems, il s'enfuit que la bombe pouffée par la force horifontale $8u$, fe trouvant abaiffée par fa pefanteur de la quantité $u\text{V} = 7m$, la même bombe pouffée par la force oblique Vm de V en m, ne fe trouveroit abaiffée par fa pefanteur que de la même quantité $7m$, & par conféquent elle décriroit la même parabole, ainfi qu'il a été prouvé ci-deffus (*N.* 295), donc fi cette bombe au lieu d'être pouffée avec la force Vm de V en m étoit pouffée felon la direction Vx, en forte que Vx fût égal à Vm, elle fe trouveroit abaiffée à la fin de Vx d'une quantité $xy = m7$, & par conféquent elle décriroit dans ce mouvement un arc parabolique Vy qui feroit la continuation de la parabole 8V, comme il a été démontré plus haut (*N.* 295), donc puifque R après le choc feroit pouffé avec une force Rr = Vx, elle décriroit à caufe de fa pefanteur un arc parabolique égal, parallele & femblable à l'arc Vy, ce qui doit s'entendre en cas que la ligne horizontale AF ne la retint dans fa courfe, auquel cas il feroit facile de déterminer par nos principes, dans combien de tems elle fe trouveroit arrêtée par cette horizontale.

Il eft vifible que le parametre de l'axe 7R de la parabole 7Vy eft le même que le parametre a de l'axe BK de la parabole ABC, car puifque $\text{RV} = \sqrt{ax}$, fon quarré fera $ax = \text{OR}$; or ce quarré eft égal à l'abfciffe 7R ou x multipliée par le parametre, donc le parametre doit être a; ainfi fi fur la hauteur 7R = EO on décrit une parabole avec un parametre $= a$, c'eft-à-dire égal au parametre de la parabole de la bombe H, la bombe R après fon choc décrira un arc de parabole parallele, égal & femblable à un arc qui feroit la continuation de la parabole 8V.

On prouvera de la même façon que fi on multiplie les deux forces compofantes de H après le choc par leur tems, c'eft-à-dire $\sqrt{p}$, $\frac{\text{TH}}{\sqrt{x+r}}$ par le tems $\sqrt{x+r}$, ce qui donnera $\sqrt{px+pr}$ & TH, & qu'après avoir pris $\text{H}q = \sqrt{xx+pr}$, on décrive fur la hauteur $n\text{H} = \text{BN} = \frac{1}{2}\text{TN}$ une parabole nq avec un parametre égal au parametre p de la parabole ER de l'autre bombe R, & qu'on mene la tangente qt, la bombe H après le choc prendra une direction Hh, parallele à tq, & à caufe de fa gravité elle décrira un arc de parabole parallele & femblable à l'arc qui feroit

la continuation de la parabole *nq* & qui feroit décrit dans un tems égal à celui qui avoit été employé à décrire *nq*.

De peur qu'on ne soit embarrassé à trouver en quel tems la bombe R seroit arrêtée par l'horizon, on fera attention que dans les triangles rectangles *m*RV, *m*C4, les droites *m*R, RV, *m*C, étant connues, on connoîtra C4 en faisant *m*R, RV :: *m*C, C4; de même la hauteur 7C & le parametre de la parabole 7V*y* étant connus, on connoîtra l'ordonnée C8 en multipliant 7C par le parametre V*a*, & tirant la racine du produit, donc retranchant de la droite C4 la droite C8, le reste sera la valeur de 8, 4; & élevant en 8 la perpendiculaire 89, on connoîtra cette perpendiculaire en faisant C4, CM :: 84, 89; maintenant à la fin du tems V9 la bombe R se seroit abaissée de la hauteur 89, de même qu'à la fin du tems V*x* elle se seroit abaissée de la hauteur *xy*; or ces hauteurs sont comme les quarrés des tems, donc les tems sont comme les racines de ces hauteurs, & par conséquent on dira comme la racine de *xy* est à la racine de 89, ainsi le tems connu VX est au tems cherché V9.

Il ne reste plus qu'à savoir quelle distance de tems on doit mettre, entre le moment où l'on tire l'une des bombes, & celui où l'on tire l'autre pour faire ensorte qu'elles se rencontrent; or cela est facile après qu'on a trouvé la hauteur EO, car le tems que la bombe employera à parcourir la demi-parabole EF sera $\sqrt{EL}$, & celui qu'elle employera à parcourir l'arc ER sera $\sqrt{EO}$, ainsi le tems employé depuis son depart en F jusqu'au point R sera $\sqrt{EL}+\sqrt{EO}$, & par la même raison le tems que H employera depuis son depart en A jusqu'en H sera $\sqrt{BK}+\sqrt{BN}$, & comme celui-ci sera plus grand que le tems $\sqrt{EL}+\sqrt{EO}$, si on retranche $\sqrt{EL}+\sqrt{EO}$ de $\sqrt{BK}+\sqrt{BN}$, le reste $\sqrt{BK}+\sqrt{BN}-\sqrt{EL}-\sqrt{EO}$, sera le tems qu'il faut mettre entre le depart de H & celui de R.

625. *Les bombes, les hauteurs & les amplitudes étant inégales, trouver les mêmes choses que ci-dessus* (Fig. 232).

La force du choc, la hauteur EO correspondante au point de rencontre, & la distance de tems qu'il faut mettre entre le depart de l'une & le depart de l'autre se trouveront comme dans le cas précédent; il n'y a donc ici de difficulté qu'à l'égard de ce qui arrivera après le choc, & c'est ce que nous allons examiner.

Si les masses H, R sont reciproques à leurs vitesses, c'est-à-

dire, si H, R :: $\frac{RO}{\sqrt{x}}$, $\frac{NH}{\sqrt{x+r}}$ les bombes après le choc rebrousseront chemin avec les vitesses qu'elles avoient auparavant (*N.* 339); ainsi en supposant que ces vitesses sont multipliées par leurs tems pour voir ce que les bombes parcourront après le choc dans des tems égaux à leur descente, la bombe HN retournera en N & la bombe R en O, & comme les vitesses TN, MO qui n'ont point choqué agissent toujours; si je prolonge HN en 2, RO en 3, & que je mene les tangentes T2, M3, il est visible que H prendra une direction H*h* égale & parallele à T2, & R une direction R*r* égale & parallele à M3, & qu'ainsi H, à cause de sa pesanteur décrira un arc égal parallele & semblable à l'arc de parabole qui est la continuation de l'arc B2, & qui seroit décrit dans un tems égal à T2, & que R décriroit un arc de parabole égal parallele & semblable à l'arc qui est la continuation de E3, & qui seroit décrit dans un tems égal à M3.

Si les Masses H, R ne sont pas reciproques aux vitesses, les forces des deux bombes seront inégales, & il pourra se faire que la force de H soit plus grande ou moindre que celle de R selon que le rapport des vitesses NH, RO variera; supposons que la force de H soit plus grande, & nommons la masse de H = M, celle de R = *m*, la vitesse NH = V & RO = *u*, je ne divise point les vitesses NH, RO, ni TN, MO par leurs tems, à cause que nous voulons savoir les vitesses après le choc dans des tems égaux aux tems employés par les bombes à descendre en H & R avant le choc.

La vitesse de H après le choc sera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ laquelle sera négative si MV est moindre que $mV + 2mu$, & celle de R sera $\frac{2MV + Mu - mu}{M+m}$ & comme les directions TN ou *t*H, MO ou *m*R agissent toujours, le corps H prendra une direction composée de $\frac{MV - mV - 2mu}{M+m}$ & de *t*H; ainsi si la vitesse de H après le choc est négative prenant sur H2 la partie H*x* = $\frac{2mu + mV - MV}{M+m}$, & menant la diagonale *xt*, le corps suivroit une direction H*h* parallele & égale à *xt*, c'est pourquoi comme en reduisant la force uniforme & verticale *t*H en une force accelerée capable de donner à la fin du même tems une force acquise égale à la force *t*H, le corps H supposé qu'il eût été mû avant le choc par les deux forces H*x* & *t*H rendue accelerée, auroit parcouru l'arc de parabole

$x4$, & qu'en ce cas la bombe pouſſée par Hx ou 48 ſe ſeroit abbaiſſée en vertu de la peſanteur de la quantité 4H, il s'enſuit que ſi elle avoit été pouſſée par la force xt qui auroit agi dans un tems égal à celui de la force 2H, la peſanteur l'auroit abaiſſée d'une quantité $t4$ = 4H, & par conſéquent ſi elle avoit été pouſſée avec la même force xt dans un ſens oppoſé de x en y, ſa peſanteur l'auroit abaiſſée dans un tems égal d'une quantité égale à $t4$; donc elle auroit parcouru un arc de parabole qui auroit été la continuation de la parabole $4x$, donc H en ſuivant la direction Hh égale & parallele à xy, décrira en vertu de ſa peſanteur un arc de parabole égal, parallele & ſemblable à l'arc qu'elle auroit décrit en ſuivant la direction xy.

Si la force de H après le choc étoit poſitive on prendroit ſur HO une partie égale à $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$, & achevant le reſte comme auparavant, le corps H prendroit une direction qui tourneroit du côté de C, & l'on détermineroit l'arc de parabole qu'elle devroit décrire comme il vient d'être dit; on trouvera de la même façon ce qui doit arriver à R après le choc.

Fin du premier Livre.




PHISI
CA

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 34.

Fig. 35.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 40.

Fig. 41.

Fig. 43.

Fig. 44.

Fig. 46.

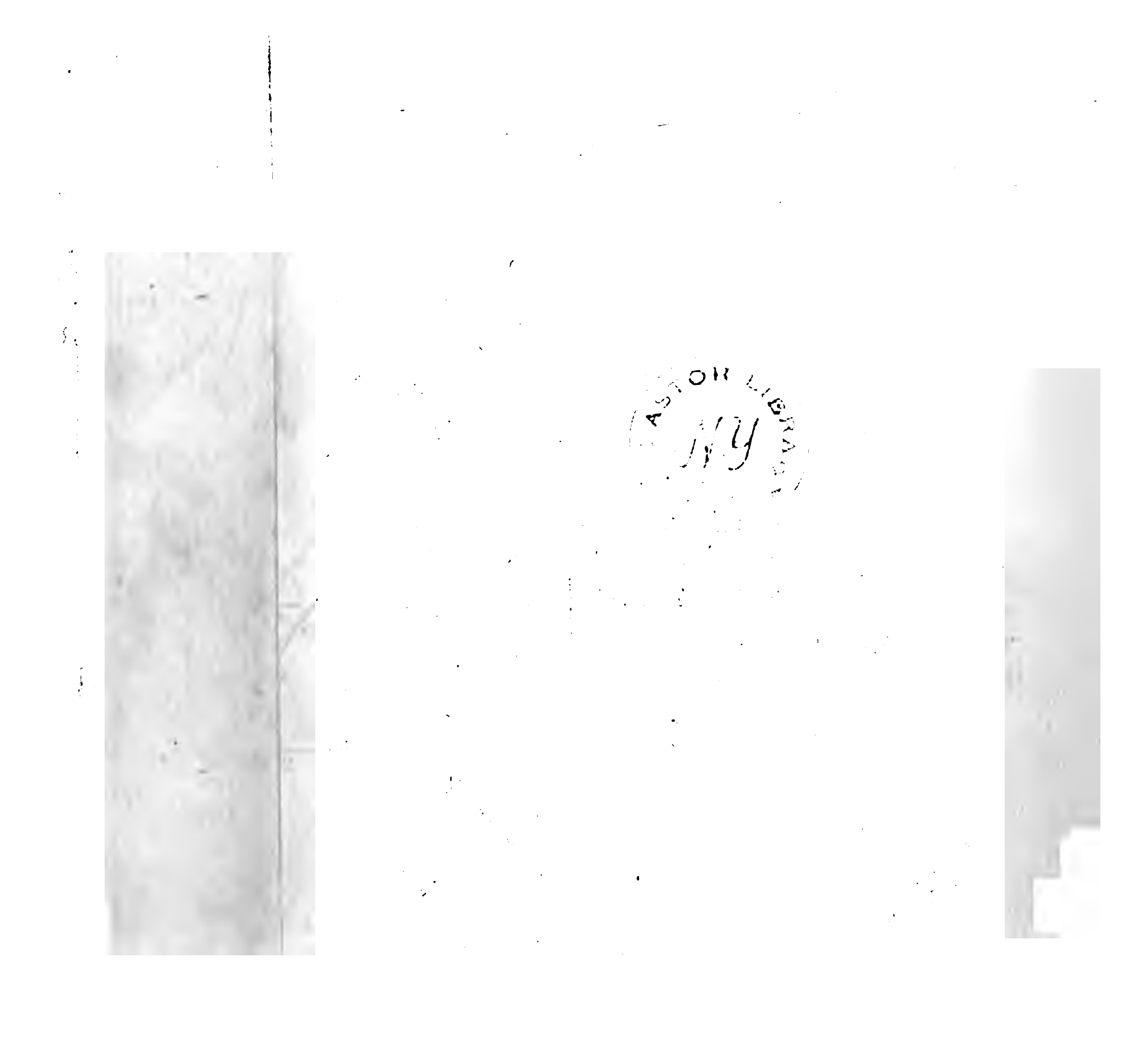
Fig. 47.

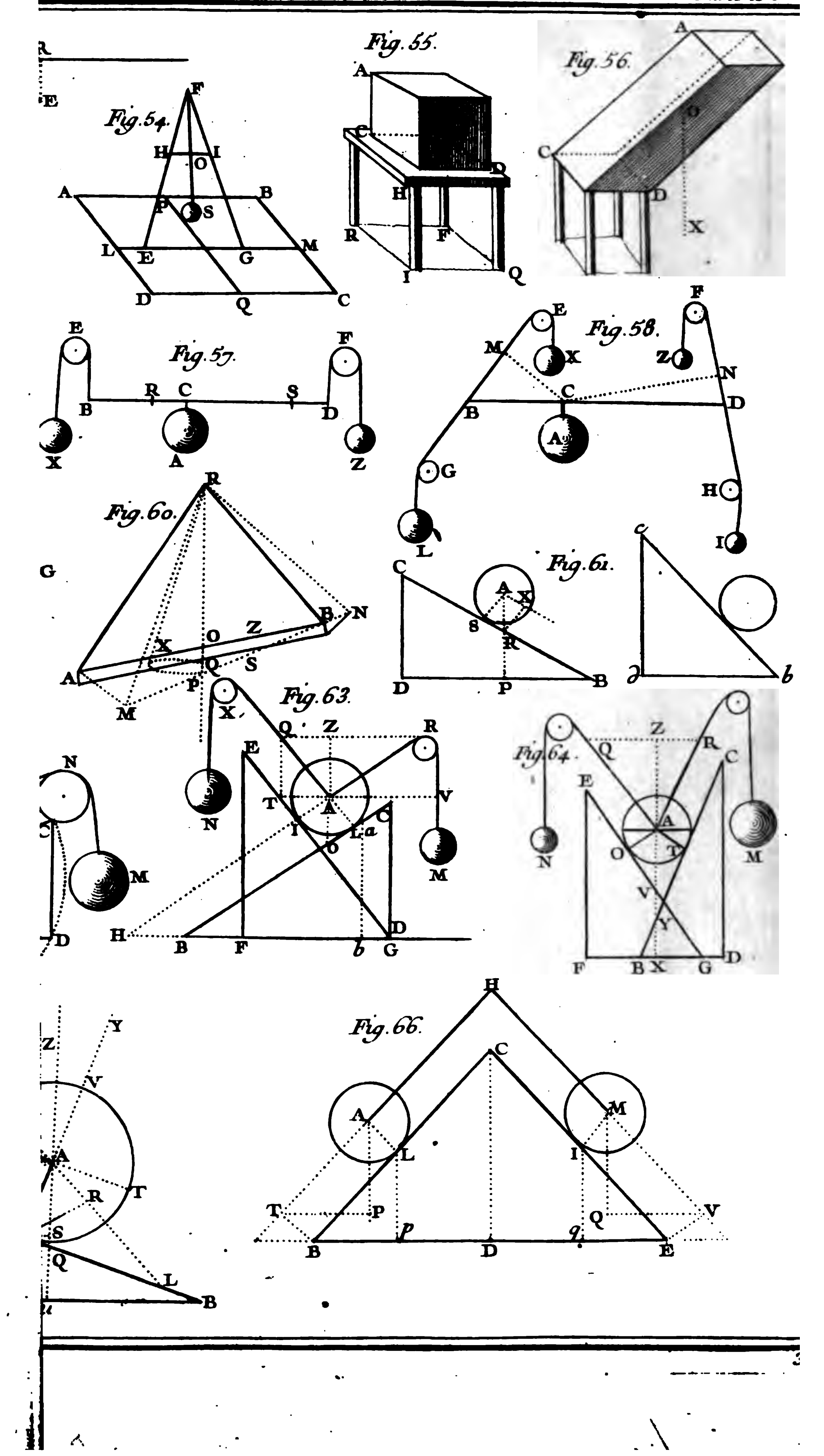
Fig. 48.

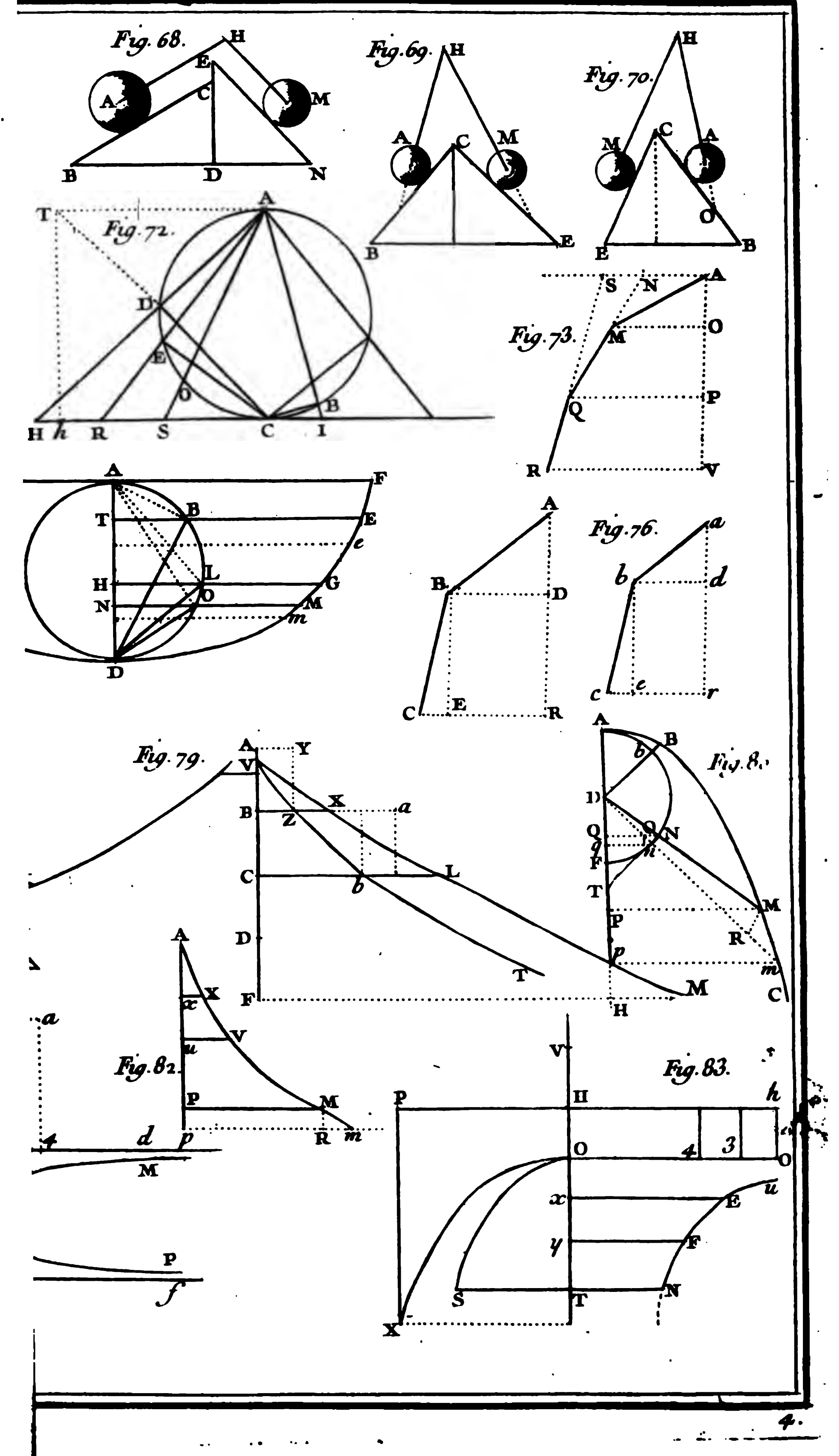
Fig. 50.

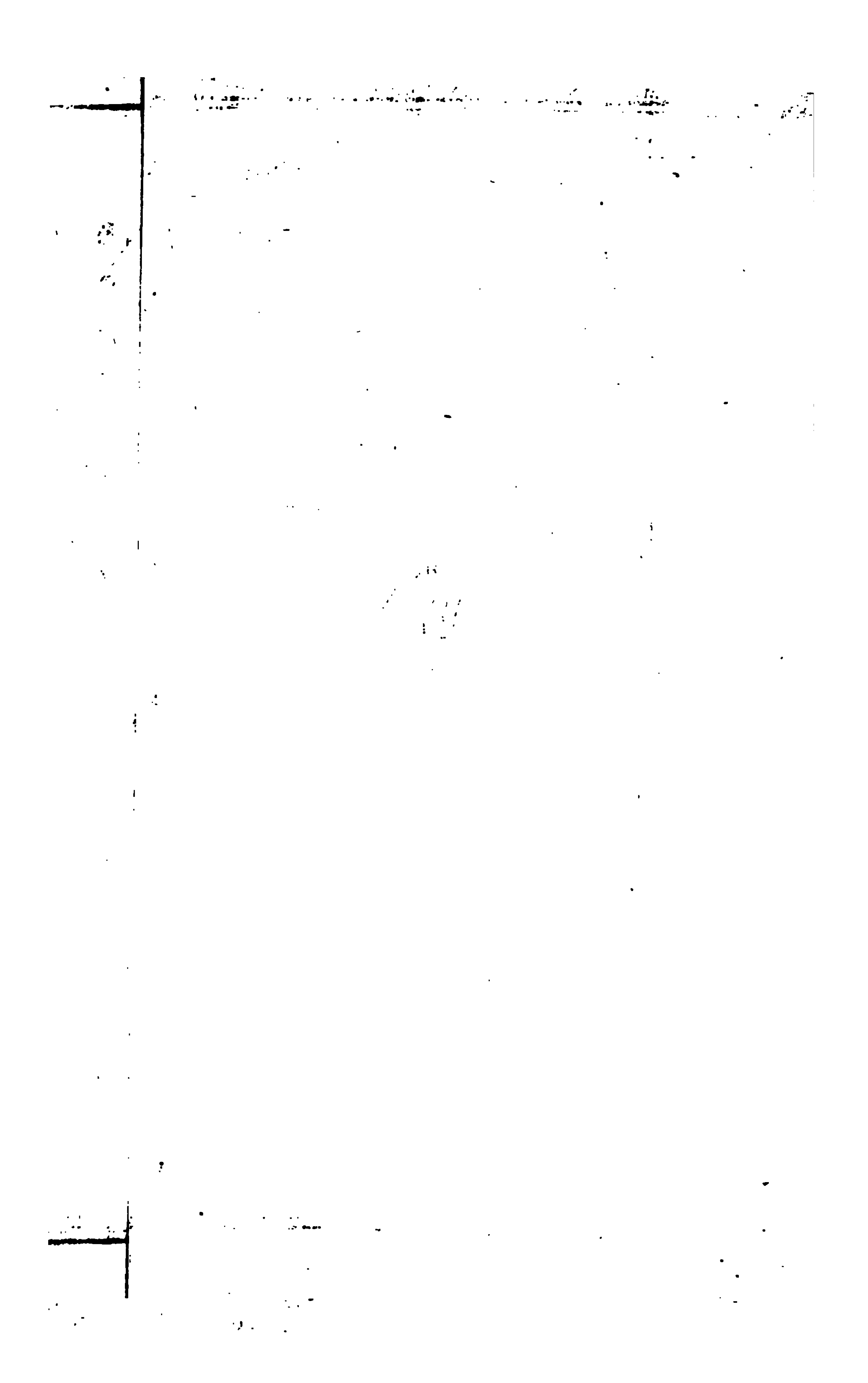
Fig. 51.

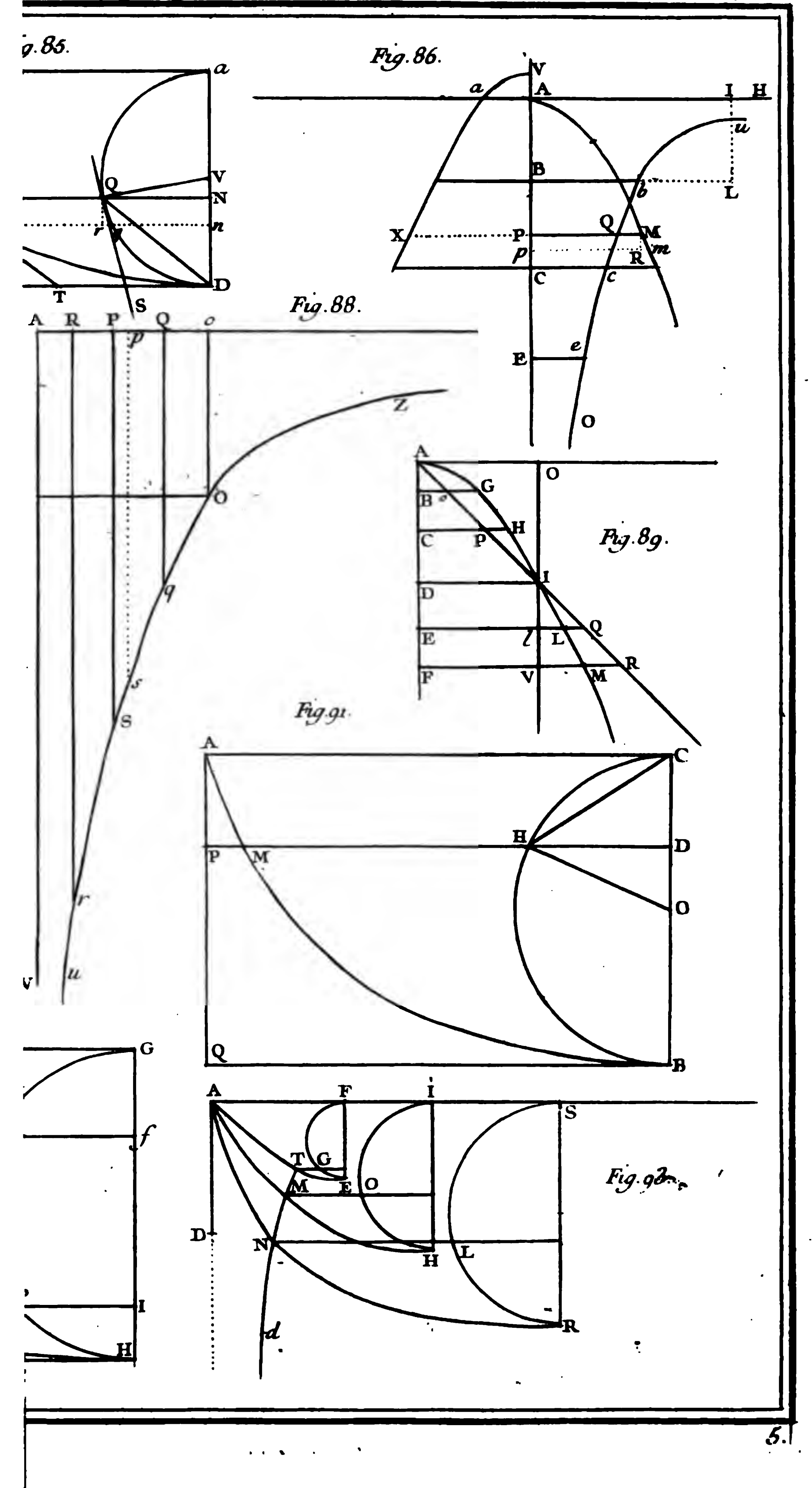
Fig. 52.


ASTOR LIBRARY
NY


Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 66.


Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 76.
Fig. 79.
Fig. 8.
Fig. 82.
Fig. 83.




Fig. 85.
a
Q
V
N
r
n
T
D
S
Fig. 86.
V
a
A
I
H
u
B
b
L
X
P
Q
M
p
m
R
C
c
E
e
O
Fig. 88.
A
R
P
Q
o
p
Z
O
q
s
S
r
u
V
Fig. 89.
G
B
H
C
I
D
E
l
L
F
V
M
Fig. 91.
H
D
M
Q
B
G
f
I
Fig. 92.
F
T
E
d



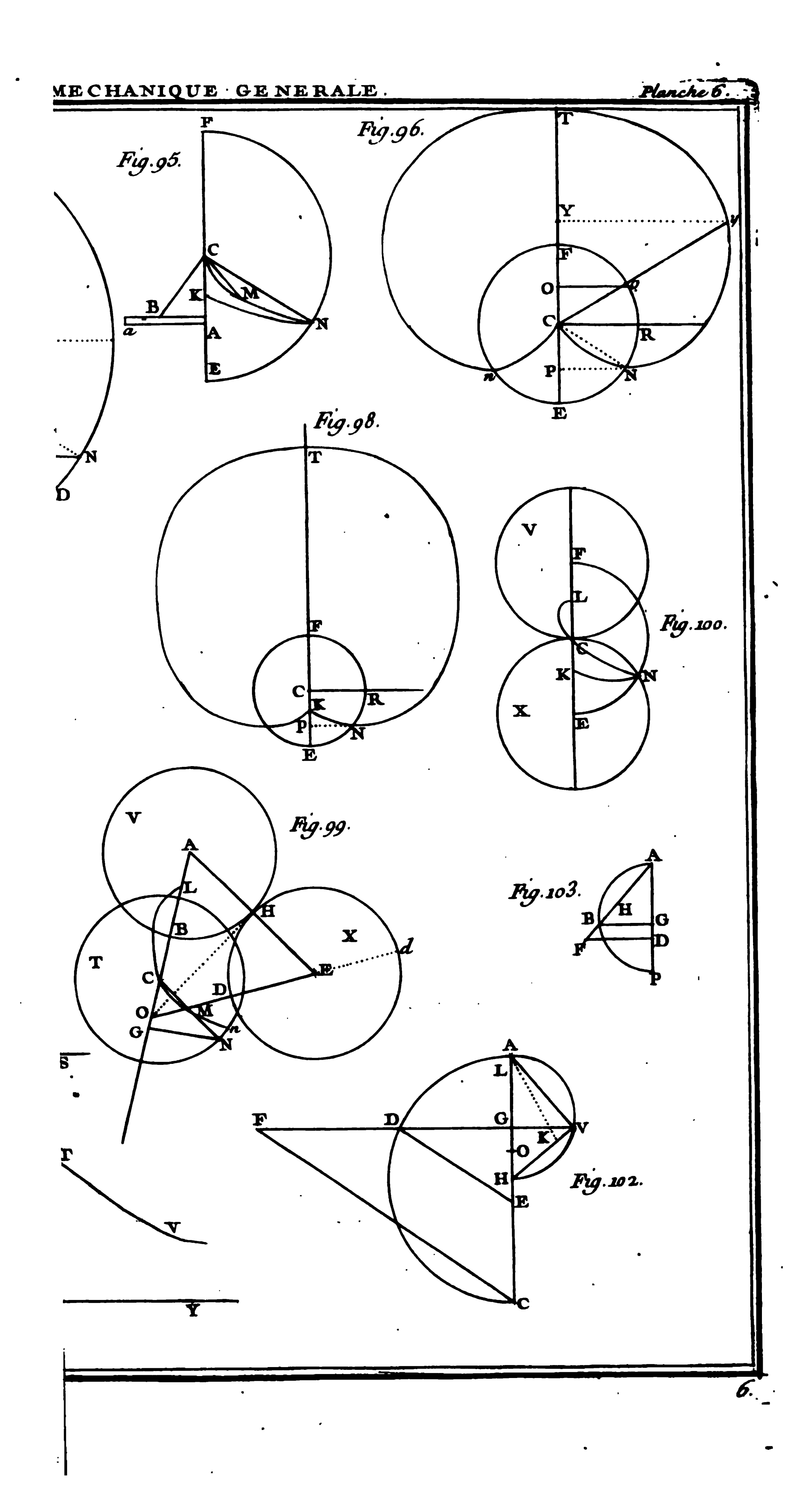


Fig. 95.
F
C
K
M
B
a
A
N
E
N
D
Fig. 96.
T
Y
y
F
O
Q
C
R
P
N
n
E
Fig. 98.
T
F
C
R
K
P
N
E
V
F
L
Fig. 100.
C
K
N
X
E
Fig. 99.
V
A
L
H
B
X
d
T
E
C
D
O
M
G
n
N
S
Fig. 103.
A
B
H
G
F
D
P
A
L
F
D
G
V
O
K
H
Fig. 102.
E
C
T
V
Y

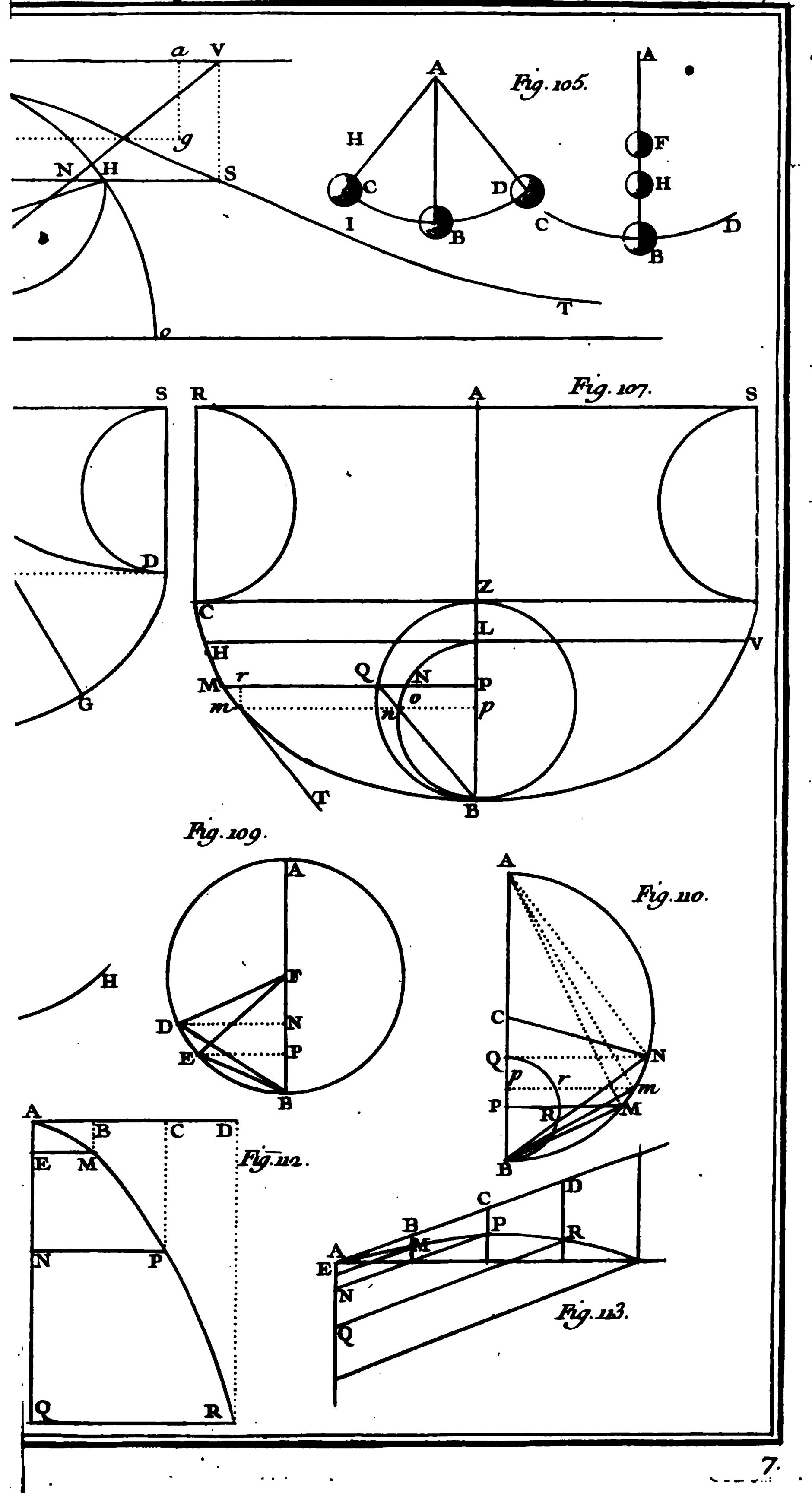

Fig. 105.
Fig. 107.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 112.
Fig. 113.

Fig. 115.

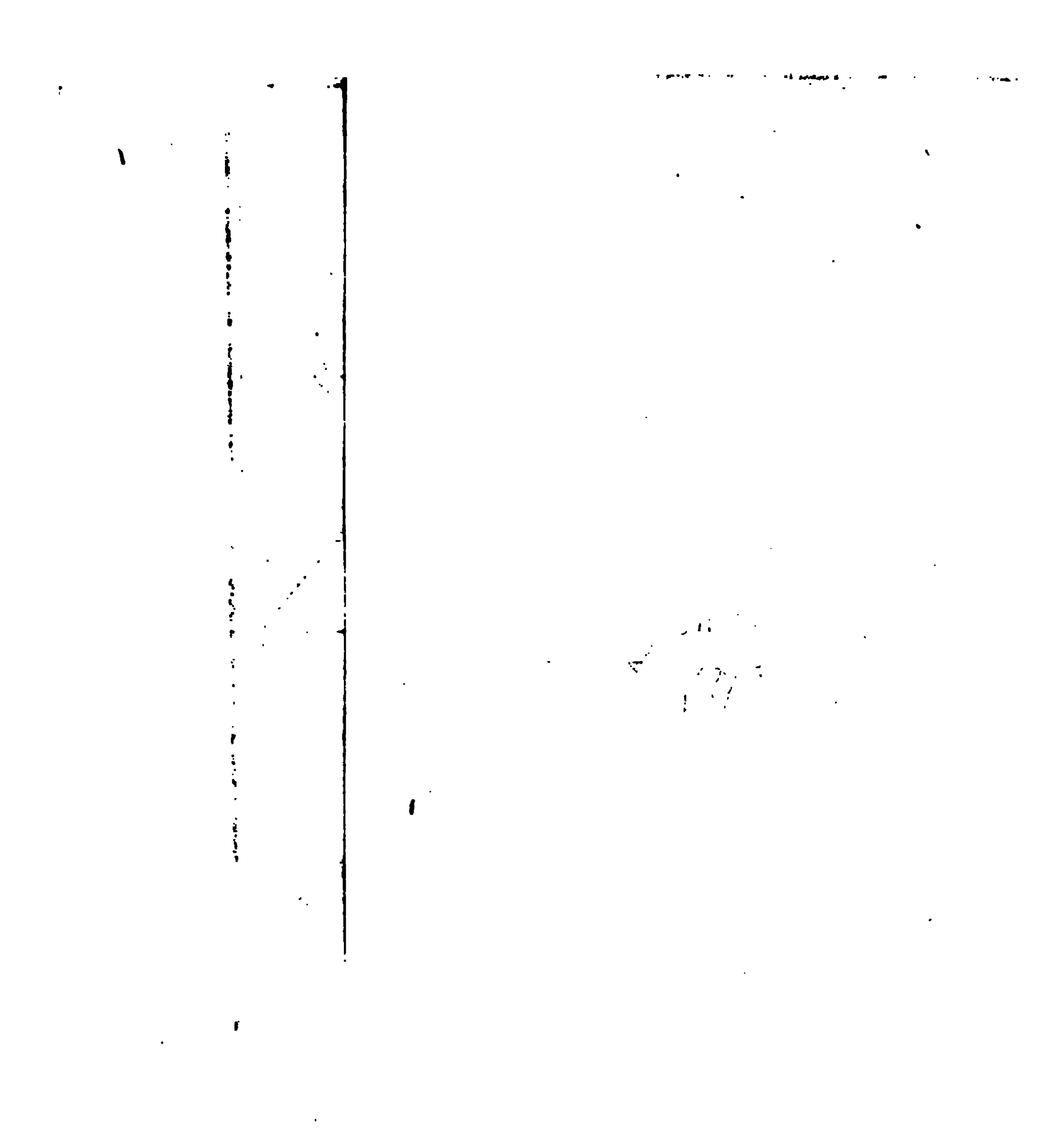
Fig. 116.

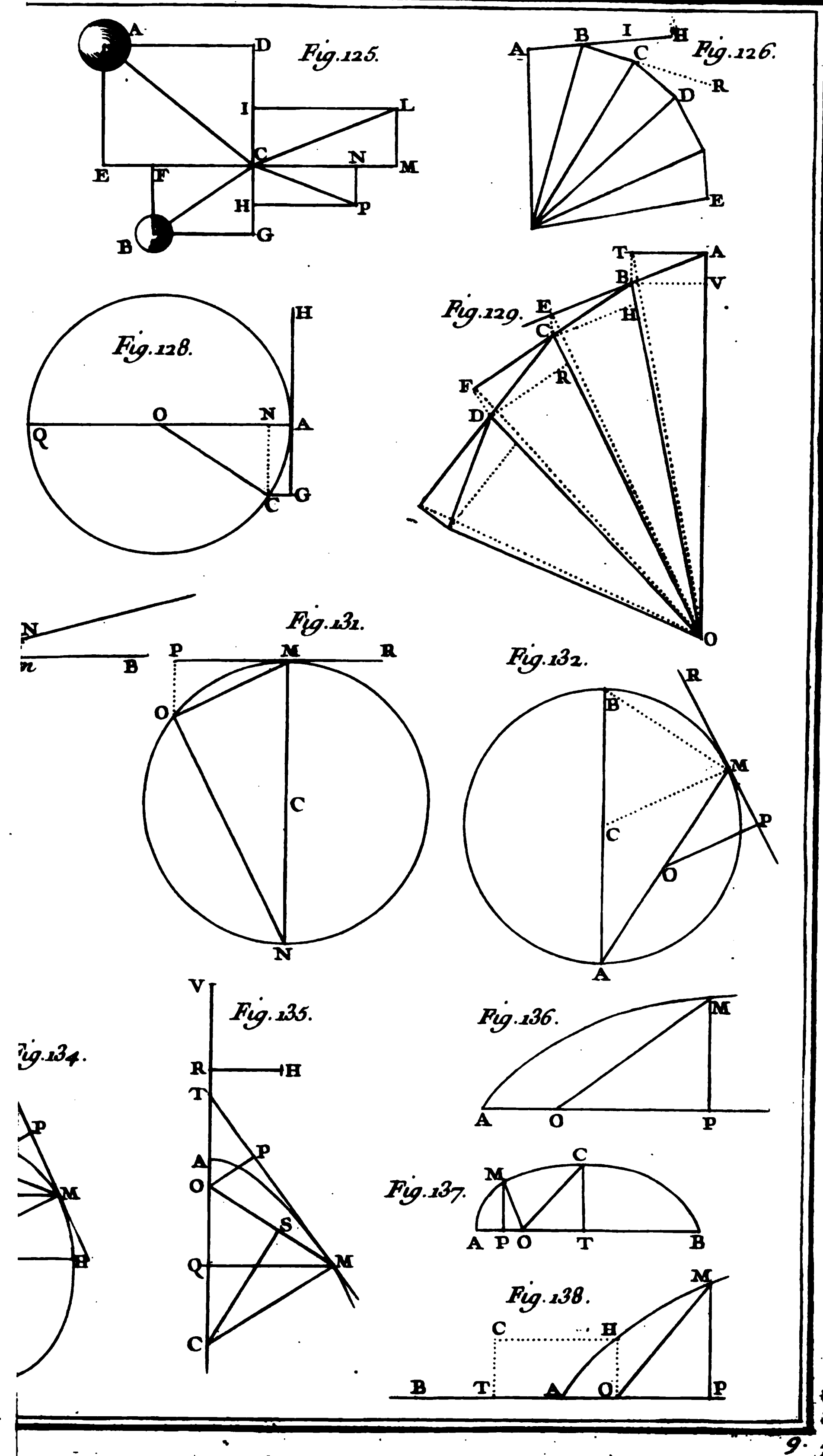
Fig. 119.

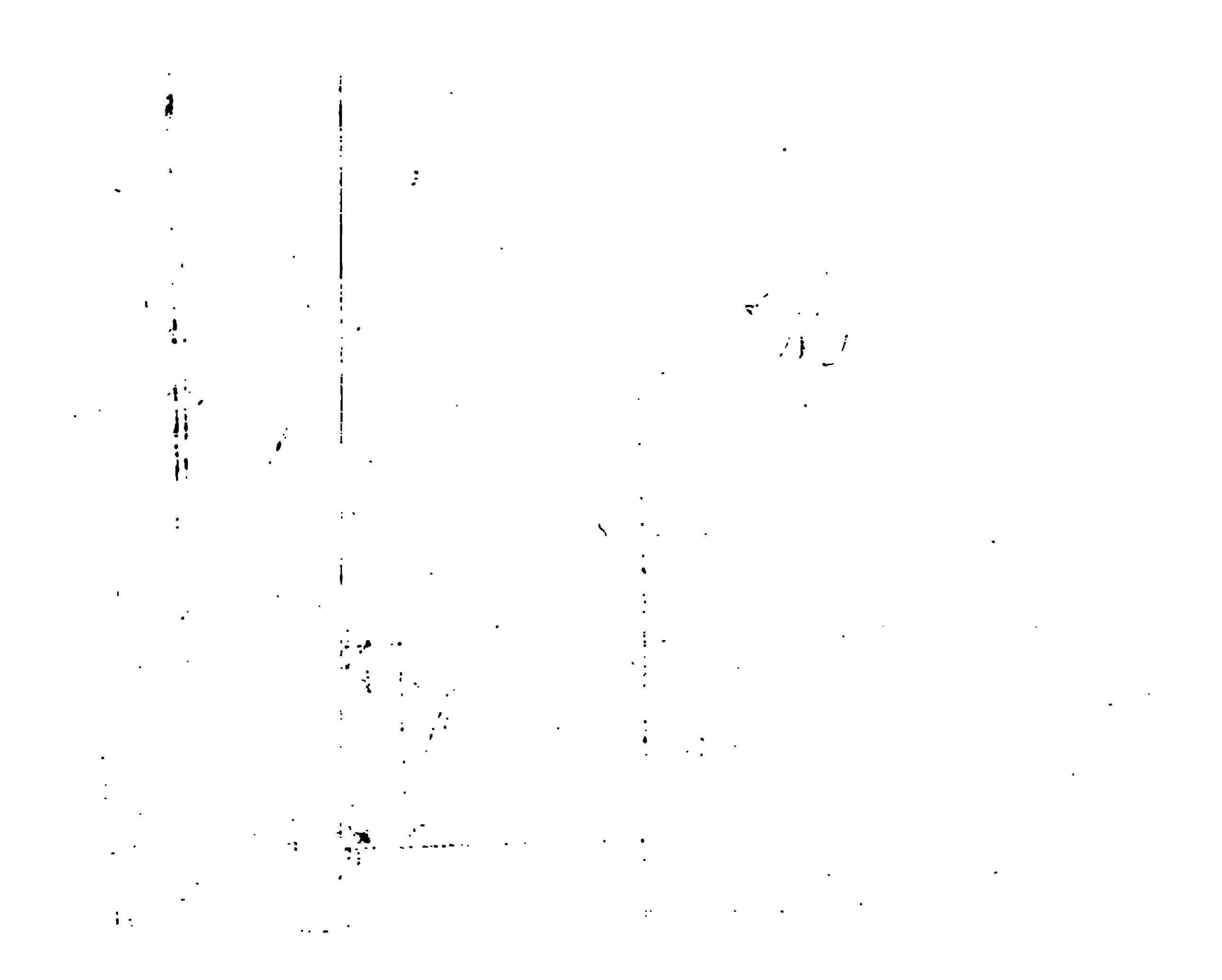
Fig. 120.

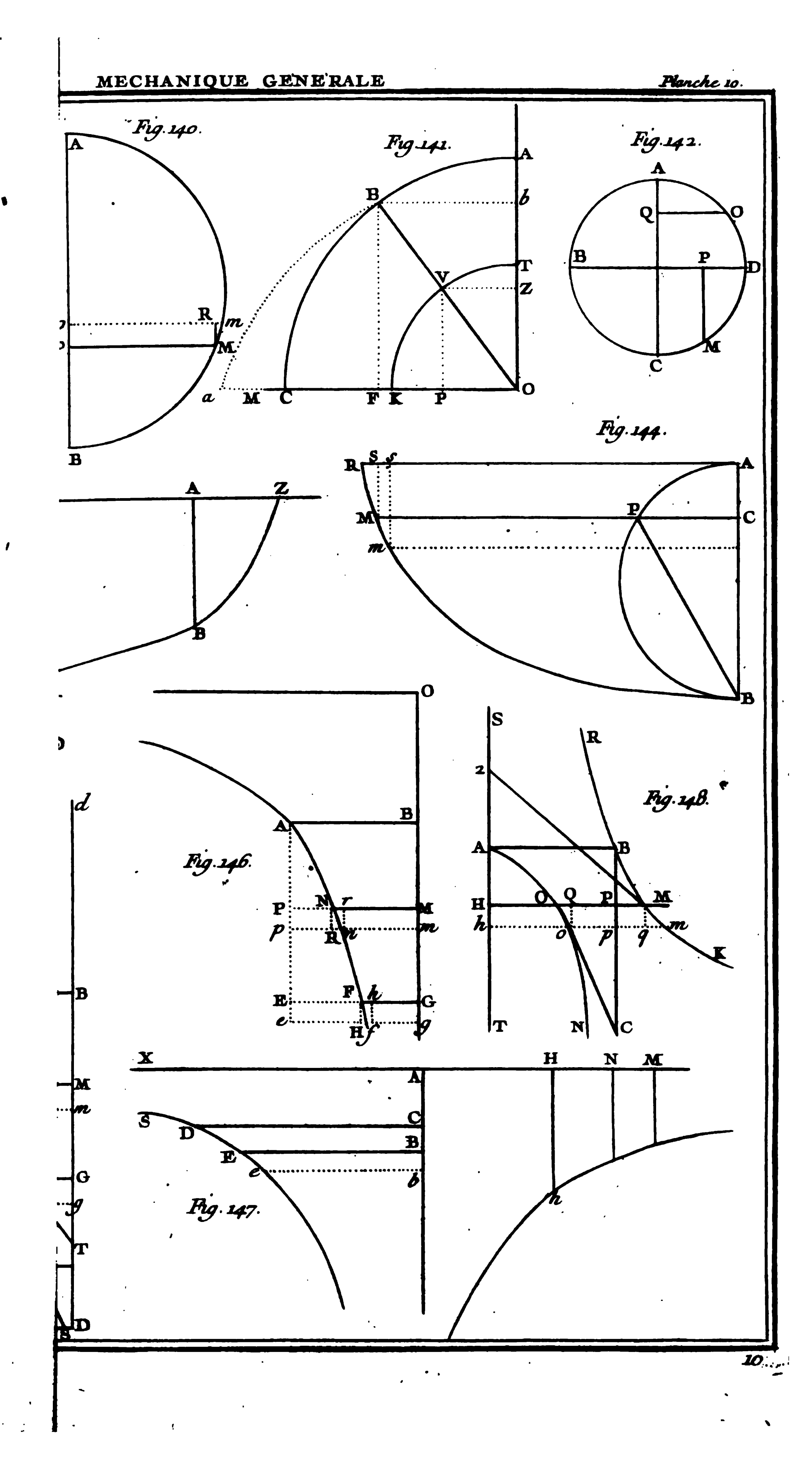
Fig. 122.

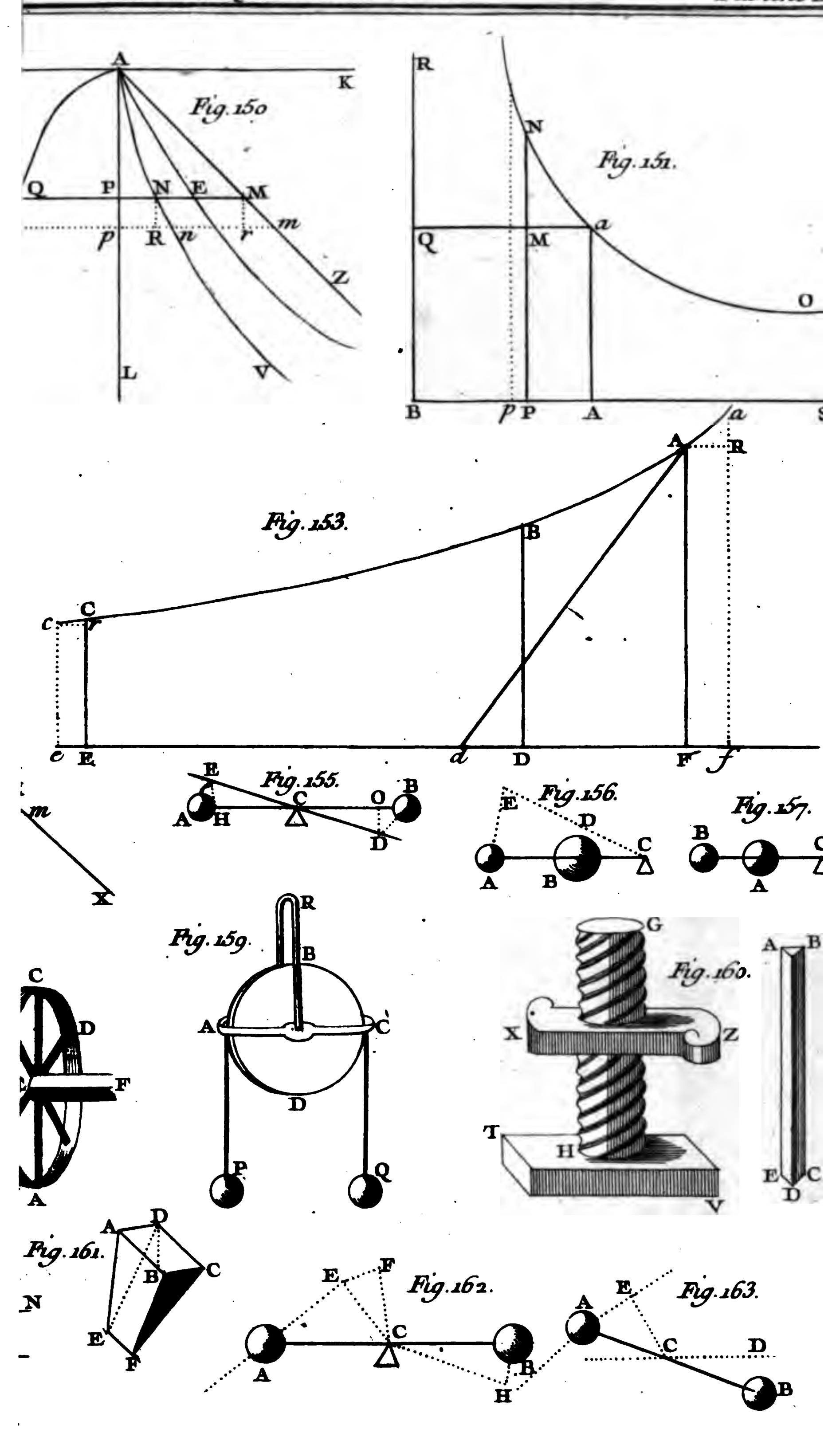
Fig. 123.



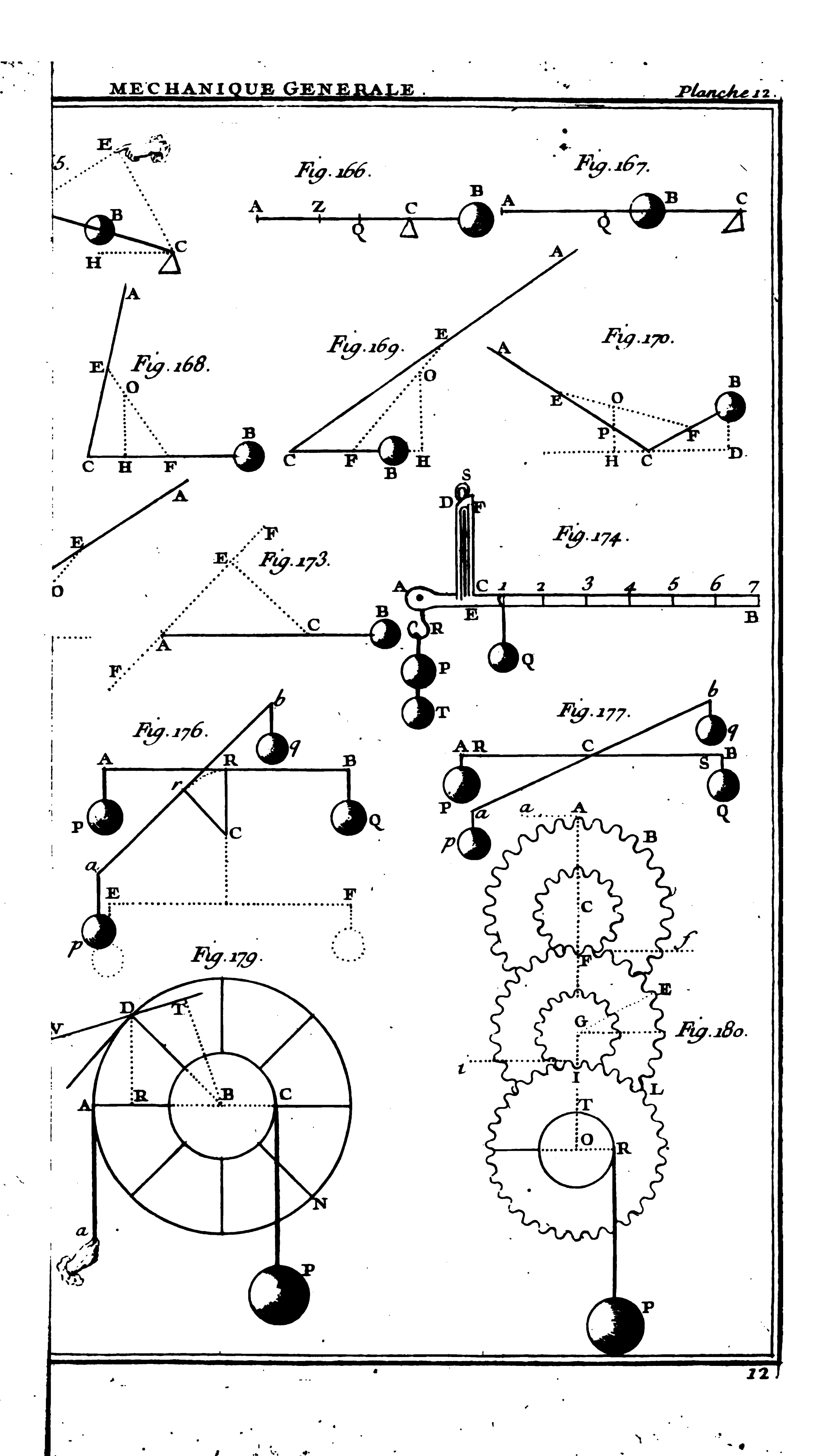

Fig. 125.
A
D
I
L
C
N
M
E
F
H
P
B
G
Fig. 126.
A
B
I
H
C
R
D
E
Fig. 128.
H
O
N
A
Q
C
G
Fig. 129.
T
A
B
V
E
H
C
F
R
D
O
N
n
B
Fig. 131.
P
M
R
O
C
N
Fig. 132.
R
B
M
C
P
O
A
Fig. 134.
P
M
H
Fig. 135.
V
R
H
T
A
P
O
S
Q
M
C
Fig. 136.
M
A
O
P
Fig. 137.
M
C
A
P
O
T
B
Fig. 138.
M
C
H
B
T
A
O
P




Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 144.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.


Fig. 150
Fig. 151.
Fig. 153.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.




Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 173.
Fig. 174.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 179.
Fig. 180.

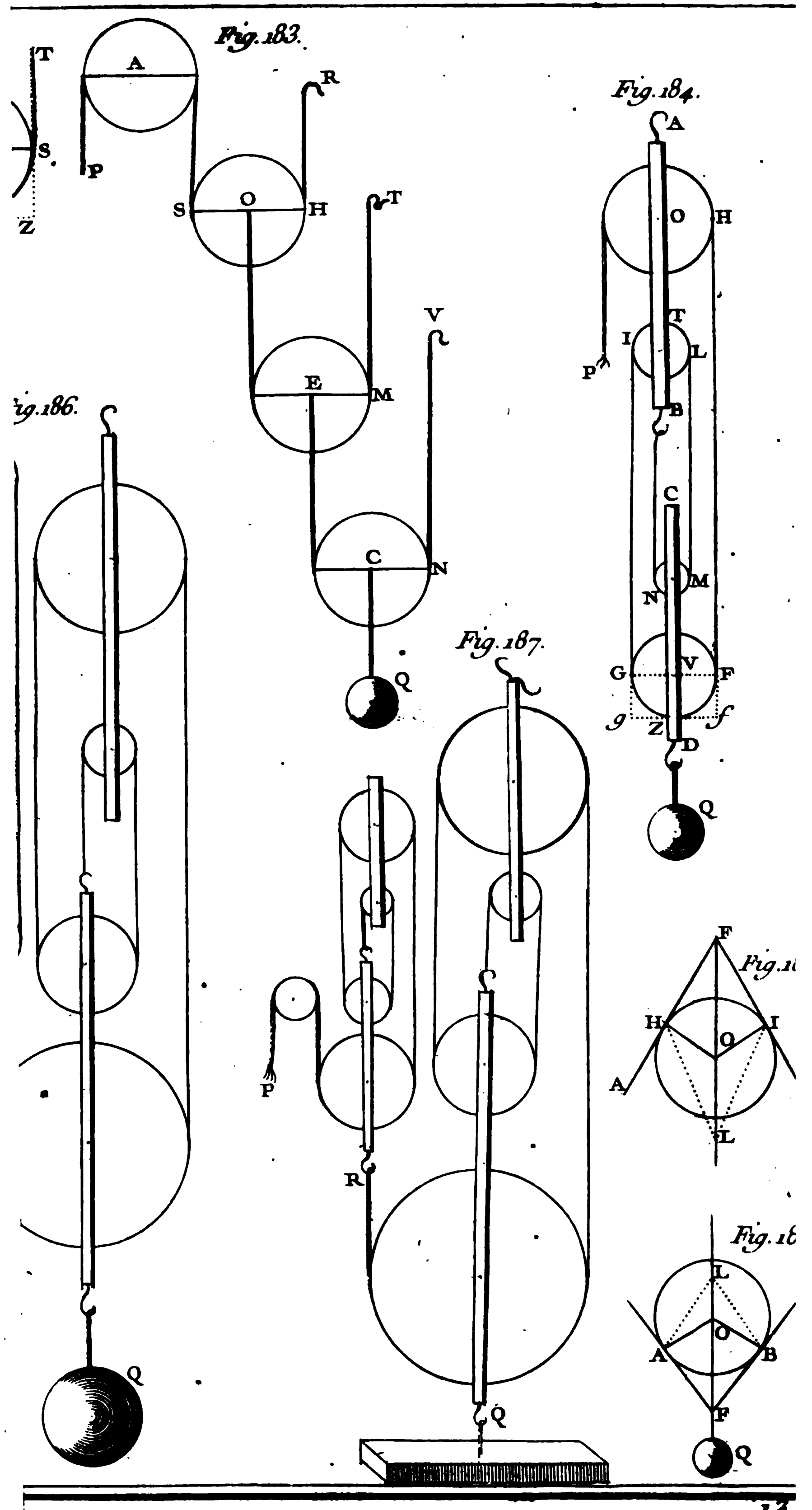
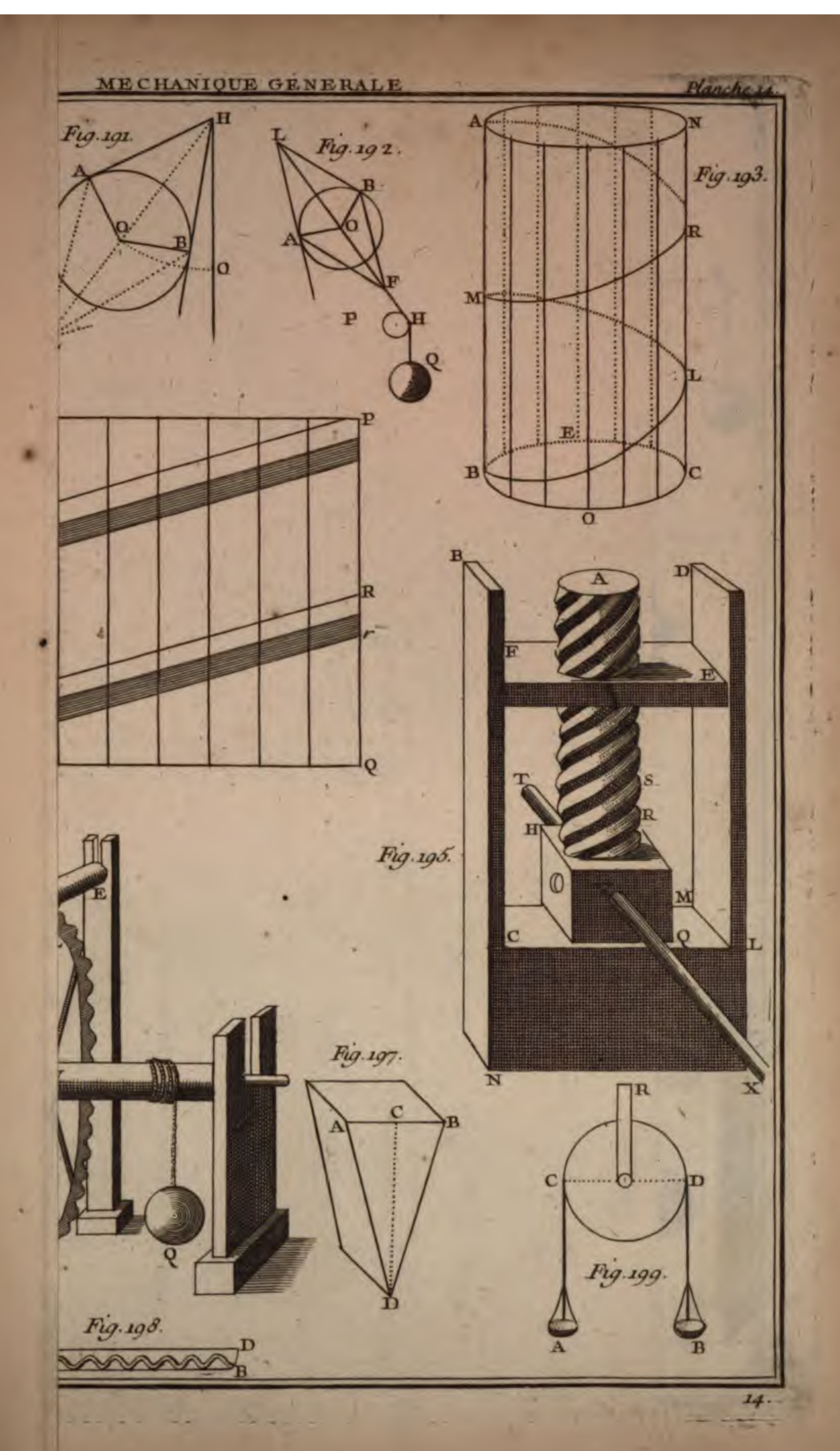
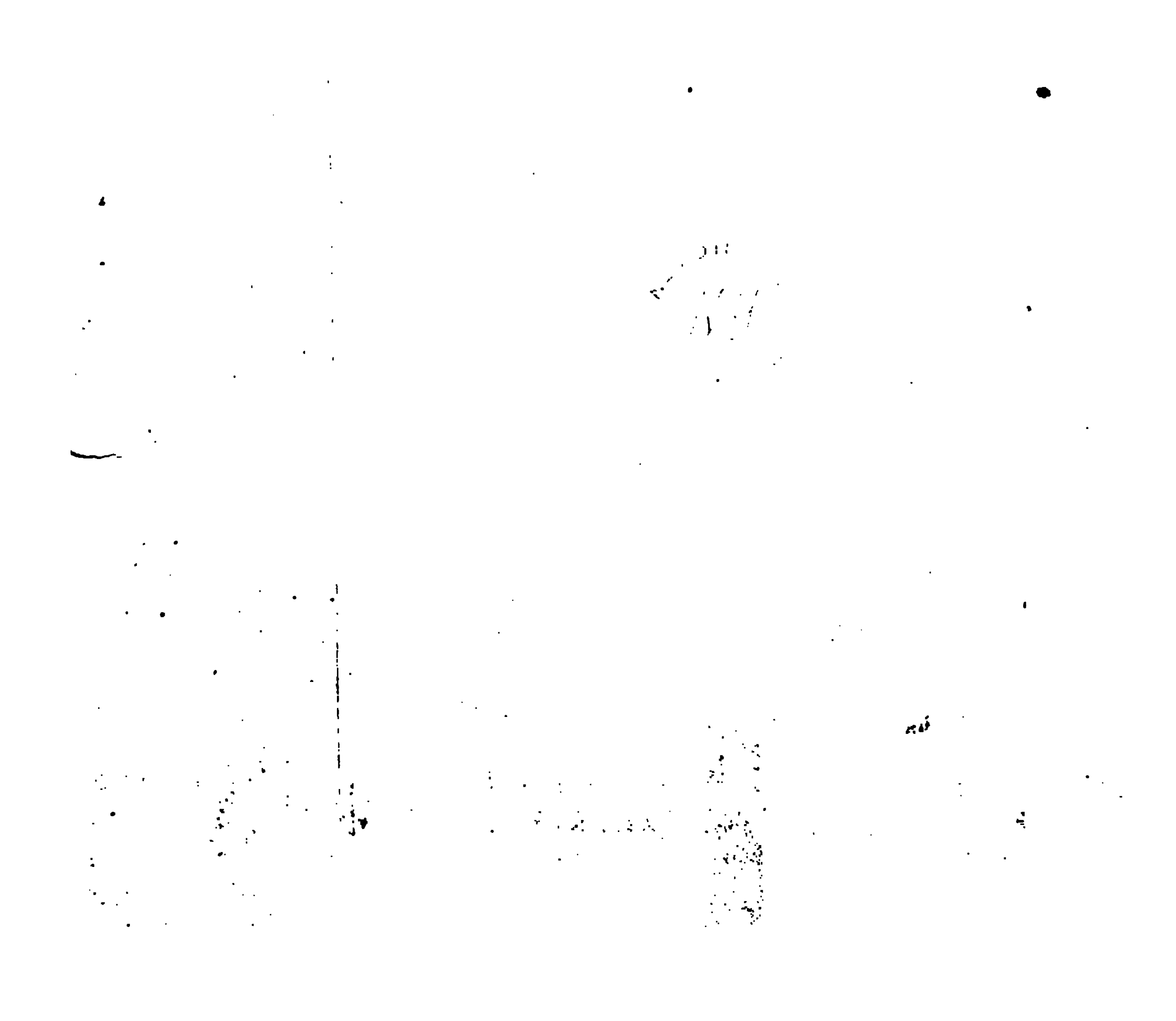
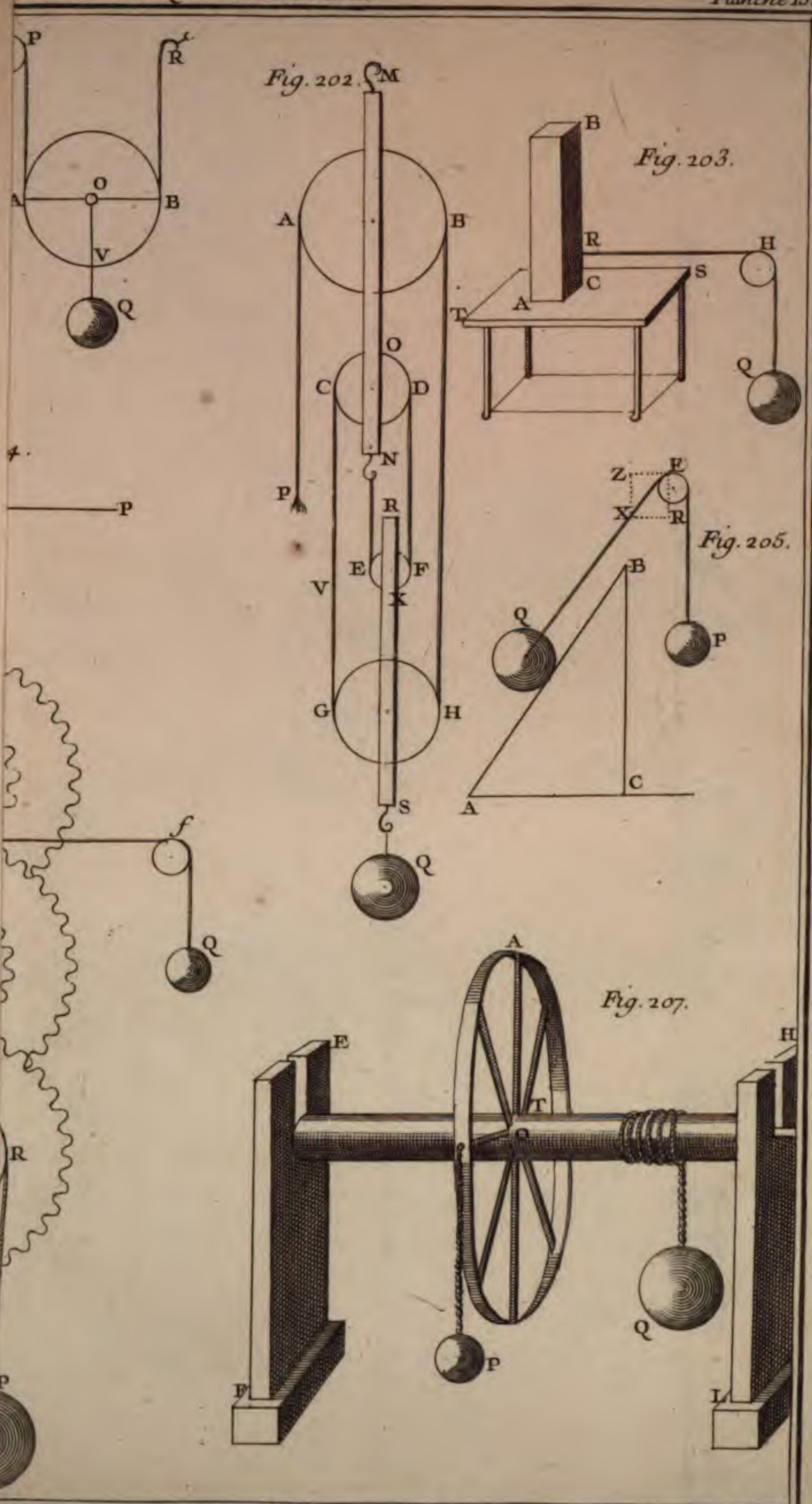


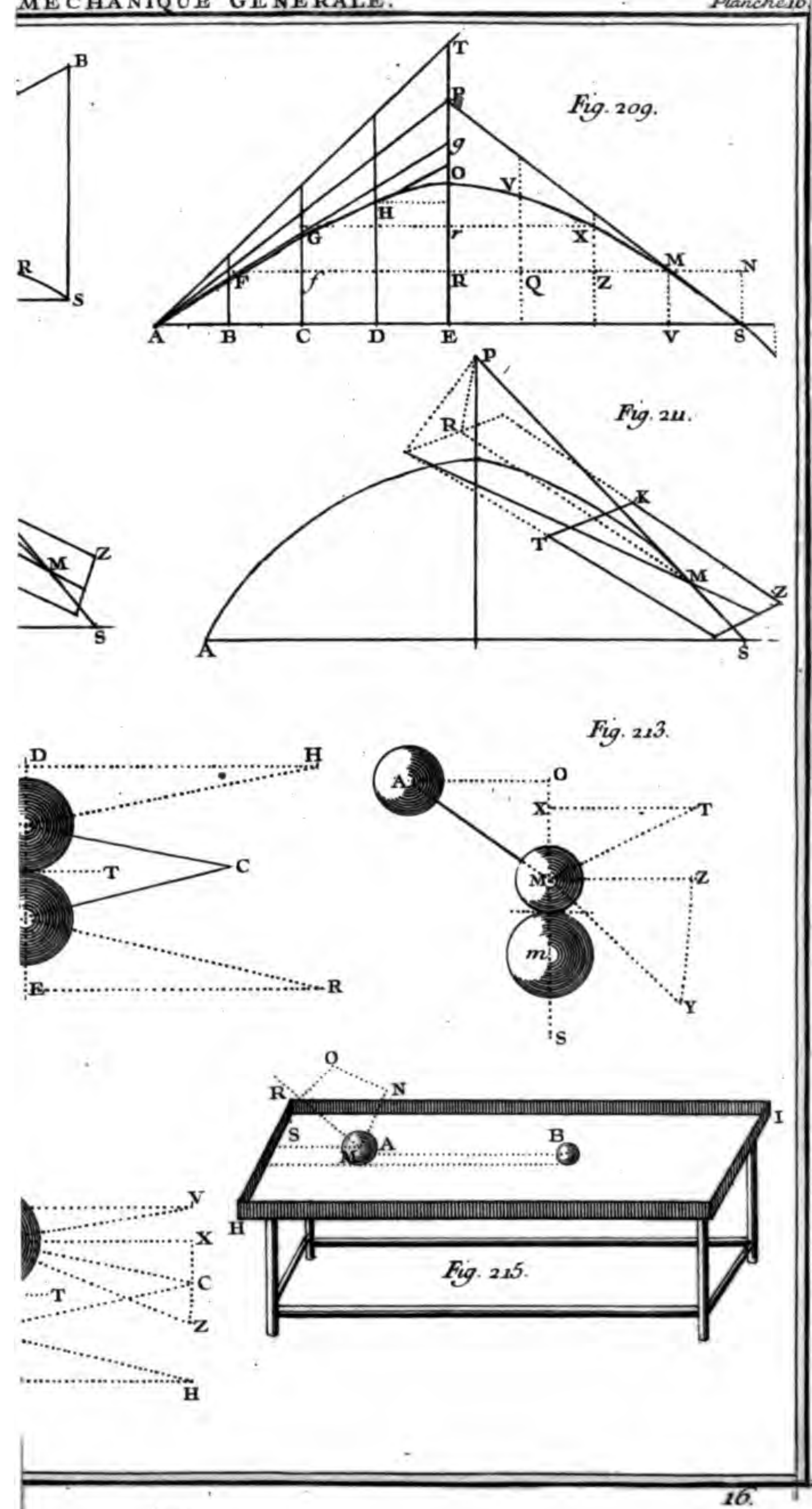
Fig. 183.
A
T
S.
Z
P
R
S
O
H
T
V
E
M
C
N
Q
Fig. 184.
A
O
H
T
I
L
P
B
C
M
N
G
V
F
g
Z
f
D
Q
ig. 186.
Q
Fig. 187.
P
R
Q
F
Fig. 1
H
O
I
A
L
Fig. 1
L
O
A
B
F
Q

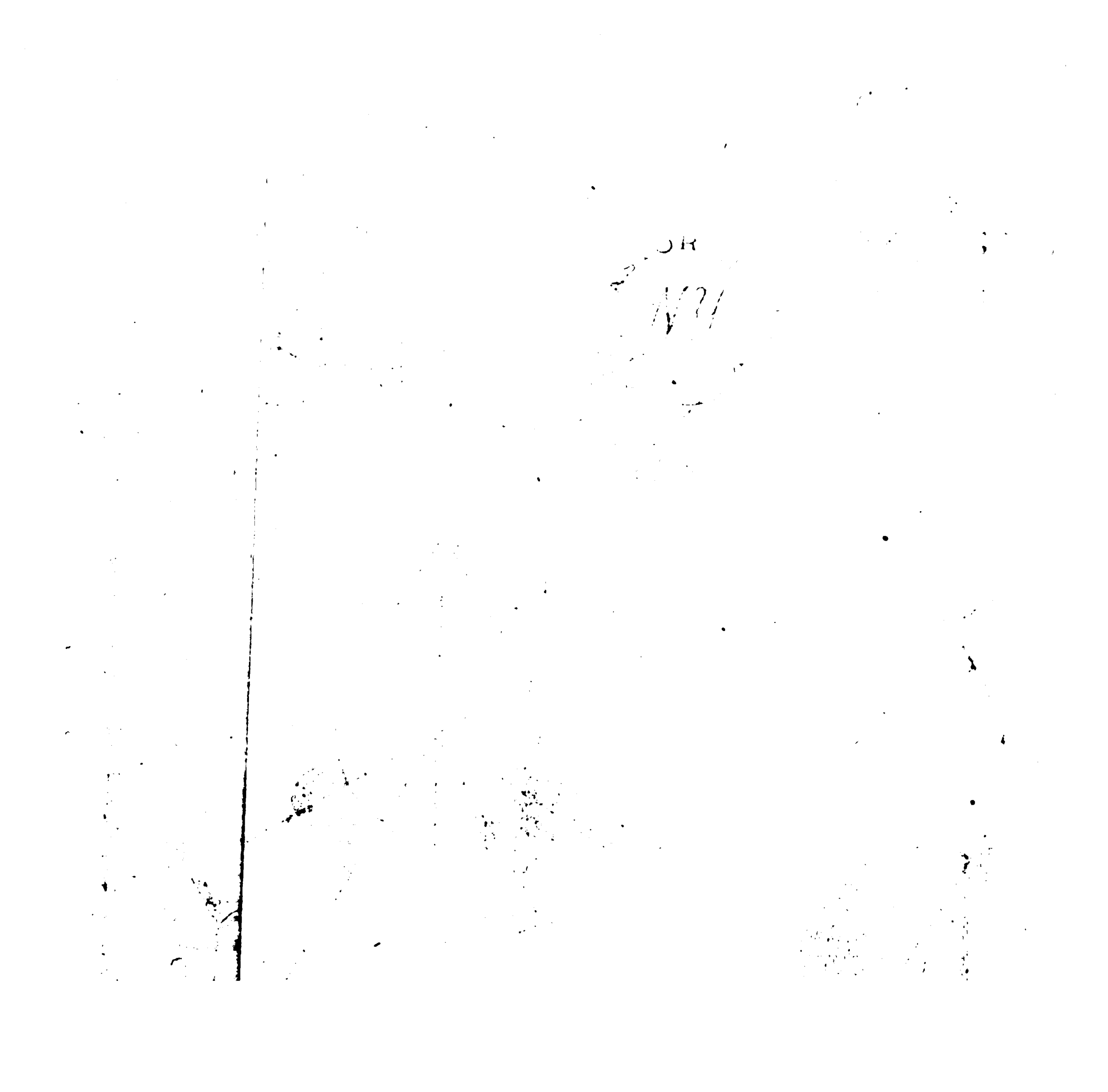

Fig. 191.
H
A
O
B
Q
L
Fig. 192.
B
O
A
F
P
H
Q
A
N
Fig. 193.
R
M
L
E
B
C
O
P
R
r
Q
Fig. 195.
B
D
A
F
E
T
S
R
H
M
C
Q
L
N
X
E
Q
Fig. 197.
A
C
B
D
Fig. 198.
D
B
R
C
D
Fig. 199.
A
B

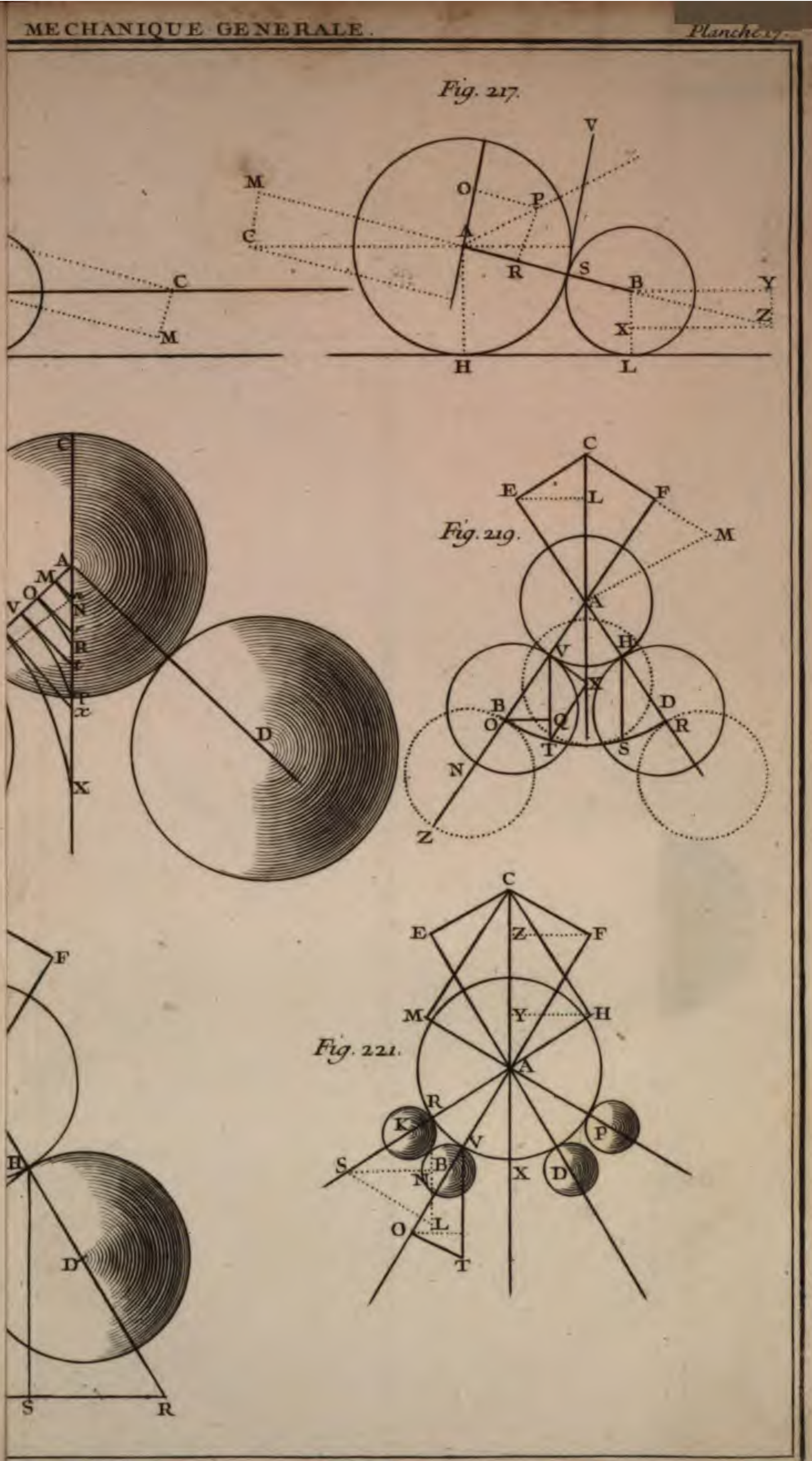



Fig. 202.
M
A
B
O
C
D
N
P
R
E
F
V
X
G
H
S
Q
T
Fig. 203.
B
R
H
C
S
A
Q
Z
E
X
R
Fig. 205.
B
Q
P
C
A
Fig. 207.
A
E
H
T
O
P
Q
F
L
P
R
O
V
Q
f
R

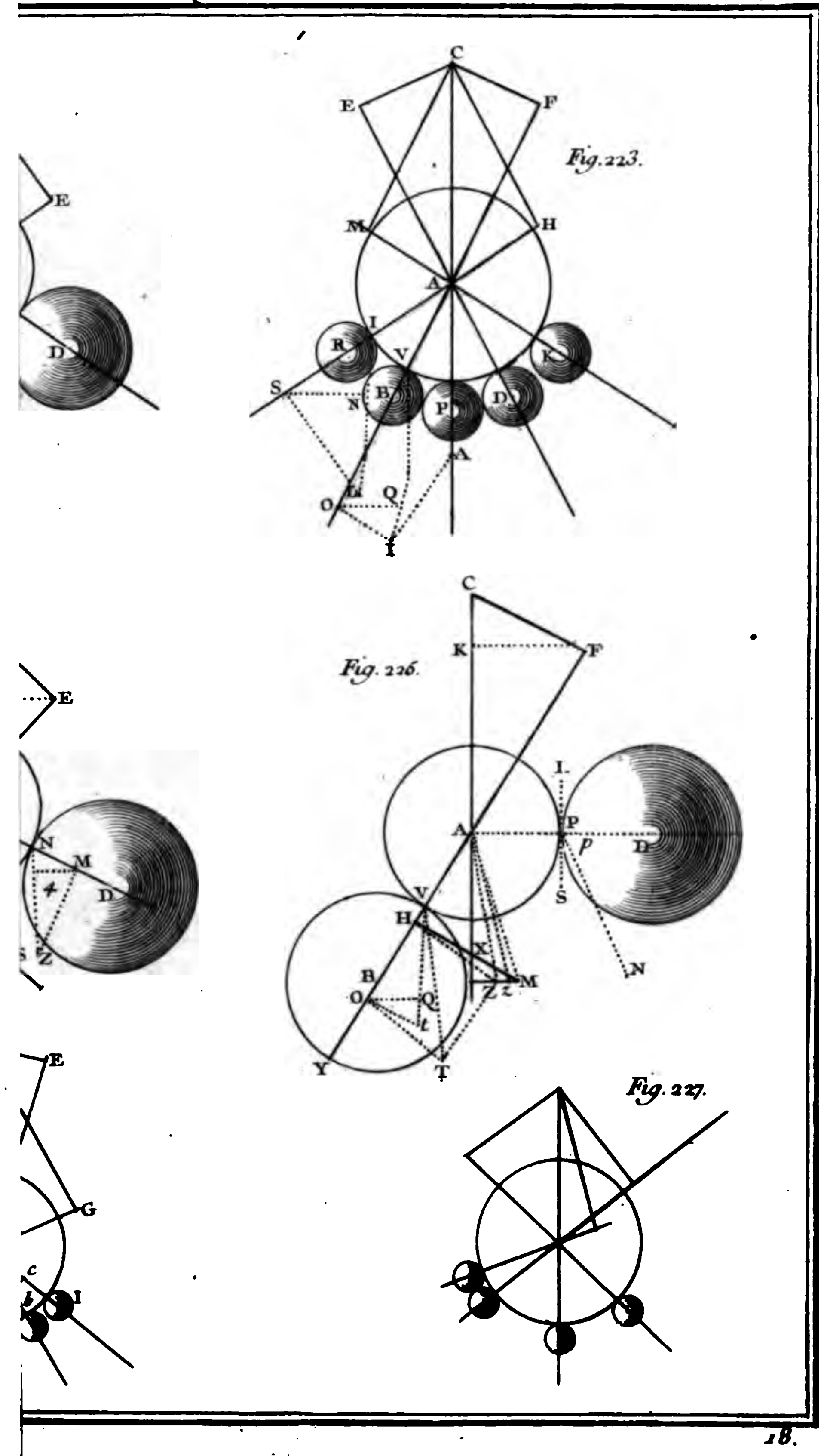



Fig. 209.
T
P
g
O
V
H
G
r
X
M
N
F
f
R
Q
Z
A
B
C
D
E
V
S
Fig. 211.
P
R
K
T
M
Z
A
S
Fig. 213.
A
O
X
T
M
Z
m
Y
S
O
R
N
S
A
M
B
I
H
Fig. 215.
B
R
S
M
Z
S
D
H
T
C
E
R
V
X
C
T
Z
H

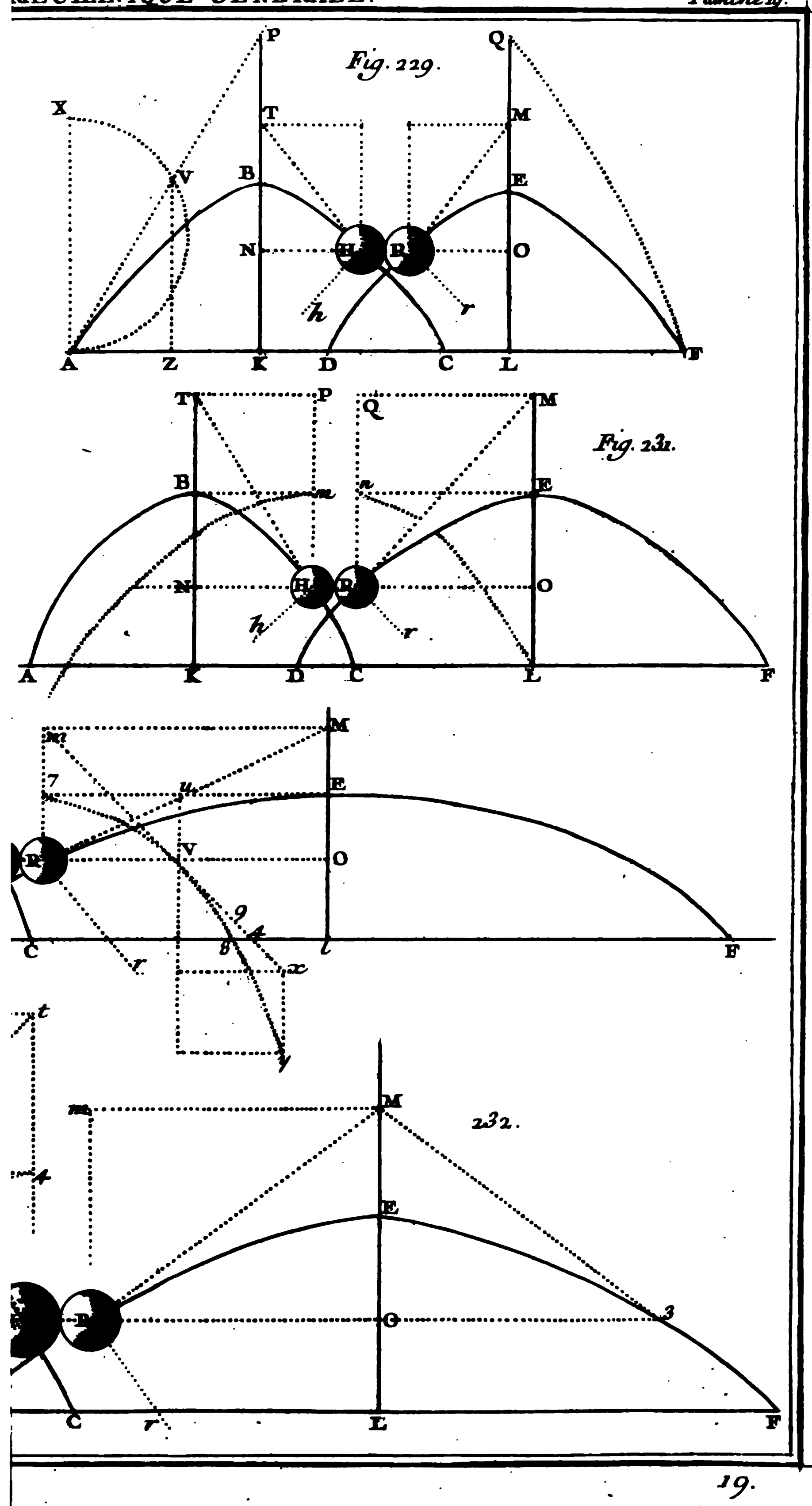


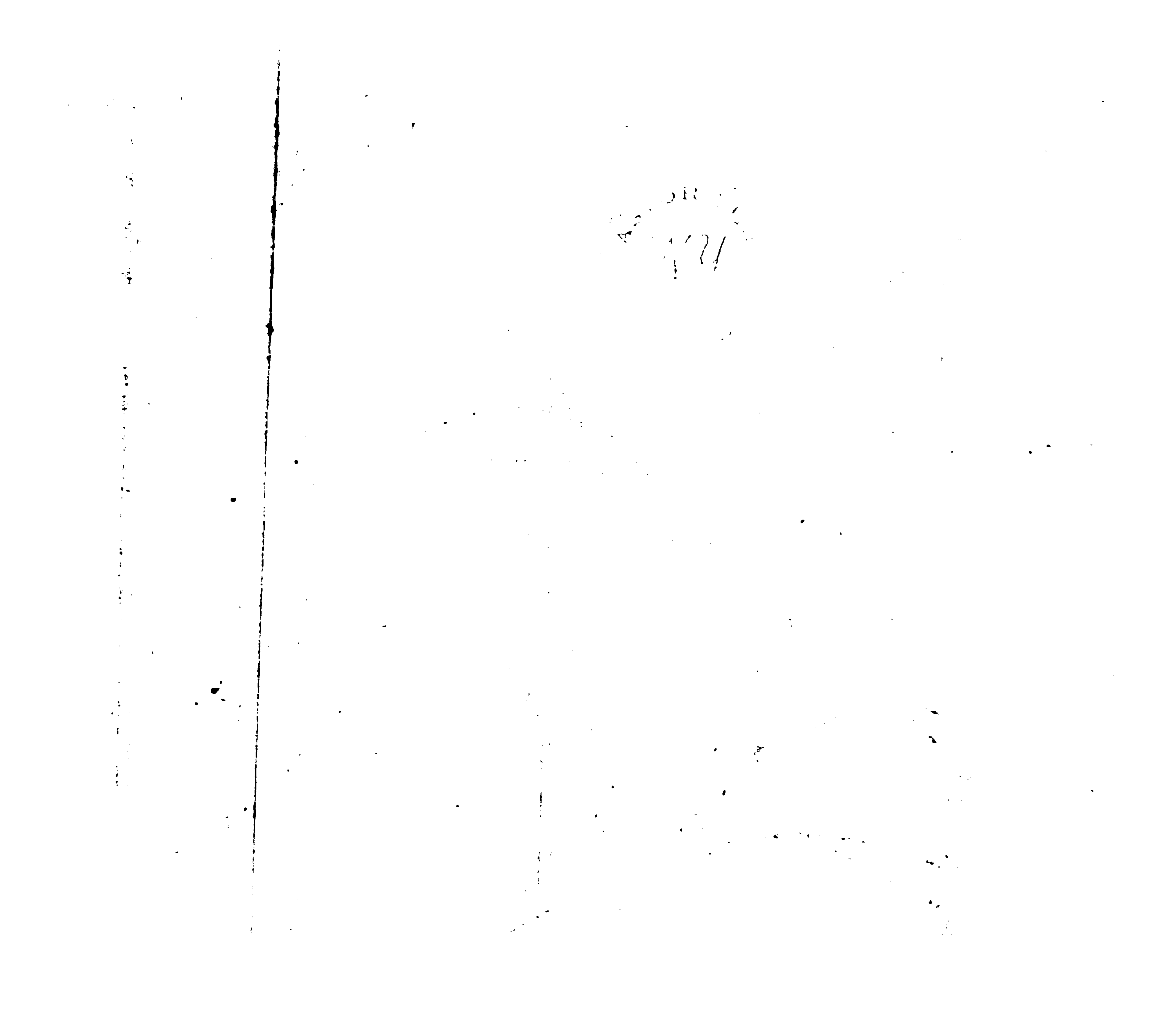

Fig. 217.
Fig. 219.
Fig. 221.

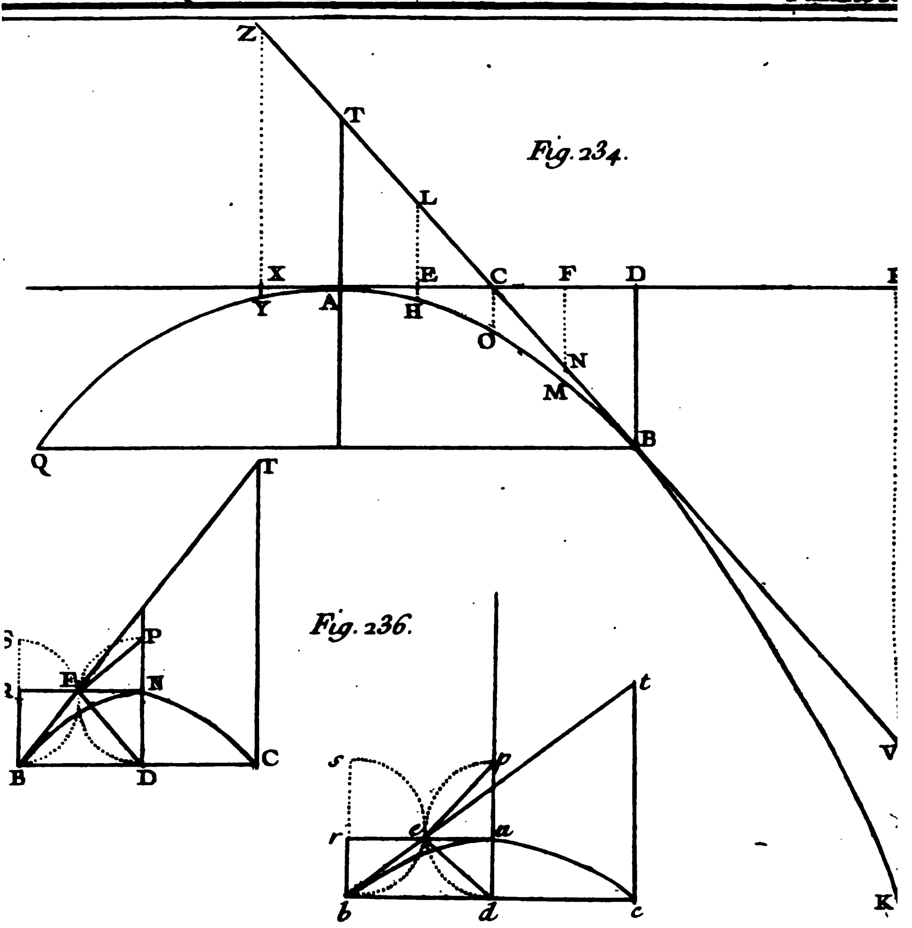


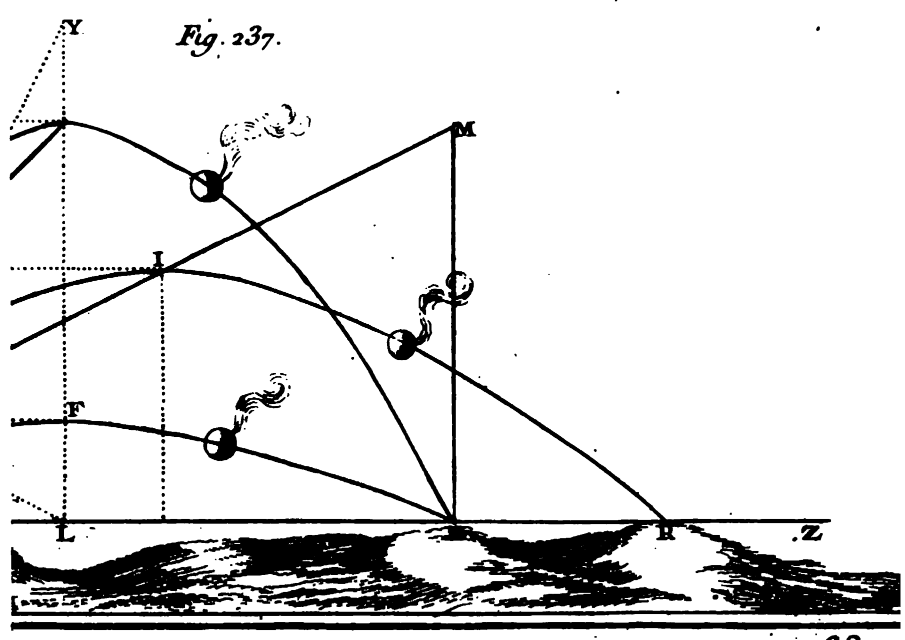

Fig. 223.
C
E
F
M
H
A
I
R
V
K
S
N
B
P
D
A
O
Q
T
Fig. 226.
C
K
F
E
I
P
p
D
A
N
M
4
D
S
Z
V
H
X
M
B
O
Q
t
Z
z
Y
T
Fig. 227.
E
G
c
b
I

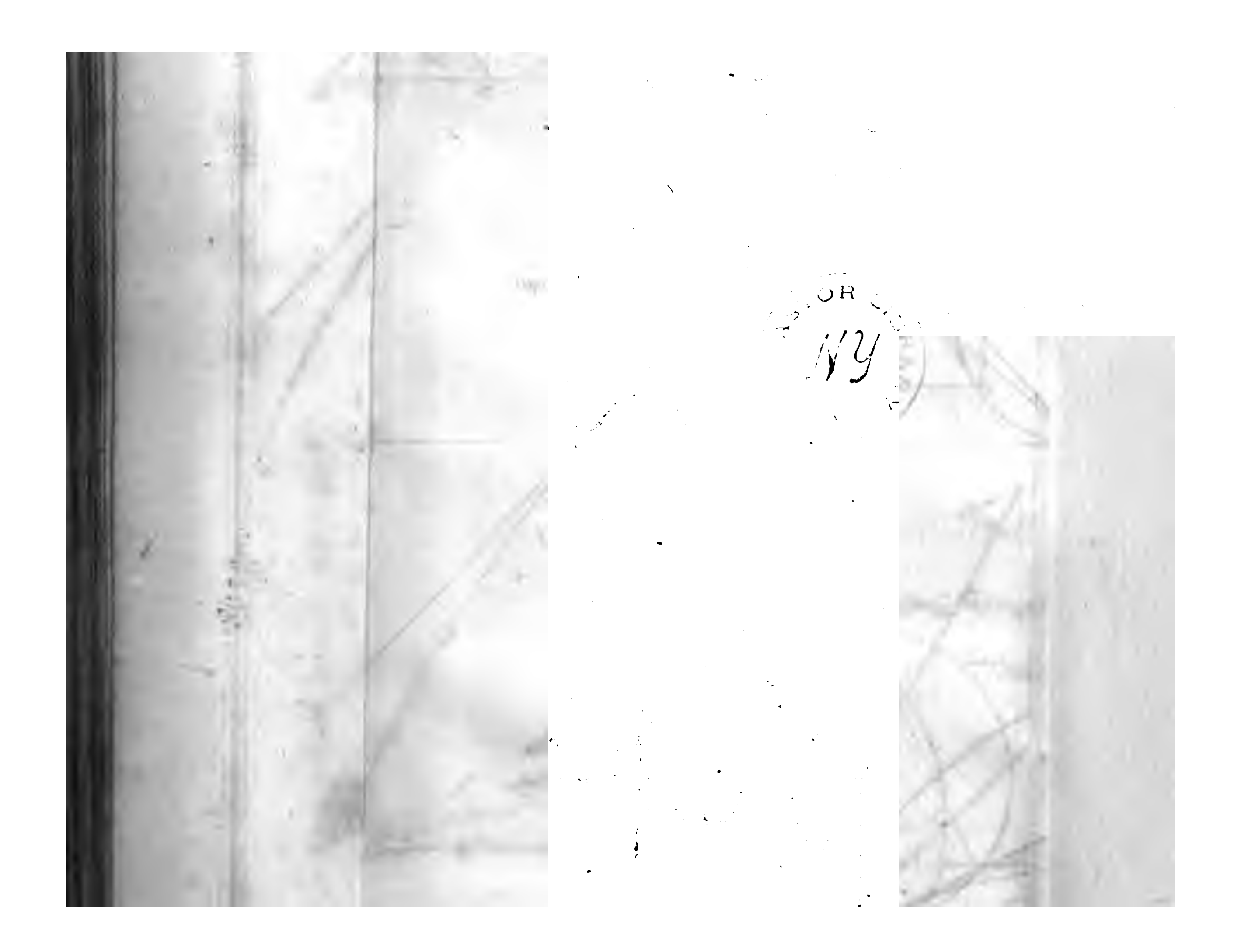


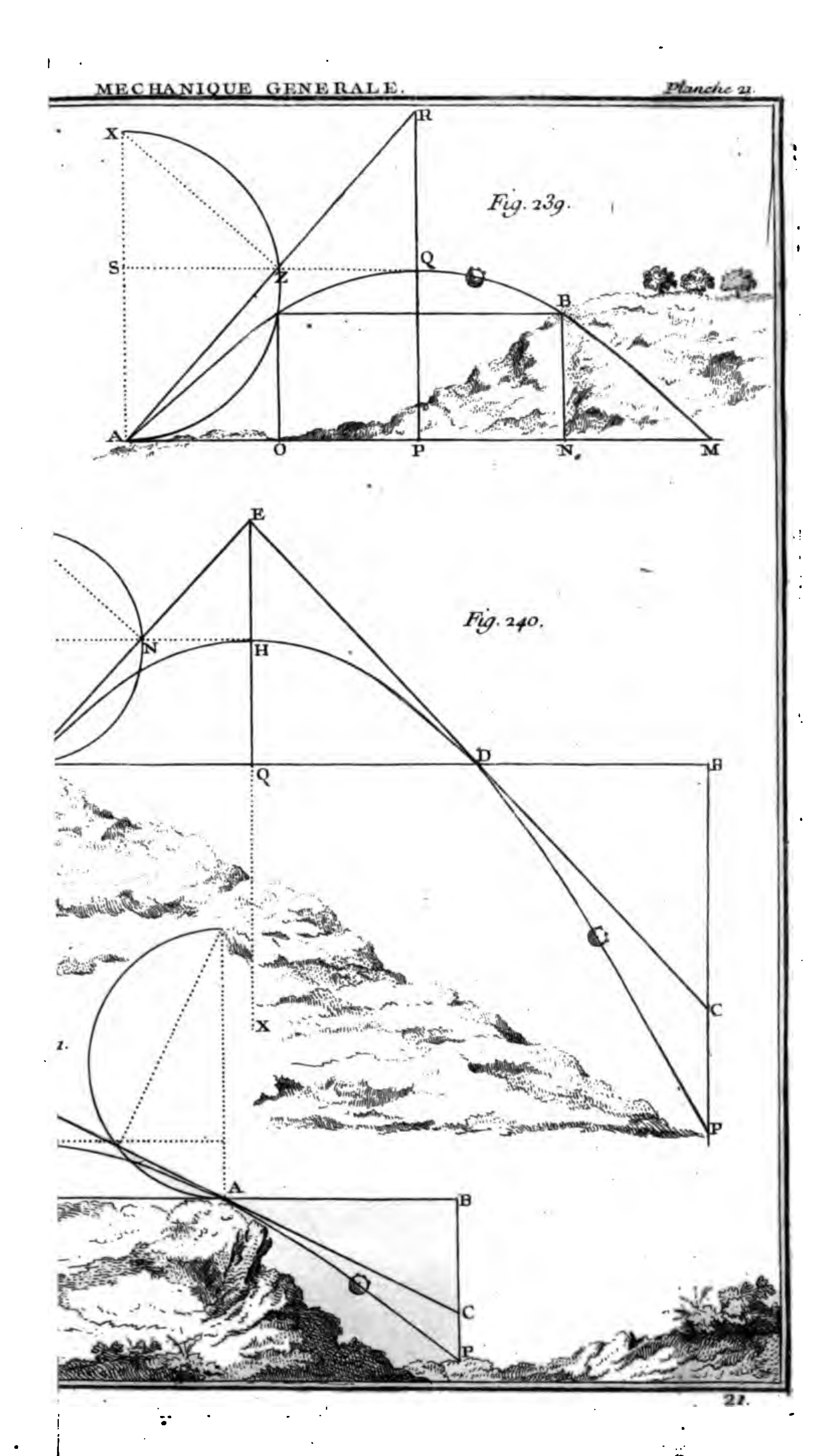

Fig. 229.
P
Q
X
T
M
V
B
E
N
H
R
O
h
r
A
Z
K
D
C
L
F
Fig. 231.
m
n
7
u
9
4
8
l
x
y
t
232.
3
G



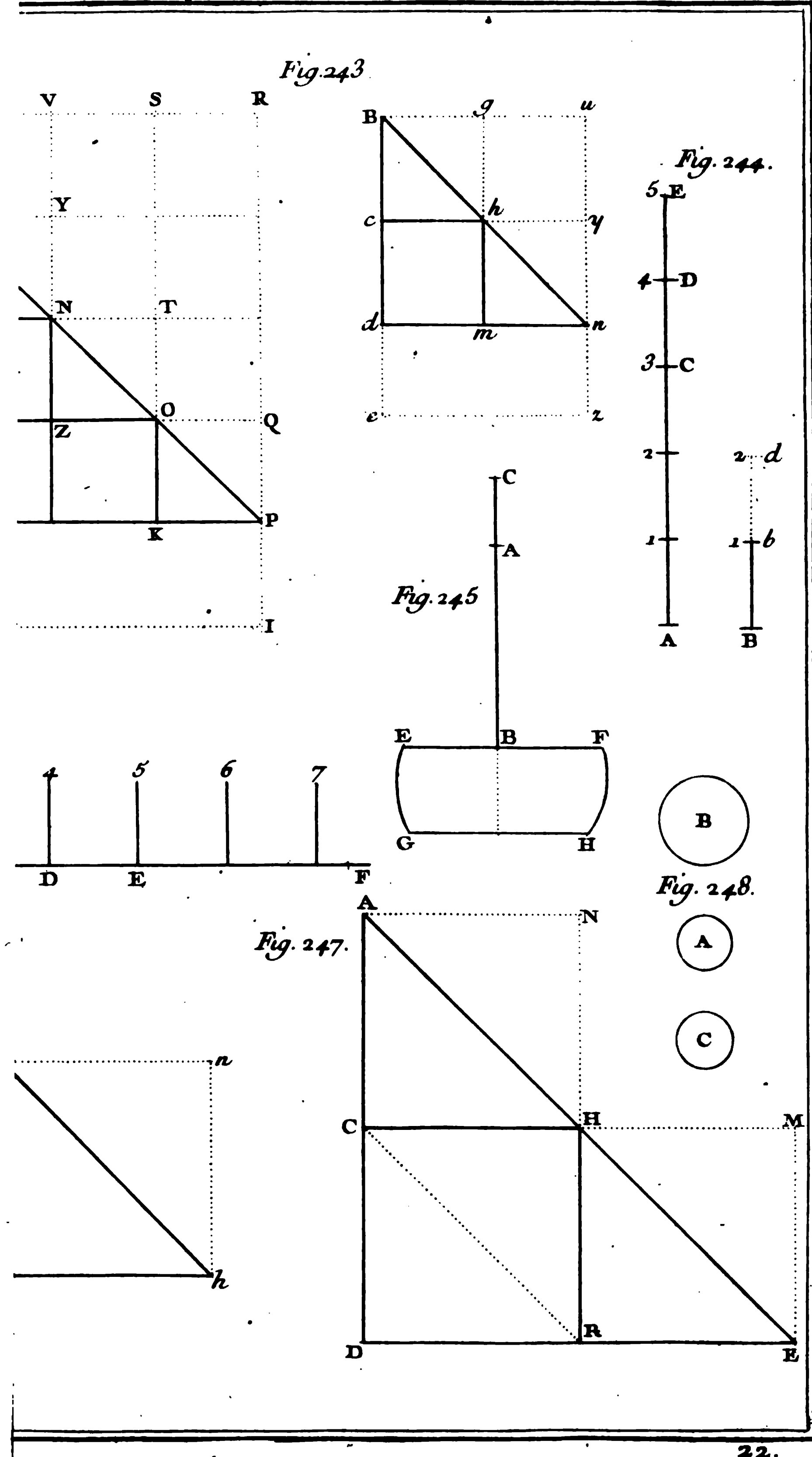

Fig. 234.
Fig. 236.
Z
T
L
X
E
C
F
D
Y
A
H
O
N
M
B
Q
P
N
C
B
D
t
p
a
e
s
r
b
d
c
V
K

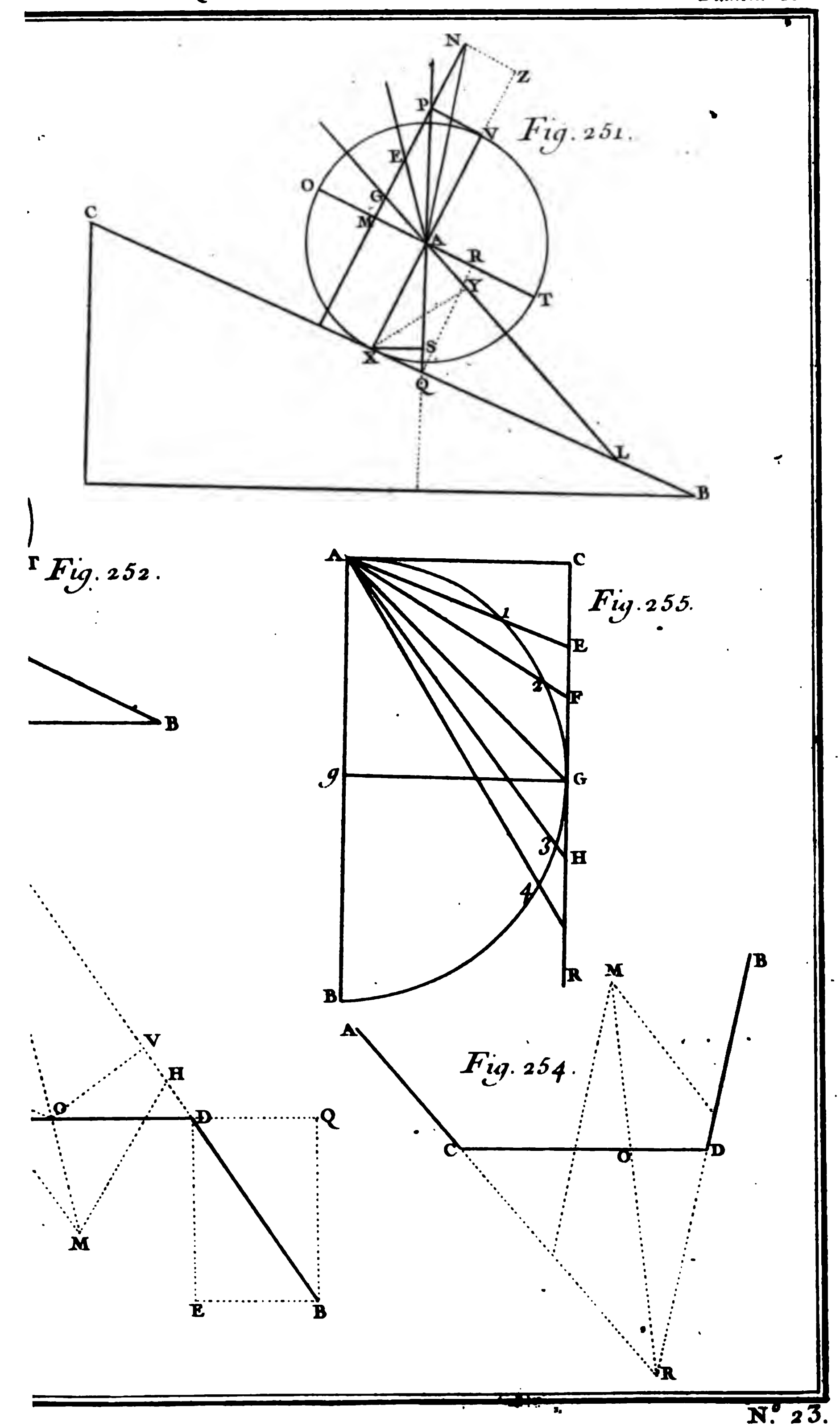

Fig. 237.
Y
M
I
F
L
R
Z




Fig. 239.
X
S
Z
R
Q
B
A
O
P
N
M
Fig. 240.
E
N
H
D
Q
B
C
X
P
A
B
C
P


ASTOR LIBRARY
NY


Fig. 243
V
S
R
Y
N
T
O
Q
Z
K
P
I
B
g
u
c
h
y
d
m
n
e
z
Fig. 244.
5 E
4 D
3 C
2
1
A
2 d
1 b
B
C
A
Fig. 245
E
B
F
G
H
4
5
6
7
D
E
F
B
Fig. 248.
A
C
A
N
Fig. 247.
n
h
C
H
M
D
R
E


Fig. 251.
N
Z
P
V
E
O
G
M
A
R
Y
T
C
X
S
Q
L
B
Fig. 252.
B
V
H
O
D
Q
M
E
B
Fig. 255.
A
C
1
E
2
F
g
G
3
H
4
R
B
Fig. 254.
M
B
A
C
O
D
R


ASTOR LIB
NY



LA MECHANIQUE GENERALE,

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE, L'HYDROSTATIQUE, ET L'HYDRAULIQUE, &c.

LIVRE SECOND.

De l'Hydroſtatique.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1°. L'*Hydroſtatique* eſt la Science qui apprend de quelle maniere les corps peſent dans les fluides.

2. On dit qu'un corps eſt *dur* lorſque ſes parties ſont liées enſemble & réſiſtent à leur ſéparation, & qu'il eſt *fluide*, lorſque ſes parties ne ſont point unies & ſe ſéparent ſans peine.

On diſtingue deux ſortes de corps fluides, les uns dont les

furfaces fe mettent de niveau, lorfque rien ne les empêche; comme l'eau, & tout ce que nous nommons *liqueurs*; les autres dont les furfaces ne fe mettent point de niveau, comme la flamme, l'air, &c. nous ne parlons ici que des fluides de la premiere efpece.

3. Le *Volume* d'un corps eft fon étendue en longueur, largeur & profondeur.

4. Si deux corps ont des volumes égaux & des pefanteurs différentes, celui qui pefe davantage eft dit être plus pefant *fpécifiquement*, ou avoir plus de pefanteur *fpécifique*, & celui qui pefe moins, eft dit être moins pefant *fpécifiquement*, ou avoir moins de pefanteur *fpécifique*.

5. Si deux corps ont des volumes égaux & des pefanteurs inégales, celui qui a plus de pefanteur eft dit être plus *denfe*, ou avoir plus de *denfité*; & celui qui pefe moins, eft dit être moins *denfe*, ou avoir moins de *denfité*.

6. Comme la pefanteur abfolue des corps eft toujours proportionnelle aux maffes, ainfi qu'il a été dit dans le livre précédent. Il fuit des deux définitions précédentes, 1°. Que fi deux corps ont des volumes égaux & des maffes inégales, celui qui a plus de pefanteur ou plus de denfité, a auffi plus de maffe que l'autre. 2°. Que fi les deux corps ont les volumes égaux & les denfités ou les pefanteurs égales, ils ont auffi les maffes égales. 3°. Que fi deux corps ont des volumes égaux, leurs pefanteurs ou leurs denfités font comme les maffes. 4°. Que fi deux corps ont des denfités égales, leur maffes ou leur pefanteurs font comme les volumes; car puifqu'avec des denfités égales & des volumes égaux, les maffes ou les pefanteurs font égales, il eft clair que les denfités étant égales & les volumes inégaux, les maffes doivent être dans le rapport des volumes. 5°. Que les corps qui ont des denfités égales ont des pefanteurs fpécifiques égales; car il eft clair qu'en faifant les volumes égaux, les maffes feront égales. 6°. Que ceux qui ont des pefanteurs fpécifiques égales, ont des denfités égales. 7°. Enfin, que fi deux corps ont les volumes égaux, leur pefanteurs fpécifiques font comme leur maffes ou leur pefanteurs abfolues; car les pefanteurs fpécifiques viennent du plus ou moins de pefanteur abfolue ou de maffe fous un même volume.

PROPOSITION I.

7. *Les Maffes de deux corps font en raifon compofée des denfités & des volumes.*

DEMONSTRATION

DEMONSTRATION.

Les maſſes des corps ne ſont autre choſe que la ſomme des parties plus ou moins denſes qu'ils contiennent ſous leur volumes plus ou moins grands ; car on ne ſçauroit concevoir que les maſſes ſoient compoſées d'autre choſe ; donc dans la comparaiſon que l'on fait de différentes maſſes, il faut néceſſairement avoir égard & aux denſités & aux volumes ; que ſi l'on veut confirmer ce raiſonnement par une démonſtration géométrique, la voici.

Soient les deux corps A, C, (*Fig.* 1.) dont je ſuppoſe que les denſités & les volumes ſoient différens ; j'en prens un troiſiéme B dont le volume ſoit égal au volume de A, & la denſité égale à la denſité de C ; je nomme V le volume de A ou de B, u le volume de C, D la denſité du premier, & d la denſité du ſecond ou du troiſiéme ; les corps A, B, ayant les volumes égaux, leur maſſes ſont comme leur denſités (*N. 6.*) ; donc A, B :: D, d, de même les corps B, C, ayant les denſités égales, leur maſſes ſont comme leur volumes ; donc B, C :: V, u, & multipliant les termes de cette derniere proportion par ceux de la précédente, j'ai $A \times B$, $B \times C$ :: DV, du, & diviſant la premiere raiſon par B, j'ai A, C :: $D \times V$, $d \times u$; donc, &c.

COROLLAIRE I.

8. *Si les maſſes ſont égales, les denſités ſont réciproquement comme les volumes* ; car A, C :: $D \times V$, $d \times u$, mais par la ſuppoſition $A = C$; donc $D \times V = d \times u$, & par conſéquent D, d :: u, V.

COROLLAIRE II.

9. *Les denſités ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des maſſes, & de la raiſon réciproque des volumes.*

Puiſque A, C :: $D \times V$, $d \times u$; donc $A \times d \times u = C \times D \times V$, & par conſéquent j'ai D, d :: $A \times u$, $C \times V$.

COROLLAIRE III.

10. *Les volumes ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des maſſes & de la réciproque des denſités.*

Par le Corollaire précédent $A \times d \times u = C \times D \times V$; donc V, u :: $A \times d$, $C \times D$.

PROPOSITION II.

11. *Si deux corps* C, B, (Fig. 1.) *pesent également, leur pesanteurs specifiques sont réciproquement comme leur volumes.*

DEMONSTRATION.

Soit le volume du premier corps $C=V$, celui du second $B=u$, & leur pesanteur commune $=p$; comme nous supposons que le corps C est homogene dans toutes ses parties, il est clair que si j'augmente son volume jusqu'à le rendre égal à celui du corps B, sa pesanteur absolue augmentera à proportion de l'augmentation de volume; ainsi la pesanteur absolue p qu'il avoit auparavant sera à celle qu'il aura après l'augmentation du volume comme son premier volume V à son second volume u; donc faisant $V, u :: p, \frac{pu}{V}$, ce quatriéme terme sera le poids du corps C sous un volume égal au volume de B; donc les pesanteurs de C & B sous un même volume u seront comme $\frac{pu}{V}$ est à p, ou comme pu est à pV, ou enfin comme u est à V, mais les pesanteurs spécifiques de C & B sont égales à leur pesanteurs sous un même volume; donc les pesanteurs specifiques de C & B sont comme u, V, c'est-à-dire réciproquement comme le volume u du corps B est au volume V du corps C avant son augmentation.

COROLLAIRE.

12. Si les poids & les volumes sont égaux, les pesanteurs spécifiques sont égales, à cause de $u=V$.

PROPOSITION III.

13. *Les pesanteurs absolues de deux corps sont en raison composée de leur volumes & de leur pesanteurs specifiques.*

DEMONSTRATION.

Soient les trois corps A, C, B, (*Fig.* 1.) dont les deux premiers ont des volumes inégaux & des pesanteurs absolues égales, & le premier A & le troisiéme B ont des volumes égaux & des pesanteurs spécifiques inégales; il est clair que les deux corps C, B, ont des volumes inégaux & des pesanteurs absolues inégales; car si la pesanteur absolue de B étoit égale à celle de C,

elle seroit aussi égale à celle de A, & par conséquent les pesanteurs spécifiques de A & de B seroient égales à cause de l'égalité des volumes (*N.* 12.) ce qui est contre la supposition. Il s'agit donc de faire voir que les pesanteurs absolues de C & B sont en raison composée de leur volumes & de leur pesanteurs spécifiques.

Je nomme a la pesanteur absolue de A ou de C, c la pesanteur absolue de B, p la pesanteur specifique de A, q la pesanteur specifique de B, r la pesanteur specifique de C, u le volume de A ou de B, & t le volume de C.

Les corps A, B, ayant même volume leur pesanteurs absolues sont comme leur pesanteurs specifiques (*N.* 6.) donc $a, c :: p, q$, & les corps A, C, ayant la même pesanteur absolue, leur pesanteurs specifiques sont réciproquement comme leur volumes (*N.* 12.) donc $p, r :: t, u$, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente, j'ai $ap, cr :: pt, qu$, ou $ap, pt :: cr, qu$; & divisant la premiere raison par p, j'ai $a, t :: cr, qu$, ou $a, t :: c, \frac{qu}{r}$, ou $a, c :: t, \frac{qu}{r}$, & enfin $a, c :: tr, qu$; c'est-à-dire la pesanteur absolue a du corps C, est à la pesanteur absolue c du corps B en raison composée de la raison t, u, des volumes de C & B, & de la raison r, q, des pesanteurs specifiques de ces mêmes corps.

COROLLAIRE I.

14. *Les pesanteurs specifiques des corps* C, B, *sont en raison composée de la raison directe de leur pesanteurs absolues, & de la réciproque des volumes.*

Puisque $a, c :: tr, qu$; donc divisant l'une & l'autre raison par la raison t, u, j'ai $\frac{a}{t}, \frac{c}{u} :: r, q$, & réduisant la premiere raison au même dénominateur, j'ai $r, q :: au, tc$, donc, &c.

COROLLAIRE II.

15. Les densités sont en raison directe des masses ou des pesanteurs absolues & de la réciproque des volumes (*N.* 9.) donc les pesanteurs specifiques sont comme les densités, puisqu'elles sont dans la même raison par le Corollaire précédent.

CHAPITRE II.

De l'équilibre des Fluides.

16. IL n'en est pas des corps fluides de même que des solides. Ceux-ci ont toutes leur parties tellement unies ensemble, qu'elles restent en repos si la masse est en repos, & qu'elles se meuvent si la masse se meut, en suivant la direction de la masse, & conservant toujours entr'elles le même rapport de distance ou de proximité, ce qui fait que ces corps ont un point fixe appellé centre de gravité ou de pesanteur, autour duquel toutes leur parties sont dans un parfait équilibre; au contraire les corps fluides ont leur parties détachées les unes des autres, ces parties se meuvent en tout sens vers le haut, vers le bas, vers les côtés, &c. soit que la masse soit en repos, soit qu'elle se meuve, & delà vient que si ces corps étant sur une surface horizontale ne sont pas retenus par les côtés, leur parties s'étendent de toutes parts, de façon que leur surface est toujours de niveau, & que s'ils sont retenus comme dans un vase, leur surface superieure est toujours aussi de niveau, n'étant pas possible qu'aucune de leur parties soit plus haute que l'autre, sans glisser sur celle qui est plus basse, puisque rien ne la retient.

La supposition du mouvement en tout sens des parties des fluides est appuyée sur une infinité d'experiences qui ne laissent aucun lieu d'en douter. Qu'on verse peu à peu du vin dans un verre dans lequel on aura mis de l'eau auparavant, on verra que les parties du vin se dispersent de tous les côtés, les unes à droite, les autres à gauche, d'autres vers le bas, &c. jusqu'à ce que les deux liqueurs se soient parfaitement mêlées, & alors si on ne voit plus ce mouvement, cela ne provient que de l'uniformité de la couleur que ce mêlange prend, laquelle fait qu'on ne peut plus distinguer ce que la diversité des couleurs faisoit appercevoir auparavant. Si l'on jette du sel dans l'eau, toutes les parties de l'eau sont salées en peu de tems. Les corps durs deviennent fluides, lorsque leur parties sont détachées les unes des autres par la chaleur du feu, & qu'elles commencent à se mouvoir, &c.

17. J'ai dit que la ſurface ſuperieure de l'eau ſe mettoit toujours de niveau, ſoit que cette eau fut retenue par les côtés, ſoit qu'elle ne le fut pas, & ſur cela on pourra m'objecter 1°. Que ſi on jette de l'eau ſur un plancher couvert de pouſſiere, on éprouve tous les jours que grand nombre de parties d'eau ſe mettent en petites boules qu'on voit rouler, & que par conſéquent les ſurfaces de ces boules ne ſont pas de niveau. 2°. Que ſi l'on verſe de l'eau dans un vaſe, il arrive ſouvent que l'eau qui eſt autour des bords du vaſe, eſt moins haute que celle qui en eſt éloignée.

Or à cela je répons que ce que ces experiences font voir ne provient point de la nature de l'eau, mais de quelques cauſes étrangeres dont nous faiſons abſtraction & que je vais expliquer en peu de mots.

Quand on jette de l'eau ſur un plancher couvert de pouſſiere, les parties de cette eau qui prennent aſſez de pouſſiere pour faire un eſpece de parois entr'elles & le plancher, s'attachent à cette pouſſiere & ſe l'incorporent en formant un eſpece de ciment; cependant leur viteſſe acquiſe les obligeant à ſe réflechir ſous un angle oblique égal à l'angle d'incidence (car ce n'eſt ordinairement que dans cette ſuppoſition qu'on voit les petites boules qu'on nous objecte); il arrive que les petites parties qui ſont plus proches du point d'où elles ont été jettées, ayant touché le plancher plutôt, ſe relevent auſſi plutôt & ſe replient un peu ſur les autres, à cauſe de la peſanteur de la pouſſiere dont elles ſont chargées, ce qui fait qu'elles forment avec les autres qui ſe relevent après elles ces boules que l'on voit courir ſur le plancher; & plus ces boules ont du mouvement, plus elles ſe chargent de la pouſſiere ſur laquelle elles roulent, & plus auſſi elles compoſent un corps dur. Ce raiſonnement eſt confirmé par le contraire qui arrive lorſque l'eau qu'on jette eſt en ſi grande quantité que la pouſſiere qui s'incorpore n'eſt pas capable de l'empêcher de toucher le plancher; car alors on voit que cette eau tend à s'étendre ſur le plancher, & à former une ſurface ſupérieure parallele à l'horizon.

Lorſqu'en mettant de l'eau dans un verre, on éprouve que les parties de cette eau qui ne ſont pas près des bords ſont plus élevées que celles qui touchent les bords, cela provient de la ſechereſſe du verre, lequel dans cet état eſt toujours chargé d'une petite pouſſiere imperceptible, laquelle s'incorporant avec les

parties de l'eau qui touchent le verre, augmente les peſanteurs de ces parties, & en diminue par conſéquent les viteſſes; d'ailleurs quelqu'unies que ſoient les parties laterales du verre, elles ont toujours des petites élevations & des enfoncemens qui diminuent la viteſſe avec laquelle l'eau monteroit.

PROPOSITION IV.

18. *Si l'on verſe d'une même liqueur dans deux tubes ou tuyaux* AB, CD, (Fig. 2. 3. 4.) *qui ont communication entr'eux, & que la liqueur de l'un des tubes* AB *ſoit de niveau avec la liqueur de l'autre tube* CD, *les liqueurs des deux tubes ſeront en équilibre.*

DEMONSTRATION.

Il peut arriver pluſieurs cas différens, car ou les deux tubes auront les diametres égaux & ſeront perpendiculaires à l'horizon, ou les diametres étant égaux, l'un ſera perpendiculaire & l'autre oblique à l'horizon, ou les diametres étant inégaux, les deux tubes ſeront perpendiculaires à l'horizon, ou l'un ſera perpendiculaire & l'autre oblique, ou enfin les diametres étant égaux ou inégaux, tous les deux ſeront obliques; la demonſtration des deux premiers & du troiſiéme cas, fera aiſément juger des autres.

Suppoſons 1°. que les diametres EF, TV, (*Fig.* 2.) ſoient égaux, & les tubes verticaux, les baſes EF, TV, des colonnes EB, VD, ſeront égales; or leur hauteurs EB, VD, ſeront auſſi égales, puiſqu'on ſuppoſe que la ligne de niveau EV eſt parallele à la ligne BD; donc les maſſes ou colonnes EB, VD, qui preſſent la colonne horizontale BD ſont égales; or ſi la ſurface EF baiſſoit juſqu'en GH, c'eſt-à-dire, ſi la colonne EB diminuoit de la quantité EH, il faudroit néceſſairement que la colonne VD augmentât de la quantité VX égale à EH, & par conſéquent les hauteurs EG, TX, ſeroient égales; or ces hauteurs étant parcourues dans le même tems, expriment les viteſſes des colonnes égales EB, VD; donc ces colonnes ont des viteſſes égales, & par conſéquent leur forces étant égales, elles preſſent également la colonne horizontale BD; donc l'une ne peut vaincre l'autre, & l'équilibre ſe trouve entre les deux.

Suppoſons 2°. que les diametres EF, TV, (*Fig.* 3.) ſoient inégaux & les tubes verticaux, la colonne EB eſt à la colonne VD comme la baſe EF eſt à la baſe TV à cauſe des hauteurs égales;

or ſuppoſant que la colonne EB diminue de la quantité EH, la colonne VD augmentera d'une quantité VX égale à EH ; donc la baſe EF ſera à la baſe TV réciproquement comme la hauteur TX de la quantité VX ſera à la hauteur EG de la quantité EH ; or les hauteurs TX, EG, marquent les viteſſes des colonnes VD, EF, & ces colonnes ſont comme les baſes TV, EF ; donc la colonne EB eſt à la colonne VD réciproquement comme la viteſſe XT de la colonne VD eſt à la viteſſe EG de la colonne EB ; donc les momens ou les forces de ces deux colonnes ſont égales, & par conſéquent elles preſſent également la colonne horizontale BD, d'où il ſuit qu'il y a équilibre entr'elles.

Suppoſons 3°. que les diametres EF, TV, (*Fig.* 4.) ſoient inégaux, & que le tube AB étant perpendiculaire à l'horizon, le tube CD ſoit incliné ; je fais paſſer un plan horizontal par le côté MN, & dès-lors il eſt viſible qu'on peut regarder la partie LBDONM comme un vaſe auquel ſont adaptés les tubes AB, CN, dont la liqueur preſſe la colonne horizontale LBDO, & on pourroit dire la même choſe dans les deux cas précédens ; cela poſé. Je conçois une autre tube droit O*c*, de même baſe & de même hauteur que le tube OC, & l'on prouvera comme dans le cas précédent que ſi la liqueur du tube OC étoit dans le tube O*c*, & que la ligne de niveau RS paſsât par la ſurface de cette liqueur, les colonnes EL, *t*N ſeroient en équilibre ; or les tubes O*c*, OC, étant égaux à cauſe des baſes & des hauteurs égales, les colonnes *u*O, VO, ſeront auſſi égales, & leur viteſſes de même, parce que dans le même tems que *u*O augmenteroit de la quantité *uc*, la colonne OC augmenteroit de la quantité VC, & que ces quantités *uc*, VC ont les hauteurs égales ; donc la force de VO eſt égale à la force de *u*O, & par conſéquent la colonne VO eſt en équilibre avec la colonne EL.

COROLLAIRE I.

19. *Si les liqueurs ſont en équilibre dans les deux tubes, leur ſurfaces ſont de niveau.* Car puiſque lorſque les ſurfaces ſont de niveau, il y a équilibre, il s'enſuit que ſi elles ceſſent d'être de niveau l'équilibre ſera rompu ; donc, &c.

COROLLAIRE II.

20. Si les deux tubes étoient adaptés l'un contre l'autre ſans

avoir un tube horizontal entre deux, la démonſtration ſubſiſteroit la même.

Soit par exemple les deux tubes AB, CD (*Fig.* 5.) adaprés comme on les voit ici, je regarde leur partie LMNDB comme un vaſe ſur lequel on auroit mis deux tubes AM, NC; car il eſt viſible que ce n'eſt que juſqu'au plan LMN que l'eau du tube AM deſcendant celle du tube NC monte, & que ſi on veut enſuite faire deſcendre l'eau du tube AM plus bas, celle du tube NC au lieu de monter tombera ſur celle du tube AM, à cauſe qu'elle auroit des parties qui ne ſeroient point ſoutenues; cela poſé, il eſt viſible que la colonne EM eſt à la colonne TN comme la baſe EF eſt à la baſe TV, & l'on prouvera comme ci-deſſus que les viteſſes de ces colonnes ſont réciproques aux baſes, & que par conſéquent la colonne EM doit être en équilibre avec la colonne TN, &c.

PROPOSITION V.

21. *Si l'on verſe dans deux tubes* AB, CD, (Fig. 6.) *deux différentes liqueurs qui ſoient en équilibre, les peſanteurs ſpecifiques de ces liqueurs ſont entr'elles réciproquement comme les hauteurs.*

DEMONSTRATION.

Suppoſons que les tubes ayent des diametres égaux, ſi j'augmente la colonne EB de la premiere liqueur juſqu'à ce qu'elle ait une hauteur HB égale à la hauteur TD de la colonne VD de la ſeconde liqueur, les volumes des colonnes GB, VD, ſeront égaux à cauſe de l'égalité des baſes & des hauteurs; donc les gravités ſpecifiques de ces deux colonnes ſeront entr'elles comme leur peſanteurs abſolues (*N.* 6.); or la peſanteur abſolue de la colonne GB eſt à la peſanteur abſolue de ſa partie EB comme HB, FB, à cauſe de la baſe commune BI, & la peſanteur abſolue de la colonne EB eſt à la peſanteur abſolue de la colonne VD, comme FB eſt à TD, & ces deux dernieres peſanteurs abſolues ſont entr'elles en raiſon compoſée des volumes & des peſanteurs ſpecifiques (*N.* 13.); donc à cauſe de l'égalité des peſanteurs abſolues des liqueurs EB, VD, qui ſont en équilibre, la raiſon compoſée des volumes & des peſanteurs ſpecifiques doit être une raiſon d'égalité, mais la premiere de ces raiſons eſt FB, TD; donc la ſeconde, c'eſt-à-dire, celle des peſanteurs ſpecifiques doit être TD, FB, car faiſant la raiſon

raison composée de ces deux raisons, on a FB×TD, TD×FB qui est une raison d'égalité ; donc les pesanteurs specifiques des liqueurs EB, VD, sont entr'elles réciproquement comme les hauteurs TD, FB.

On peut démontrer aisément la même chose quand les diametres des tubes sont inégaux, ou quand l'un ou l'autre des tubes, ou tous les deux sont inclinés à l'horizon.

COROLLAIRE I.

22. Donc si l'on connoît la pesanteur specifique d'une liqueur VD, on connoîtra sans peine la pesanteur spécifique de toute autre liqueur EB ; car on aura toujours FB est à TD comme la pesanteur specifique de VD est à la pesanteur specifique de EB.

REMARQUE.

23. Comme il n'est gueres de liqueurs qui ne se mêlent les unes avec les autres, il faut pour obvier à cet inconvénient remplir le tube horizontal de mercure, & ensuite verser les deux différentes liqueurs dans les deux tubes, & quand on s'appercevra que les deux surfaces MO, RN, du mercure seront de niveau, ce sera une marque qu'il sera pressé également de part & d'autre par les deux liqueurs, lesquelles par conséquent seront en équilibre entr'elles, mais il faut observer que les hauteurs des colonnes des liqueurs ne doivent se prendre que jusqu'à la ligne horizontale MN, c'est à-dire, si la surface de la liqueur du tube A est EF, la hauteur de cette liqueur sera FO, & si la surface de la liqueur du tube B est TV, la hauteur de cette liqueur sera TR.

COROLLAIRE II.

24. Les densités étant entr'elles comme les pesanteurs specifiques (*N.* 15), on peut connoître de la même façon les densités des liqueurs si la densité de l'une d'entr'elles est connue, & si cela n'est pas, on pourra toujours connoître le rapport de ces densités.

COROLLAIRE III.

25. Si au lieu des tubes cylindriques on mettoit des tubes prismetiques de quelque nombre de côtés que fussent leurs bases,

nent les liqueurs des tubes, de même que l'eau inférieure les soutenoit, ces deux fonds seront pressés également; puis donc que les fonds R*t*, *ts* sont également chargés à cause que les hauteurs & les bases des tubes *ft*, *c*S sont égales, il s'ensuit que les fonds *rd*, GD des vases *cd*, CD, qui ont aussi les bases & les hauteurs égales, sont également pressés; mais les fonds EB, GD des vases AB, CD sont pressées en raison composée des bases & des hauteurs, donc les fonds EB, *rd* des vases AB, *cd* sont aussi pressés en même raison.

PROPOSITION VII.

29. *Si la base supérieure* ABEF (Fig. 8.) *d'un vase* AD *plein d'eau ou de quelqu'autre liqueur, est plus grande que la base inférieure* HCDG, *le fonds* HCDG *n'est pas plus pressé que si la base supérieure lui étoit égale, & que les côtés du vase lui fussent perpendiculai es.*

DEMONSTRATION.

Supposons un autre vase AM dont le fonds soit égal à la base supérieure, & les côtés perpendiculaires entre ces deux bases. Mettons dans ce vase deux cloisons TC, XD perpendiculaires sur les extrémités HC, GD de la base inférieure du premier vase, ce qui me donne trois vases AC, TD, XM, qui ont les bases supérieures égales aux inférieures, & dont les côtés sont perpendiculaires sur les bases; je remplis ces vases d'eau, & à cause des hauteurs égales leurs fonds sont pressés dans la raison des vases (*N.* 28), c'est-à-dire que chaque fonds IC, HD, GM supporte la colonne d'eau qui lui est perpendiculaire; j'ôte les deux cloisons TC, XD que je suppose infiniment minces, & les trois bases se trouvent pressées de la même façon; car si quelques parties de la colonne XM passent dans la colonne TD, il faut nécessairement qu'il passe un égal nombre de parties de la colonne TD dans la colonne XM, afin que la surface supérieure AE de toute la masse d'eau soit toujours de niveau, & par conséquent les colonnes ayant toujours une même quantité de matiere, pressent de la même façon les fonds sur lesquels elles portent. Je conçois deux sections obliques EG, AC, passant par les extrémités FE, AB de la base supérieure, & par les extrémités GD, HC de la base inférieure HD, & les parties de l'eau de la colonne XM, qui sont sous la section, soutiennent les parties de l'eau de cette même colonne qui sont sur la section; car s'il s'en

DEMONSTRATION.

Je suppose un autre vase GB, dont la base supérieure GP soit égale à l'inférieure CB, & dont les côtés soient perpendiculaires entre ces deux bases, j'y conçois deux plans AF, HN perpendiculaires sur les côtés AT, HI de la base supérieure AI du premier vase; je remplis d'eau le vase GB, & le fonds RH n'est pressé que par la colonne AH qui lui est perpendiculaire, de même que les fonds CF, MB ne sont pressés que par les colonnes GF, NB; j'ôte les deux plans AF, HN, & les fonds se trouvent toujours pressés de la même façon parce que les colonnes d'eau étant toujours de niveau, gardent aussi toujours la même quantité de parties, de quelque façon que ces parties puissent passer d'une colonne à l'autre; je conçois deux sections NB, AD qui passent par les côtés NI, AT de la base supérieure AI du premier vase, & par les côtés EB, CD de la base inférieure; & il est visible que la quantité d'eau qui est sous ces sections dans les colonnes NB, GF, soutient la quantité d'eau qui est au-dessus de ces sections, laquelle pressant celle qui est au-dessous, forme avec elle la pression que souffrent les fonds MB, CF; je fais passer par les deux sections NB, AD deux cloisons qui tiennent l'eau inférieure dans la même situation en retranchant l'eau supérieure; & par conséquent l'eau inférieure étant pressée de la même façon qu'elle l'étoit par l'eau supérieure, les fonds MB, CF sont autant comprimés qu'ils l'étoient auparavant; or en mettant les cloisons NB, AD, & retranchant l'eau supérieure, ce qui reste n'est autre chose que le premier vase AB, donc le fonds CB de ce premier vase, qui n'est autre chose que la somme des trois fonds CF, RH, MB est autant pressé que si ces trois fonds étoient chargés des trois colonnes GF, AH, NB, c'est-à-dire que si la base supérieure étoit égale à l'inférieure.

COROLLAIRE I.

33. On prouvera la même chose de tout autre vase quelque figure que puissent avoir ses côtés (*Fig.* 13, 14).

REMARQUE.

34. On peut objecter que si cette proposition est vraye, il s'ensuivra que le vase AB (*Fig.* 12.) plein d'eau pesera autant que le

dont tous les quarrés ſoient vuides, & que les tuyaux deviennent auſſi ſolides ; ſi leur ſolidité fait ſortir quelques parties d'eau au-deſſus des tuyaux, il eſt évident que ces parties ſe mettront de niveau avec la ſurface ſupérieure AH, & que par conſéquent celle-ci ſe repandra en dehors par les côtés du vaſe juſqu'à ce qu'elle revienne à ſa premiere hauteur BH, c'eſt-à-dire qu'elle revienne au niveau des tuyaux ; dans cet état l'eau des tuyaux ſera en équilibre avec l'eau qui eſt ſous la ſection, ou avec l'eau de l'eſpace CRDOHLIB ; je conçois que tous les quarrés de la ſection CD à l'exception d'un ſeul, ſoient bouchés avec des cloiſons qui puiſſent ſoutenir l'effort de l'eau des tuyaux ſi l'on ôte l'eau inférieure, ou l'effort de l'eau inférieure ſi l'on ôte les tuyaux & l'eau qu'ils contiennent ; j'ôte par penſée ces tuyaux, & leur eau, à l'exception du tuyau EF qui eſt ſur le quarré qui n'a point été bouché ; & l'eau de ce tuyau eſt encore en équilibre avec l'eau de l'eſpace CRDOHLIB, lequel devient alors un vaſe qui a un orifice ſur l'un de ſes côtés, & un tuyau perpendiculaire à l'horizon placé ſur cet orifice ; car l'eau du vaſe CRDOHLIB fait autant d'effort ſur les cloiſons qu'elle faiſoit ſur l'eau des tuyaux qui étoit ſur ces cloiſons, & par conſéquent elle ne fait pas plus d'effort ſur l'eau du tuyau EF qu'elle en faiſoit auparavant ; mais l'eau du tube EF étoit de niveau avec l'eau du vaſe CRDOHLIB lorſque les cloiſons étoient ouvertes, donc elle eſt auſſi de niveau, & par conſéquent en équilibre lorſque les cloiſons ſont fermées ; d'où il ſuit que ſi ſur une partie quelconque des côtés d'un vaſe CRDOHLIB, on adapte un tuyau perpendiculaire à l'horiſon, & dont le ſommet ſoit au niveau ou plus haut que la ſurface de l'eau du vaſe, & qu'on le rempliſſe d'eau juſqu'à la hauteur de l'eau du vaſe, l'eau du tuyau & celle du vaſe ſeront en équilibre puiſqu'elles ſeront de niveau & que l'une des deux ne pourra forcer l'autre de s'élever.

COROLLAIRE IV.

37. La même choſe ſubſiſtera quand même les tuyaux ſeroient inclinés, car il n'y a qu'à concevoir que le côté AB (*Fig.* 16.) ſoit incliné à l'horiſon, & que les tuyaux qui ſont ſur les quarrés de la ſection CB ſoient paralleles à ce côté, car alors on demontrera de même que l'eau des tuyaux ſera de niveau avec celle du vaſe CRBOHLID, parce que ſi celle-ci deſçendoit & forçoit

celle des tuyaux à monter, l'eau des tuyaux se repandroit par le haut sur la surface de l'eau du vase & la remettroit encore de niveau; & fermant tous les quarrés de la section, & ôtant tous les tuyaux & l'eau qu'ils contiennent, à l'exception de celui dont le quarré n'est pas fermé, on prouveroit de même que ci-dessus que l'eau du tuyau EF étant à la hauteur de l'eau du vase seroit en équilibre avec elle.

COROLLAIRE V.

38. Il suit du Corollaire 4, que si après avoir fermé tous les quarrés de la section CD (*Fig.* 15.) on ôte l'eau du dessous, & qu'on laisse subsister les tuyaux & l'eau qu'il contiennent, chaque cloison, c'est-à-dire chaque partie du côté CD du vase CRDOHLIB soutient l'effort de la colonne d'eau qui est dans son tuyau; car quoique cette colonne ne porte qu'obliquement sur la cloison, cependant comme elle est retenue par les côtés, toute sa force se porte nécessairement sur la base qui la soutient; or il est visible que ces colonnes sont plus ou moins fortes à proportion de leurs hauteurs & de la grandeur ou de la petitesse des bases qui les soutiennent, & quelles sont sur ces bases le même effort que l'eau intérieure du vase feroit sur ces mêmes bases si on ôtoit l'eau supérieure, donc les parties des côtés d'un vase sont pressées par l'eau intérieure, lorsque les tuyaux & l'eau qu'ils contiennent sont ôtés, à proportion de leur grandeur & de leur distance à la surface supérieure CH (*Fig.* 15.) ou AH (*Fig.* 16.) de l'eau du vase.

COROLLAIRE VI.

39. Il suit du même Corollaire 4, que si sur le même orifice RH (*Fig.* 17.) fait sur un côté d'un vase AB, on adapte successivement différens tubes HC, HD, HE, &c. l'un perpendiculaire à l'horizon & les autres diversement inclinés, qu'après les avoir remplis d'eau jusqu'à la hauteur de la surface de l'eau du vase, on supprime l'eau du vase en mettant une cloison à l'orifice qui soutienne l'eau du tube qu'on aura mis de la même façon que l'eau du vase la soutenoit, cette cloison sera toujours également pressée, soit que le tube soit perpendiculaire à l'horizon, ou qu'il soit plus ou moins incliné, car l'eau de chacun de ces tubes étant en équilibre avec l'eau du vase lorsque l'orifice est ouvert, il s'ensuit que la colonne de l'un de ces tubes n'a pas plus de force

force que la colonne de tel autre qu'on voudra mettre en sa place.

COROLLAIRE VII.

40. Si l'orifice PQ étoit sur un côté incliné vers l'horison, on concevroit un autre vase FB (*Fig.* 18.) de même hauteur que le premier, & qui étant rempli d'eau communiquât avec AB par le même orifice; ainsi l'eau AB seroit en équilibre avec l'eau FB. C'est pourquoi si cet orifice étoit bouché, & qu'on ôtât l'eau du vase AB, la cloison PQ, c'est-à-dire la partie PQ soutiendroit l'effort de l'eau FB; or si on adaptoit à l'orifice PQ du vase FB un tube QR, & qu'on le remplit d'eau jusqu'à la hauteur de l'eau de l'un ou de l'autre vase, la colonne de ce tube soutiendroit aussi l'effort de l'eau FB, de même que l'eau AB le soutenoit, donc la partie PQ de l'un ou de l'autre vase soutient le poids d'une colonne qui peseroit sur elle, & dont la hauteur seroit égale à celle de la surface de l'eau de l'un ou de l'autre vase.

COROLLAIRE VIII.

41. Si l'orifice HO (*Fig.* 19.) est sur un côté perpendiculaire à l'horison, j'adapte un tube coudé TVH dont la branche VH est horizontale, & l'autre VT est perpendiculaire à l'horizon, & remplissant ce tube d'eau jusqu'à la hauteur de l'eau du vase, la colonne TY & la colonne AB sont en équilibre; ainsi ces deux colonnes pressent également la couche d'eau VO laquelle passe par l'orifice, donc si je mets une cloison à l'orifice, & que je supprime la colonne AB, cette cloison supportera la colonne TY, ainsi elle sera pressée en raison de sa grandeur HO & de la hauteur TY.

COROLLAIRE IX.

42. Un tube ER (*Fig.* 20.) ayant été adapté à un orifice lateral OR d'un vase HC plein d'eau, si sur le même orifice OR pris pour base on éleve en dedans un tube BP perpendiculaire à OR, & dont la hauteur BP soit égale à la hauteur AB du tube, je dis que l'eau du vase venant à monter dans le cylindre BP contrebalance l'eau du tube ER, laquelle est à la hauteur de l'eau du vase; car la masse du cylindre ER est égale à sa base EF multipliée par sa hauteur moyenne AB, & la masse du cylindre BP est égale à sa base OR multipliée par sa hauteur BP égale à la hauteur AB; or les hauteurs de ces masses sont égales, donc les masses sont

qu'ayant adapté deux tubes EF, HI *à ces ouvertures, on verse de l'eau dans le petit tube, l'eau du vase montera dans le grand jusqu'à ce qu'elle soit de niveau avec l'eau du petit, & alors l'une & l'autre eau seront en équilibre.*

Si le vase n'avoit que l'orifice HG, son fonds seroit pressé avec toute la force du parallelepipede AD, & la même chose arriveroit si le vase n'avoit que l'orifice E, parce que les liqueurs pressent le fonds d'un vase, non selon l'ouverture de ce vase, mais selon leurs hauteurs, & la grandeur du fonds (*N.* 29, 32); or lorsque le tube FE est adapté à l'ouverture E, si l'on vient à y verser de la liqueur, la hauteur de cette liqueur augmente, & par conséquent le fonds est plus pressé qu'il n'étoit auparavant, donc puisqu'il y a plus de pression, ce fonds reagit sur l'eau, ou la liqueur, avec plus de force, & par conséquent il faut que cette eau s'échappe par l'endroit où elle trouve de la liberté, donc elle doit monter par le tube HI, qui est le seul endroit où elle n'est point pressée, & elle y doit remonter jusqu'à ce qu'elle soit de niveau avec l'eau du tube EF parce que ce n'est qu'alors que la pression sur le fonds est égale de part & d'autre, à cause de l'égalité des hauteurs.

Quand les liqueurs des deux tubes sont de niveau il y a équilibre entr'elles, car si l'eau du tube HI descendoit en RS, il passeroit nécessairement une égale quantité d'eau qui monteroit de F en K, ainsi les deux masses RI, LF étant égales, leurs hauteurs FK, SI, seroient reciproques aux bases RS, LK; or ces hauteurs sont les vitesses des liqueurs HI, EF qui sont de niveau, & ces liqueurs ou colonnes sont entr'elles comme leurs bases VI, XF ou RS, LK, donc ces colonnes sont entr'elles reciproquement comme leurs vitesses, & par conséquent elles sont en équilibre.

COROLLAIRE XI.

44. Si nous supposons que la base HG du grand tube soit 60 fois plus grande que la base E, & que quand les liqueurs seront à la hauteur EX, la colonne XE pese une livre, la colonne HI pesera 60 ℔, & par conséquent une livre en tiendra en équilibre soixante; mais avant que cela arrive il faudra avoir versé par le tube EF soixante-une livre de liqueurs; de même si les liqueurs étoient de niveau à une hauteur double, la colonne du petit tube pesera deux livres, & elle en soutiendra 120, ce qui fait comme

on voit une augmentation de force qu'on peut pouſſer bien loin ; & qui peut même ſervir pour élever de grands fardeaux, mais avec beaucoup du tems employé.

Par exemple, ſuppoſons que la baſe HG ſoit 200 fois plus grande que la baſe E, ſi l'on introduit un piſton dans le tube HI juſqu'à l'ouverture HG, & qu'on le charge d'un poids qui avec le poids du piſton vaille 200 ℔, & qu'on verſe une livre d'eau dans le petit tube, cette eau ſera en équilibre avec le piſton ſans pouvoir l'élever ; mais pour peu qu'on augmente la quantité de l'eau le poids montera à une hauteur d'autant moindre que la quantité ſera moindre, par exemple, ſi l'on verſe une livre d'eau, il faut que cette livre ſe diſtribue aux deux tubes à proportion de leurs baſes, ainſi il faut la diviſer en 201 parties & il en paſſera 200 dans le grand tube & l'autre reſtera dans le petit ; or $\frac{1}{201}$ d'une livre dans le petit tube ne monte qu'à la 201e. partie de la hauteur d'une livre ; ainſi le poids ne ſe ſera élevé qu'à la 201e. partie de la hauteur d'une livre ; de même ſi on veut ſavoir combien il faudroit avoir verſé de livres d'eau pour faire que le poids ſoit monté à la hauteur d'une livre, on voit d'abord qu'à cauſe de la baſe du grand tube qui eſt 200 fois plus grande que celle du petit tube, il faut verſer 200 ℔ pour ce tube, & 1 ℔ pour le petit tube, & ainſi des autres.

COROLLAIRE XII.

45. S'il n'y a ſur le fond ſupérieur du vaſe que le ſeul orifice E, & qu'on ſuppoſe que la grandeur du fonds ſuperieur ſoit à celle de l'orifice comme 500 à 1, & qu'on mette dans le tube une livre d'eau, le fonds ſupérieur ſera chargé de 500 ℔ de plus, car la livre d'eau qui eſt dans le tube peut ſoutenir une colonne de 500 ou dont la baſe ſeroit cinq cent fois plus grande que la ſienne & la hauteur égale à la hauteur, & ainſi des autres.

COROLLAIRE XIII.

46. De tout ce que nous avons dit, il s'enſuit que les liqueurs peſent en tous ſens vers le bas, vers le haut, à droite, à gauche, obliquement, &c. & que les parties des vaſes qui les contiennent ſont toujours chargées à proportion de leurs grandeurs, & de leurs diſtances à la ſurface ſupérieure de l'eau.

CHAPITRE III.

De quelle maniere les Corps ſolides peſent dans les fluides qui ont moins de peſanteur ſpecifique qu'eux.

PROPOSITION IX.

47. *Si un corps eſt plongé dans un fluide qui a moins de peſanteur ſpecifique que lui, il perd une partie de ſon poids égale à une partie du fluide qui a même volume que ce corps.*

DEMONSTRATION.

Suppoſons qu'un pouce cubique de plomb ſoit enfoncé dans l'eau, il occupera la place d'un même volume d'eau ; or le poids de cette eau étoit ſoutenu par l'eau qui l'entouroit, donc une même quantité de poids du pouce cubique de plomb ſera ſoutenue par l'eau qui l'environne, & par conſéquent le plomb peſera moins de toute cette quantité.

COROLLAIRE I.

48. Donc 1°. ſi le même pouce cubique de plomb eſt enfoncé dans une liqueur qui a plus de peſanteur ſpecifique que l'eau, il perdra de ſon poids ; car un même volume de cette liqueur peſera plus qu'un pareil volume d'eau. 2°. Si deux corps homogenes peſent également dans l'air, & que l'un d'eux ſoit plongé dans l'eau & l'autre dans un fluide qui a plus de peſanteur ſpecifique que l'eau, le ſecond perdra plus de ſon poids que le premier ; & par conſéquent il n'y aura plus d'équilibre entr'eux. 3°. Les peſanteurs ſpecifiques de deux corps qui ont même volume étant entr'elles comme leur peſanteurs abſolues, la peſanteur ſpecifique d'un pouce cubique d'eau, eſt à la peſanteur ſpecifique d'un pouce cubique de plomb, comme la partie du poids que le plomb perd dans l'eau eſt à ſon poids total. 4°. Deux corps de même volume perdent une même quantité de poids, lorſqu'ils ſont plongés dans une même liqueur, mais celui qui a plus de peſanteur ſpecifique perd une partie moindre de ſa peſanteur, que la partie que l'autre perd de la ſienne. 5°.

Si deux corps ont même poids & différens volumes, celui qui a le plus grand volume, perd une plus grande partie de son *poids* que celui qui a moins de volume.

COROLLAIRE II.

49. Les gravités specifiques de différens fluides sont entr'elles comme les poids qu'un même solide perd lorsqu'il est plongé dans ces fluides; car les parties de ces fluides dont le solide prend la place, sont toutes d'égal volume, & leur poids sont égaux aux poids perdus par le solide, mais les poids des corps qui ont même volume, sont les pesanteurs specifiques de ces corps; donc, &c.

COROLLAIRE III.

50. Pour trouver les pesanteurs specifiques des différens fluides, on prend une balance AB (*Fig.* 22.) à l'une des extremités de laquelle on suspend un crochet A qui pese autant que le bassin C qui est de l'autre côté; on attache à ce crochet un crin de cheval d'où pend une bale de plomb E; on pese cette bale dans l'air, après quoi on la plonge successivement dans chaque fluide, & les parties qu'elle perd de son poids, sont les différentes pesanteurs specifiques de ces fluides.

Les densités étant comme les pesanteurs specifiques, le rapport de celles-ci étant trouvé, le rapport de celles-là est aussi connu.

COROLLAIRE IV.

51. On trouve de la même façon si les parties inférieures d'un même fluide sont comprimées par les supérieures, où si elles ne le sont pas; car si on plonge la bale de plomb dans ce fluide, ensorte qu'elle se trouve successivement à différentes hauteurs de la surface superieure, & que l'ayant pesé dans chacune de ses différentes situations, on trouve qu'elle perd toujours la même quantité, c'est une marque que les parties inférieures ne sont point comprimées; mais si le contraire arrive, les différentes pertes des poids que perdra la bale marqueront les différentes pesanteurs specifiques correspondantes aux différentes hauteurs, & par conséquent on connoîtra aussi les différentes densités de cette liqueur.

COROLLAIRE V.

52. C'eſt de la même maniere qu'on trouve le poids d'une liqueur contenue dans un vaiſſeau ; on meſure d'abord la capacité du vaiſſeau ſelon les regles de la Geometrie, ou ſelon celle du Jaugeage ; enſuite on ſuſpend au crochet de la balance un pouce cubique de plomb que l'on peſe dans l'air ; après quoi on le plonge dans la liqueur, & le peſant de nouveau, on examine qu'elle eſt la quantité de ſon poids qu'il a perdu, & cette quantité eſt le poids d'un pouce cubique de la liqueur ; c'eſt pourquoi il n'y a plus qu'à dire par regle de trois ; ſi un pouce cubique de la liqueur peſe tant, combien peſeront tant de pieds ou de pouces cubiques que le tonneau contient ?

PROPOSITION X.

53. *Si deux corps de poids égaux ont différens volumes, leur peſanteurs ſpecifiques ſont réciproquement comme les poids qu'ils perdent lorſqu'ils ſont plongés dans un même fluide.*

DEMONSTRATION.

Les peſanteurs ſpecifiques des corps également peſans, ſont réciproquement comme leur volumes (*N.* 11.) ; or leur volumes ſont comme les poids qu'ils perdent dans la même liqueur ; car ils perdent à proportion des volumes ; donc les gravités ſpecifiques de deux corps de même poids, ſont reciproquement comme les poids qu'ils perdent dans un même fluide.

COROLLAIRE I.

54. On trouve donc la gravité ſpecifique des différens ſolides en les peſant dans une même balance juſqu'à ce qu'ils ſoient en équilibre ; par exemple on met l'or d'un côté & l'argent de l'autre, après quoi on met un poids égal à l'un ou à l'autre dans un des baſſins C (*Fig.* 22.) ; & mettant le crochet A à la place de l'autre baſſin, on y ſuſpend l'or & on le plonge dans l'eau, examinant qu'elle eſt la quantité qu'il perd de ſon poids, enſuite on ôte l'or, & ſuſpendant l'argent à ſa place, on le plonge dans l'eau, & trouvant qu'il perd davantage, on conclut qu'il a une peſanteur ſpecifique moindre que celle de l'or, & que la peſanteur ſpecifique de l'argent eſt à celle de l'or, réciproquement comme le poids que l'or a perdu eſt au poids perdu par l'argent.

COROLLAIRE II.

55. C'eſt de cette façon qu'on a trouvé les peſanteurs ſpecifi-ques des ſolides ſuivans, ayant tous un volume égal au volum d'une maſſe d'or de 100 ℔.

LE MERCURE	71 ℔ $\frac{1}{2}$	*L'ETAIM pur*	38 ℔
LE PLOMB	60 $\frac{1}{2}$	*L'AIMANT*	26
L'ARGENT	54 $\frac{1}{2}$	*LE MARBRE*	21
LE LAITON	47 $\frac{1}{3}$	*LA PIERRE*	14
L'AIRAIN	45	*LE SOUFFRE*	12
LE FER	42	*LA CIRE*	5
L'ETAIM commun . . .	39	*L'EAU*	5

Dans cette Table, le rapport de l'eau au Mercure eſt comm 5 $\frac{1}{3}$ à 71 ℔ $\frac{1}{2}$, mais communément on ſe ſert du rapport à 14.

Par le moyen de cette Table, ſi l'on demande quelle eſt peſanteur d'un ſolide de plomb dont le volume eſt égal à volume d'eau de 200 ℔, on dit: comme la peſanteur ſpec-fique de l'eau eſt à la peſanteur ſpecifique du plomb; ainſi peſanteur abſolue 200 ℔ d'un tel volume d'eau, eſt à la peſan-teur abſolue d'un même volume de plomb; on prend donc dan la table les deux peſanteurs 5 $\frac{1}{3}$, 60 $\frac{1}{2}$, & faiſant la regle *on trou* 2268 ℔ $\frac{3}{4}$ pour la peſanteur du plomb.

De même, ſi l'on veut ſçavoir quel eſt le poids d'un volum d'étaim égal à un volume de plomb peſant 30 ℔, on dit: peſanteur ſpecifique du plomb eſt à la peſanteur ſpecifiq d'étaim commun comme la peſanteur abſolue 30 du plomb à la peſanteur abſolue de l'étaim de même volume; prena donc dans la Table les deux peſanteurs ſpecifiques 60 $\frac{1}{2}$, & 3 & faiſant la regle, on trouvera 19 $\frac{41}{121}$, & ainſi des autres.

PROPOSITION XI.

56. *Connoiſſant le poids d'un ſolide compoſé d'un mélange de de autres, & la quantité qu'il perd lorſqu'on le plonge dans un fluid trouver qu'elle eſt la quantité de l'un & de l'autre corps qui en dans le mélange.*

SOLUTIO

SOLUTION.

Suppoſons qu'une maſſe compoſée d'étaim & de plomb peſe 120 ℔, & qu'étant plongée dans l'eau elle perde 14 ℔, par les expériences qui ont été faites, nous ſçavons que 37 ℔ d'étaim perdent 5 ℔ dans l'eau, & que 23 ℔ de plomb perdent 2 ℔; c'eſt pourquoi je dis 37 ℔ d'étaim perdent 5 ℔, combien perdront 120 ℔, & faiſant la regle, je trouve $\frac{600}{37}$ ℔. Je dis de même ſi 23 ℔ de plomb perdent 2, combien perdront 120 ℔? & je trouve $\frac{240}{23}$ ℔. Je ſçai donc ce que perdent dans l'eau trois maſſes de même poids, l'une du mélange, l'autre d'étaim, & la troiſiéme de plomb.

Pour trouver la quantité du mêlange, je nomme p le poids de chaque maſſe, a le poids perdu par le mêlange, b le poids perdu par l'étaim qui eſt plus leger que le plomb, c le poids perdu par le plomb, & x le poids de l'étaim qui entre dans le mêlange; donc le poids de plomb qui entre dans ce mêlange eſt $p - x$.

Je dis: ſi le poids p d'étaim perd b, combien perdra la partie x de ce poids? & je trouve $\frac{bx}{p}$; je dis de même ſi le poids p de plomb perd c, combien perdra la partie $p - x$ de ce poids? & je trouve $\frac{pc - cx}{p}$; ajoutant donc enſemble ces deux parties perdues par les poids qui entrent dans le mêlange, la ſomme $\frac{bx}{p} + \frac{pc - cx}{p}$ eſt la perte faite par le mêlange, & par conſéquent j'ai $\frac{bx + pc - cx}{p} = a$; donc $bx - cx = ap - pc$, & $x = \frac{ap - pc}{b - c}$, d'où je tire $b - c, a - c :: p, x$, c'eſt-à-dire, la différence de la perte du poids p d'étaim à la perte du poids p de plomb, eſt à la différence de la perte du poids p de mêlange à la perte du poids p de plomb, comme le poids p eſt à la partie de l'étaim qui entre dans la compoſition, & mettant les valeurs ci-deſſus des lettres a, b, c, p, je trouve $x = 74$ ℔; donc il y a ſoixante-quatorze ℔ d'étaim, & par conſéquent 46 ℔ de plomb, & le tout enſemble fait le mêlange 120 ℔.

COROLLAIRE I.

57. C'eſt à peu près de cette façon qu'on peut connoître la bonté d'une certaine maſſe; par exemple, ſuppoſé que l'on ſçache que 23 ℔ de plomb perdent deux livres dans l'eau, & qu'on

le volume dont il a pris la place, sera soutenu par le fluide qui l'environnera, de même que le volume chassé en étoit soutenu, & par la même raison en quelqu'endroit du fluide qu'on mette le corps au-dessous de la surface supérieure plus ou moins près du fonds ou des côtés, il y sera soutenu de la même façon; mais si le corps a plus de pesanteur specifique que le fluide dans lequel il est jetté, il ne sera jamais soutenu par le fluide qui l'environnera, parce qu'il pese plus que le volume dont il occupera la place, & par conséquent il descendra jusqu'au fonds.

COROLLAIRE. II.

65. Si l'on pousse un corps au-dessous de la surface supérieure d'un fluide qui a plus de pesanteur specifique que lui, ce corps étant abandonné à lui-même sera repoussé par le fluide qui l'environne avec une force égale à la quantité dont la pesanteur d'un volume du fluide égal au volume du corps surpasse la pesanteur du corps; car le fluide environnant soutenoit le fluide chassé avec une force égale à la pesanteur du fluide chassé, & par conséquent cette force étant plus grande que la pesanteur du corps qui prend la place du fluide chassé, doit repousser ce corps avec l'excès qu'elle a sur la pesanteur du corps; donc, &c.

COROLLAIRE III.

66. Si l'on met dans le fonds d'un vase un corps qui a moins de pesanteur specifique qu'un certain fluide, & qu'on vienne à verser peu à peu du fluide dans le vase, ce fluide n'enlevera le corps que lorsqu'il l'environnera de façon que le volume du fluide qui seroit mis à la place du corps pesera un peu plus que ce corps.

COROLLAIRE IV.

67. La gravité specifique du corps qui a moins de pesanteur specifique que le fluide, est à la gravité specifique du fluide comme le volume de la partie enfoncée dans le fluide est au volume du corps; car le corps & la partie du fluide dont il occupe la place pesant également, leur pesanteurs specifiques sont réciproquement comme leur volumes (*N.* 11.), mais le volume de la partie du fluide dont le corps occupe la place est égal au volume de la partie du corps enfoncée dans le fluide; donc la

pesanteur specifique du corps est à la pesanteur specifique du fluide, comme le volume de la partie du corps enfoncée dans le fluide est au volume du corps.

COROLLAIRE V.

68. Si deux corps qui pesent également sont jettés dans un fluide qui a plus de pesanteur specifique qu'eux, leur parties qui s'enfoncent dans ce fluide, ont des volumes égaux ; car l'un & l'autre font sortir un volume du fluide qui pese autant que l'un ou l'autre ; donc ces deux volumes de fluide sont égaux, mais ces volumes sont égaux aux volumes des parties qui s'enfoncent ; donc, &c.

D'où il suit que si les deux corps ont des volumes égaux, les pesanteurs des parties enfoncées dans le fluide seront égales, & si les volumes sont inégaux, les pesanteurs des parties enfoncées seront réciproquement comme les volumes des corps. Supposons que le volume du premier corps soit 4, & le volume du second 8 ; si le volume de la partie enfoncée du premier est 1, celui de la partie enfoncée du second sera aussi 1 ; c'est pourquoi supposant que la pesanteur de l'un ou de l'autre corps soit 16, la pesanteur de la partie enfoncée du premier sera donc 4, c'est-à-dire le quart de 16, parce que le volume de la partie enfoncée n'est que le quart du volume total, & la pesanteur de la partie enfoncée du second sera 2 ou le $\frac{1}{8}$ de 16, à cause que le volume de cette partie n'est que le $\frac{1}{8}$ du volume total ; donc la pesanteur de la partie enfoncée du premier est à la pesanteur de la partie enfoncée du second comme 4 à 2, ou comme 8 à 4, c'est-à-dire reciproquement comme le volume du second corps au volume du premier.

COROLLAIRE VI.

69. Si deux corps égaux en volume sont jettés dans un fluide qui a plus de pesanteur specifique qu'eux, les volumes de leur parties enfoncées seront entr'eux comme les pesanteurs specifiques des corps ; car les parties du fluide qu'ils chassent ont des pesanteurs absolues égales aux pesanteurs absolues des corps ; mais les deux corps ayant même volume leur pesanteurs absolues sont comme leur pesanteurs specifiques ; donc les parties du fluide chassées sont entr'elles comme les pesanteurs specifiques des corps ; or les parties chassées étant homogenes entr'elles sont comme leur

volumes, lesquels sont égaux aux volumes des parties enfoncées; donc les volumes des parties enfoncées sont entr'eux comme les pesanteurs specifiques des corps.

COROLLAIRE VII.

70. Connoissant le volume de la partie d'un solide enfoncée dans un fluide, on connoîtra la pesanteur de ce solide en pesant un volume du fluide égal au volume de la partie enfoncée.

Supposons que le volume d'un corps enfoncé dans l'eau soit de 80 pieds cubiques; je pese un pied cubique d'eau, & trouvant par exemple qu'il pese 70 ℔, je dis: si un pied cubique d'eau pese 70 ℔, combien pesera un volume de cette même eau qui a 80 pieds cubiques? & faisant la regle, je trouve 5600 ℔ pour le poids de ce volume, & par conséquent le solide pese aussi 5600 ℔.

Et si l'on connoissoit la pesanteur du corps, & qu'on demandât quel est le volume de la partie qui doit s'enfoncer dans l'eau, on chercheroit un volume d'eau qui pesât autant que le corps, & ce volume seroit celui de la partie qui doit s'enfoncer.

Supposons que le corps pese 5600 ℔, je pese un pied cubique d'eau, & trouvant 70 ℔, je dis si 70 ℔ d'eau ont un volume d'un pied cubique, quel volume auront 5600 ℔? & faisant la regle je trouve 80 pieds cubiques pour le volume d'eau que la partie enfoncée chassera, & par conséquent cette partie aura 80 pieds cubiques de volume.

Enfin si le poids & le volume du corps étant connu, l'on demande quelle force il faut employer pour tenir ce corps tout entier au-dessous de la surface de l'eau, on cherchera le poids d'un volume d'eau égal au volume du corps, on en retranchera le poids d'un volume d'eau qui pese autant que le corps, & le reste sera la force qu'il faudroit employer, à cause que cette force est égale à celle que l'eau feroit pour faire remonter le corps si on l'abandonnoit à lui-même (N. 65.).

Supposons que le corps pese 5600 ℔, & que son volume soit 4480 pieds cubiques, un pareil volume d'eau sera donc 313600 ℔, c'est-à-dire le produit de 4480 pieds par le poids 70 ℔ d'un pied cubique d'eau, je retranche de ce poids d'eau le poids 5600 ℔ d'un volume d'eau égal qui pese autant que le corps, & le reste 30800 ℔ marqueroit la force qu'il faudroit employer.

fonds du vaſe qui le contient ſoit égale à la force qui ſoutiendroit l'autre corps pour l'empêcher d'aller au fonds ; je dis que ſi on jette dans le fluide, les deux corps unis fermement, ils reſteront entre la ſurface & le fonds du vaſe.

DEMONSTRATION.

La force qui empêcheroit le premier corps A de ſurnager (*Fig.* 25.) eſt égale à la force de l'eau qui repoufferoit ce corps vers la ſurface, & la force qui empêcheroit le ſecond B d'aller au fonds eſt égale à la force de l'eau qui le pouſſeroit pour le faire deſcendre ; donc quand ces deux corps étant unis enſemble ne forment qu'un ſeul corps, cette maſſe ſe trouve pouſſée par deux forces de l'eau qui ſont égales & qui ont des directions contraires, ainſi ces deux forces ſe contrebalancent & ſoutiennent la maſſe ſans la faire ni monter ni deſcendre.

COROLLAIRE.

74. En quelque endroit que la maſſe des deux corps ſoit miſe entre la ſurface & le fonds du vaſe, elle ne montera ni ne deſcendra, mais ſi on vient à deſunir les corps, dans l'inſtant le premier montera vers la ſurface, & le ſecond deſcendra vers le fonds, parce qu'en ce cas les forces de l'eau agiront ſéparement ſur deux maſſes ſéparées.

PROPOSITION XVII.

75. *La force qui tient un corps ſous la ſurface d'un fluide qui a plus de peſanteur ſpecifique que ce corps, eſt au poids de ce corps, comme le volume de la partie qui ſurnageroit ſi le corps n'étoit pas retenu eſt au volume de la partie qui ſeroit enfoncée dans le fluide.*

DEMONSTRATION.

Le volume du fluide égal à la grandeur de la partie enfoncée a autant de peſanteur que le corps (*N.* 63) ; donc le poids de ce volume doit être au poids d'un autre volume du même fluide égal à la grandeur du corps, comme le volume eſt au volume, à cauſe que le fluide eſt homogene dans toutes ſes parties, & par conſéquent le poids d'un volume eſt au poids de l'autre comme la grandeur de la partie enfoncée eſt à la grandeur de tout le corps ; ainſi l'excès dont le poids du premier volume eſt ſurpaſſé par le poids du ſecond, eſt comme l'excès dont la grandeur de la partie en-

les pesanteurs absolues, & par conséquent les pesanteurs specifiques du corps & du volume du fluide sont entr'elles comme le poids du corps est au poids qu'il a perdu ; mais la puissance qui soutient le corps doit être égale au poids qui lui reste, ou à la différence du poids total au poids perdu, donc cette puissance est au poids du corps comme la différence des pesanteurs specifiques est à la pesanteur specifique du corps.

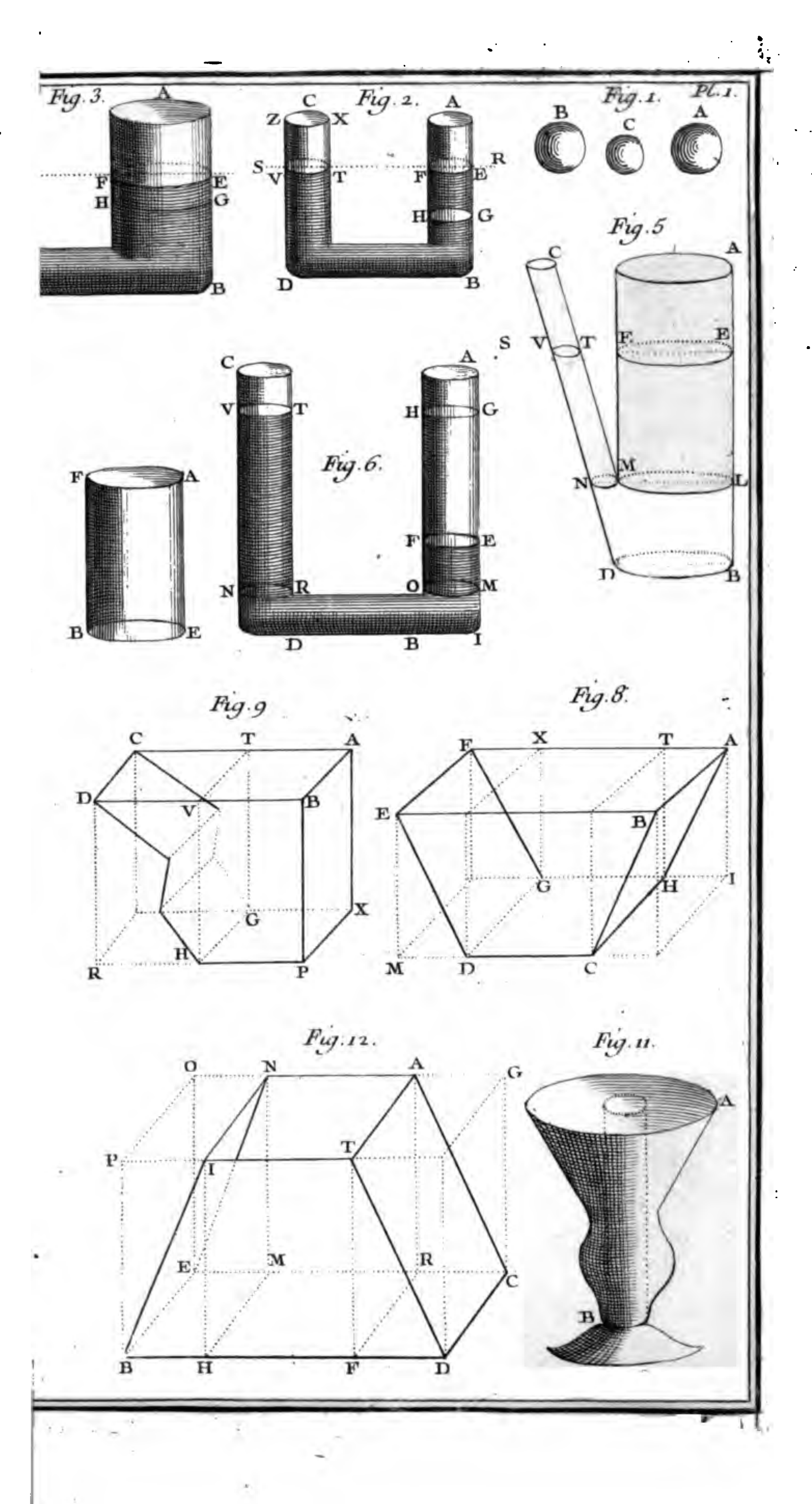
COROLLAIRE III.

78. Connoissant le poids d'un corps & les pesanteurs specifiques de ce corps, & d'un fluide qui a moins de pesanteur specifique que lui ; connoissant aussi la pesanteur specifique d'un autre corps qui a moins de pesanteur specifique que le fluide, on trouvera aisément qu'elle est la partie de ce second corps qu'il faut joindre au premier, afin que les deux ensemble étant jettés dans le fluide restent entre la surface & le fonds.

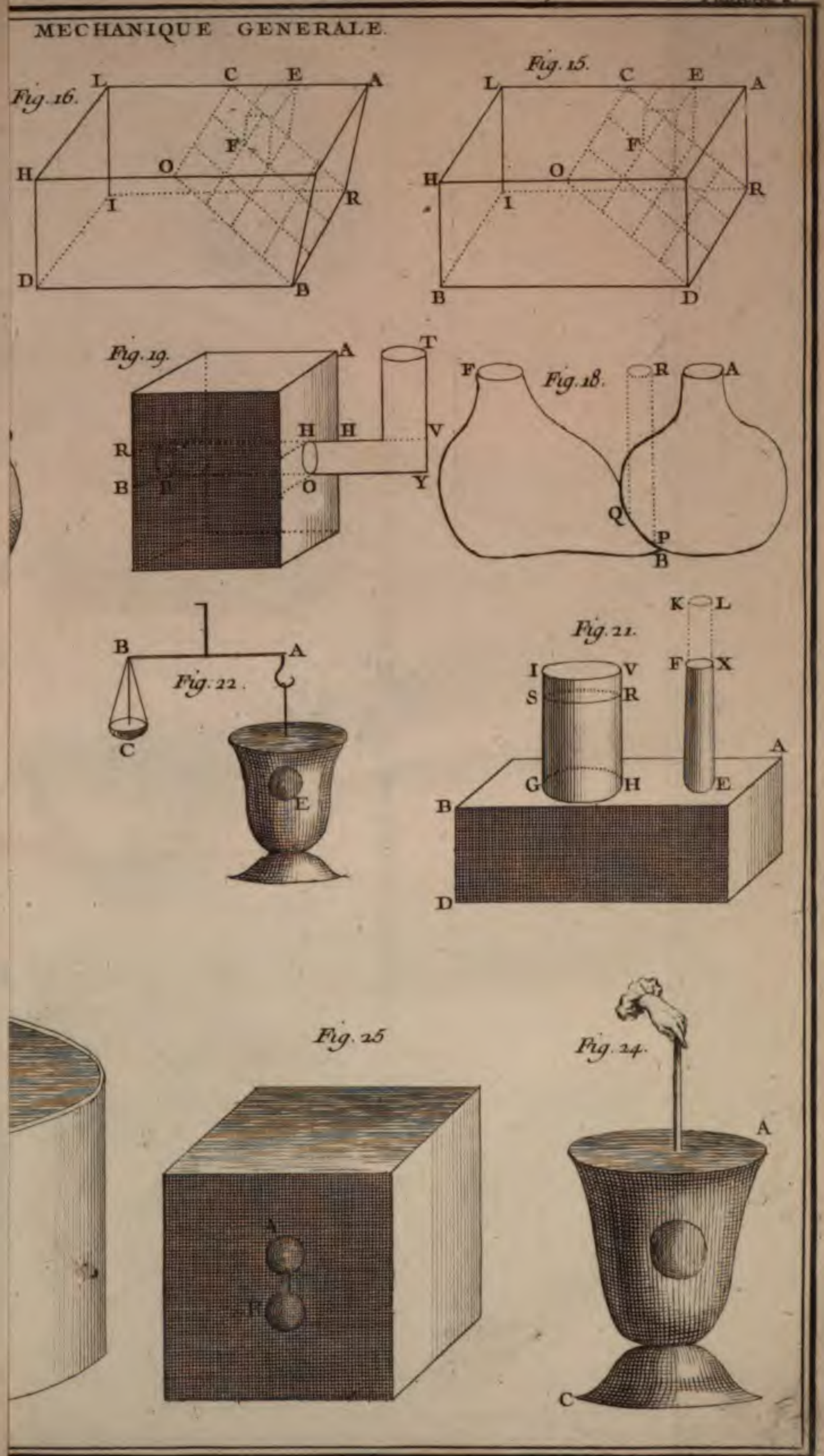
soit la pesanteur du premier corps $=60$ ℔, & le rapport de sa pesanteur specifique à la pesanteur specifique du fluide comme 3 à 1 ; donc par le Corollaire précédent la pesanteur specifique du corps est à la différence des pesanteurs specifiques du corps & du fluide, comme le poids du corps est à la puissance qui doit le soutenir entre la surface & le fonds ; faisant donc $3, 2 :: 60, \frac{120}{3} = 40$, ce dernier terme est la puissance qui doit le soutenir.

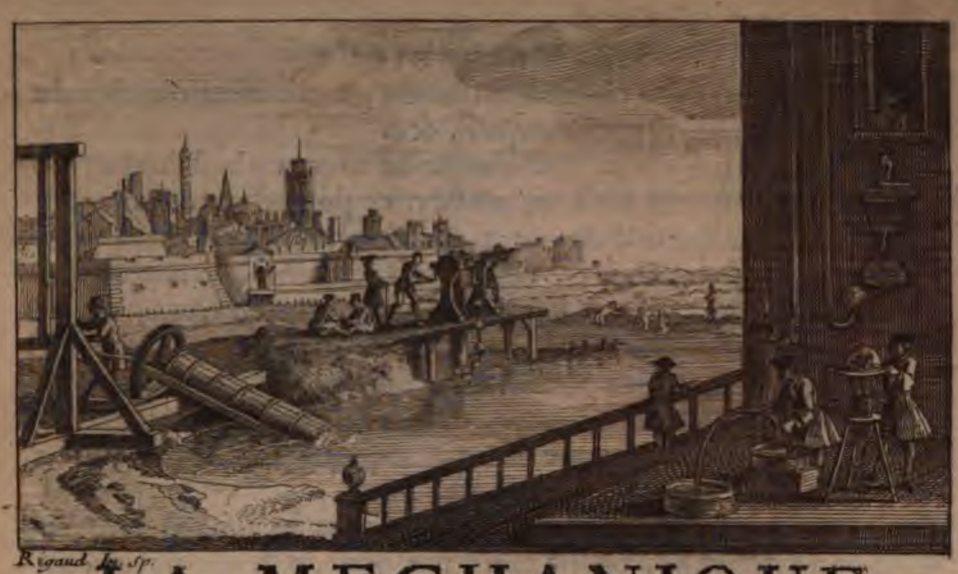
Soit le rapport de la pesanteur specifique du second corps à la pesanteur specifique du fluide comme 1 à 4 ; je dis par le premier Corollaire la différence des pesanteurs specifiques est à la pesanteur specifique du corps comme la puissance qui doit tenir ce corps entre la surface & le fonds, est à la pesanteur absolue de ce corps ; or cette puissance doit être 40 pour contrebalancer la puissance 40 qui doit soutenir l'autre corps, à cause que ces puissances ont des directions contraires ; faisant donc $3, 1 :: 40, \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$, ce quatriéme terme est la quantité de poids du second corps qu'il faut ajoûter au premier 60 ℔ ; ainsi la masse totale $73\frac{1}{3}$ étant jettée dans le fluide, se tiendra entre la surface & le fonds, car l'effort que le fluide fera pour faire descendre la partie 60 étant égal à celui que le fluide fera pour faire monter la partie $13\frac{1}{3}$, à cause que ces deux efforts sont égaux aux deux puissances dont l'une soutiendroit 60 & l'autre pousseroit $13\frac{1}{3}$, il y aura un parfait équilibre entre ces deux forces.

Si on augmentoit le poids du second corps de la moindre


Pl. 1.
Fig. 1.
B
C
A
Fig. 2.
Z
C
X
A
S
V
T
F
E
R
H
G
D
B
Fig. 3.
A
F
E
H
G
B
Fig. 5
C
A
S
V
T
F
E
M
N
L
D
B
Fig. 6.
C
A
V
T
H
G
F
A
F
E
N
R
O
M
B
E
D
B
I
Fig. 9
C
T
A
D
V
B
G
X
H
R
P
Fig. 8.
F
X
T
A
E
B
G
H
I
M
D
C
Fig. 12.
O
N
A
G
P
I
T
E
M
R
C
B
H
F
D
Fig. 11.
A
B

MECHANIQUE GENERALE.





LA MECHANIQUE GENERALE,

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE, L'HYDROSTATIQUE, ET L'HYDRAULIQUE, &c.

LIVRE TROISIE'ME.

De l'Airométrie.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1°. L'*AIROMETRIE* est la Science qui apprend à mesurer l'air, en entendant ici sous le nom de mesure, tout ce qu'on appelle ordinairement *rapport*; ainsi quand on dira que l'air contenu dans un vase est plus ou moins dilaté, ou plus ou moins condensé selon certaines circonstances, & qu'on déterminera le rapport de ces

droite ou à gauche, ou enfin directement vis-à-vis de l'ouverture, on sent toujours la sortie de l'air.

7. Si après avoir souflé dans une vessie de porc jusqu'à ce qu'elle soit médiocrement enflée ; on serre fortement son ouverture pour empêcher l'air d'en sortir, & qu'en cet état on l'approche du feu, elle s'enflera de plus en plus, & enfin elle crevera en faisant un grand bruit ; mais si avant quelle creve on la retire d'auprès du feu, elle se desenflera & se reduira même sous un moindre volume si on la transporte dans un endroit qui soit plus froid que celui où l'on étoit lorsqu'on a souflé dedans.

Donc l'air peut se rarefier par la chaleur & se condenser par le froid, car on ne peut attribuer qu'à ces deux causes les différens effets dont nous venons de parler.

8. Qu'on prenne un tube AC (*Fig.* 1.) dont la longueur excede 32 pieds, qu'on bouche l'ouverture inférieure, & qu'après l'avoir rempli d'eau on le plonge dans un vase DE plein d'eau en le tenant perpendiculaire à l'horison, enfin qu'on vienne à deboucher l'ouverture inférieure, l'eau du tube descendra en forçant celle du vase de se repandre jusqu'à ce qu'il ne reste plus que la quantité d'eau que le vase DE peut contenir, & toute cette eau aura sa surface supérieure de niveau, selon ce qui a été dit dans l'hydrostatique ; maintenant qu'on retire le tube, & qu'après avoir bouché de nouveau son ouverture inférieure C on le remplisse encore d'eau, qu'ensuite on bouche l'ouverture supérieure A, & qu'en cet état on le plonge verticalement dans l'eau du vase DE, on éprouvera en debouchant l'ouverture inférieure C, que l'eau du tube descendra jusqu'à ce qu'elle soit au-dessus de la surface DH de l'eau du vase, à une hauteur BN égale à 32 pieds, après quoi elle ne descendra plus.

Or de cette expérience on peut aisément tirer une preuve convainquante qu'une colonne d'air, dont le diametre est égal au diametre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la surface DH jusqu'au lieu le plus élevé de l'air, ne pese pas plus que la colonne d'eau BN, ce que je demontre ainsi.

Supposons que les côtés du vase DE soient perpendiculaires au fonds du vase, & qu'ils soient prolongés jusqu'au plan horisontal RS qui passe par la surface supérieure TN de l'eau qui est dans le tube ; supposons aussi que le fonds VE soit 50 fois plus grand que l'ouverture C du tube, il est clair que si on remplit d'eau le vase prolongé jusqu'en RS, l'eau comprise entre RS &

les 49 colonnes, & mettant à leur place un air qui s'étende depuis la base DH des colonnes jusqu'à la plus grande hauteur de l'air, il arrive que cet air soutienne le seul poids de la colonne BN, il s'ensuivra nécessairement que cet air ne pesera pas plus que les 49 colonnes, & qu'ainsi sa 49e partie, c'est-à-dire une colonne d'air qui a même base que BN, & dont la hauteur est la plus grande que l'air puisse avoir, ne pese pas plus que la base BN, il ne s'agit donc que de faire voir que l'air extérieur ne soutient que le seul poids de la colonne BN, ce qui est évident par la maniere dont j'ai dit qu'il faut faire l'expérience; car le tube étant absolument plein d'eau avant qu'on debouche l'ouverture inférieure, & cette eau venant à descendre de A en T, l'air supérieur à cette colonne se trouve soutenu par le bouchon qui est en A, lequel pese sur les parois du tube & sur la main de celui qui le soutient, & nullement sur la colonne BN, donc, &c.

9. Une colonne d'eau de 32 pieds est en équilibre avec une colonne de mercure, de même base & d'environ 28 pouces de hauteur, ainsi que les expériences journalieres le font voir, donc une colonne d'air de même base est en équilibre avec une colonne d'environ 28 pouces de mercure, & pese autant qu'elle.

10. La masse totale de l'air qui environne la terre se nomme *atmosphere*, & une colonne de cet air qui est en équilibre avec une colonne de même base, & qui contient environ 28 pouces de mercure, ou 32 pieds d'eau, se nomme *poids de l'atmosphere.*



CHAPITRE II.

Du Ressort de l'Air.

PROPOSITION I.

11. *LE Ressort de l'Air inférieur est égal au poids de toute la masse d'air supérieure.*

DEMONSTRATION.

L'air supérieur presse le ressort de l'air, or tout ressort, ainsi qu'il a été dit dans le premier Livre est égal à la force qui le comprime, & l'air inférieur n'est comprimé par le superieur que parce que celui-ci pese ; donc le ressort de l'aïr inférieur est égal au poids de l'air superieur.

COROLLAIRE I.

12. Donc si l'on suppose qu'une portion d'air inférieur ait dix pieds quarrez de base, son ressort est égal au poids d'une colonne d'air superieur qui a 10 pieds quarrez de base ; mais une pareille colonne d'air pese autant qu'une colonne d'eau de même base & de 32 pieds de hauteur (*N.* 8.) ou qu'une colonne de mercure de même base & d'environ 28 pouces de hauteur ; donc le ressort de l'air est égal au poids de la colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, ou de la colonne de mercure de 28 pouces.

COROLLAIRE II.

13. Si l'air est renfermé sans être ni plus ni moins comprimé que l'air extérieur, son ressort est le même que s'il n'étoit point renfermé ; donc l'air renfermé presse la surface intérieure du corps qui le renferme, de même que l'air exterieur presse la surface exterieure de ce corps.

COROLLAIRE III.

14. Puisque l'air inférieur est comprimé, il s'ensuit que s'il trouve aux environs quelqu'endroit qui soit moins comprimé, son ressort se détendra de ce côté ; donc s'il se trouve un vase

bien clos vuide d'air, & qu'on vienne à l'ouvrir, l'air extérieur entrera dans le vase & en remplira la capacité.

COROLLAIRE IV.

15. Dans toutes les couches d'air qui ont une même hauteur la densité est égale partout ; car la densité plus ou moins grande vient du plus ou du moins de compression ; or l'atmosphere étant partout à égale hauteur, toutes les parties égales d'une couche d'air inférieure sont également comprimées, puisqu'elles supportent toutes des colonnes d'air superieur dont les bases sont égales & les hauteurs aussi ; donc la densité est la même dans toutes ses parties, & pour en être mieux convaincu, il n'y a qu'à faire réflexion que si cela n'étoit pas, les parties les plus denses ayant plus de ressort que les moins denses, ne manqueroient pas de surmonter celles-ci, ce qui mettroit bientôt l'égalité dans toutes les parties.

COROLLAIRE V.

16. Soit un vase AB (*Fig.* 2.) ayant un orifice CD auquel soit adapté un robinet EF par l'ouverture duquel l'air entre dans le vase ; soit adapté au tuyau du robinet un cylindre creux FH, ayant une ouverture O avec son couvercle P & un piston IL; que le tout soit fait de façon que le piston IL en avançant dans le cylindre ne donne point de passage à l'air, non plus que le robinet lorsqu'il est fermé, & le couvercle H lorsqu'il est sur l'ouverture O ; je ferme le robinet & je pousse le piston jusqu'à ce qu'il soit parvenu en F, puis fermant l'ouverture O & ouvrant le robinet, je retire le piston jusqu'en H, il est clair par le Corollaire III. que l'air du vase se dilate, & qu'il s'en répand une partie dans le cylindre FH dont elle remplit la capacité, & que l'air qui reste dans le vase & celui qui est dans le cylindre ont des densités égales par le Corollaire IV ; ainsi l'air qui reste dans le vase est diminué de toute la quantité qui est comprise dans le cylindre FH ; je ferme le robinet, & découvrant l'ouverture O, je pousse de nouveau le piston jusqu'en F, ce qui fait sortir l'air qui étoit contenu dans le cylindre ; je referme l'ouverture O, & r'ouvrant le robinet, je tire le piston jusqu'en H ; d'où il arrive que l'air se dilatant encore davantage, se communique dans FH, & que par conséquent la quantité qui reste

vase à la capacité du cylindre ; car ces deux airs ayant la même densité, leur masses étoient comme leur volumes ; or après le premier coup de piston, l'air du vase s'est communiqué dans le cylindre, & dans l'un & l'autre il a la même dilatation, ainsi l'air du vase est encore à celui du cylindre comme la capacité du vase à la capacité du cylindre ; & par conséquent ajoûtant chaque conséquent à son antécédent, l'air du vase plus celui du cylindre est à l'air du vase comme la capacité du vase plus celle du cylindre est à la capacité du vase ; mais l'air du vase plus celui du cylindre est l'air primitif, & l'air du vase seul est le premier reste ; donc $x, y :: S, s$, de même après le second coup de piston, l'air qui étoit resté dans le vase s'est communiqué de nouveau dans le cylindre, & par conséquent ce premier reste est au second encore comme la somme des capacités est à la capacité du vase ; donc $y, z :: S, s$, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente $xy, zy :: S^2, s^2 :: S^n, s^n$, & divisant la premiere raison par y, j'ai $x, z :: S^n, s^n$, c'est-à-dire l'air primitif est à ce qui reste dans le vase après le second coup de piston, comme la somme des capacités élevée à l'exposant 2 qui est le nombre des coups de piston, est à la capacité du vase élevée au même exposant.

COROLLAIRE I.

19. Si la capacité du vase est égale à celle du cylindre, on a $s = \frac{1}{2} S$, & par conséquent $y = \frac{1}{2} x$, c'est-à-dire, l'air primitif est au premier reste comme 1 est à $\frac{1}{2}$; or le premier reste est au second encore comme 1 à $\frac{1}{2}$; donc l'air primitif est au second reste comme 1 est à $\frac{1}{4}$, & par la même raison, on trouvera que l'air primitif est au troisiéme reste comme 1 à $\frac{1}{8}$, au quatriéme reste comme 1 à $\frac{1}{16}$, & ainsi de suite.

De même si la capacité du vase est double de celle du cylindre, on trouvera que l'air primitif est au premier reste comme 1 à $\frac{2}{3}$, qu'il est au second reste comme 1 à $\frac{4}{9}$, au troisiéme comme 1 à $\frac{8}{27}$, au quatriéme comme 1 à $\frac{16}{81}$, &c. & on trouveroit de même le rapport de l'air primitif, si la capacité du vase étoit encore plus grande par rapport à celle du cylindre.

Si la capacité du vase est à celle du cylindre comme 1 à 2, l'air primitif sera au premier reste comme 1 à $\frac{1}{3}$, au second comme 1 à $\frac{1}{9}$, au troisiéme comme 1 à $\frac{1}{27}$, &c.

Si la capacité est à celle du cylindre comme 1 à 3, l'air pri-

mitif sera au premier reste comme 1 à $\frac{1}{4}$, au second comme 1 à $\frac{1}{16}$, au troisiéme comme 1 à $\frac{1}{64}$, &c. & on trouvera de même le rapport de l'air primitif aux restes, quand la capacité du vase seroit encore moindre.

Les restes dans le premier cas forment la suite $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. dans le second cas leur suite est $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$, &c. dans le troisiéme elle est $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c. & dans le quatriéme elle est $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, &c. & ainsi des autres ; or toutes ces suites peuvent être poussées à l'infini ; car en prenant la moitié de la moitié, ou les deux tiers des deux tiers, ou le $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$, & ainsi de suite à l'infini, il reste toujours quelque chose ; donc ce n'est qu'à l'infini qu'on peut faire sortir tout l'air qui est dans le vase, cependant comme en multipliant les coups de piston, on peut parvenir à un reste si petit par rapport à l'air primitif qu'on peut le négliger, il est visible qu'on parviendra plutôt à ce reste en employant des cylindres qui ayent plus de capacité que le vase ; car on vient de voir dans la quatriéme suite qu'après trois coups de piston, le reste est $\frac{1}{64}$, au lieu que dans la premiere, ce reste est $\frac{1}{8}$, c'est-à-dire qu'il est huit fois plus grand que $\frac{1}{64}$, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

20. Connoissant la capacité du vase & celle du cylindre, & le nombre des coups de piston qu'on a donnés, on connoîtra le rapport de l'air primitif au dernier reste en cette sorte.

Je nomme le dernier reste $= 1$, & par la Proposition presente, j'ai s^n, S^n :: 1, x, d'où je tire $x = \frac{S^n}{s^n}$, & par conséquent l'air primitif est au dernier reste comme $\frac{S^n}{s^n}$ est à 1.

Soit la capacité du vase $= 36$, celle du cylindre $= 44$, & le nombre des coups de piston $= 2$; donc la somme des capacités est $36 + 44 = 80$; or le quarré de 80 est 6400, & celui de 36 est 1296, donc l'air primitif est $\frac{6400}{1296}$, c'est-à-dire cet air est au dernier reste conmme $\frac{6400}{1296}$ est à 1, ou comme 6400 est à 1296, ou comme 400 à 81.

COROLLAIRE III.

21. On peut se servir ici fort utilement des logarithmes non-seulement pour éviter toutes les multiplications qu'il faut faire

pour élever la somme des capacités, & la capacité du vase à l'exposant marqué par le nombre des coups de piston, mais encore pour résoudre quelques questions qui seroient fort embarrassantes sans ce secours.

Il faut donc se rappeller que si quatre nombres sont en proportion geometrique, leur logarithmes sont en proportion arithmetique; que si on multiplie deux nombres l'un par l'autre, le logarithme du produit est la somme des logarithmes des deux nombres; que si on divise un nombre par un autre, on aura le logarithme du quotient en retranchant du logarithme du dividende le logarithme du diviseur; que si on éleve un nombre à une puissance quelconque, on aura le logarithme de cette puissance en multipliant le logarithme du nombre par l'exposant de la puissance; & que si on veut extraire une racine quelconque d'un nombre, il faut pour avoir le logarithme de cette racine, diviser le logarithme du nombre par l'exposant ou le dégré de cette racine. Tout ceci a été démontré dans notre *Arithmetique des Geometres*, & nous allons en faire l'application en avertissant que nous mettrons la lettre l pour marquer le logarithme d'un nombre; ainsi le logarithme de a sera la, celui de a^2 sera $2la$, celui de a^n sera nla, celui de $a^{\frac{1}{3}}$ sera $\frac{1}{3}\,la$, & ainsi des autres.

Soit donc le nombre des coups de piston $= 6$, la capacité du vase $= 460$, celle du cylindre $= 580$, la somme des capacités sera donc 1040, & pour resoudre le problême ainsi que nous avons fait dans le Corollaire précédent, il faudroit élever 1040 & 460 à la sixiéme puissance, puis diviser l'une par l'autre, ce qui seroit extrement long & fort ennuyant. Pour éviter donc cet embarras, je cherche dans les logarithmes 3.0170333, 2.6627578 de la somme des capacités & de la capacité du vase; je multiplie ces logarithmes par 6 à cause qu'il falloit élever leur nombres à la sixiéme puissance, ce qui donne 18.1021998, 15.9765468, je retranche le second du premier à cause qu'il falloit diviser les deux puissances l'une par l'autre, & le reste est 2.1256530. Je cherche ce logarithme dans les tables, & je trouve qu'il appartient à un nombre qui est entre 133 & 134, & me servant des regles que j'ai enseignées dans l'Ouvrage que je viens de citer, je trouve $133\frac{55}{100}$; donc l'air primitif est au dernier reste comme $133\frac{55}{100}$ est à 1, ou comme 13355 est à 100, ou comme 2671 est à 20.

COROLLAIRE IV.

22. Connoiſſant la capacité du vaſe & celle du cylindre, on connoîtra combien de coups de piſton il faut donner afin que l'air primitif ſoit au dernier reſte dans ún rapport donné en cette maniere.

Je nomme l'air primitif $=p$, le dernier reſte $=r$, la ſomme des capacités $=S$, & la capacité du vaſe $=s$; donc j'ai $p, r :: S^n, s^n$, & il s'agit de trouver la valeur de n, ce qui ſeroit fort embarraſſant ſi les logarithmes ne nous fourniſſoient un moyen aiſé de le découvrir, car mettant au lieu des quatre termes de cette proportion leur quatre Logarithmes, j'ai $lp, lr :: nlS, nls$, & comme c'eſt ici une proportion arithmetique, je fais la ſomme des extrêmes, & celle des moyens, ce qui donne $lp + nls = lr + nlS$, d'où je tire $lp - lr = nlS - nls$, & $n = \frac{lp - lr}{lS - ls}$.

Soit donc la raiſon de l'air primitif au dernier reſte, ou la raiſon p, r, égale à 2671, 20, la capacité S du vaſe & du cylindre 1040, & la capacité s du vaſe 460, je prens les logarithmes 3, 4268365, 1, 3010300 des nombres 2671, 20, & retranchant le ſecond du premier, le reſte eſt 2, 1258065 $= lp - lr$; je prens les logarithmes 3, 0170333, 2, 6627578 de 1040 & 460, & retranchant le ſecond du premier, le reſte eſt 0, 3842755 $= lS - ls$; je diviſe le reſte 2, 1258065 par le reſte 0, 3842755, & le quotient $6 = \frac{lp - lr}{lS - ls} = n$, donc il faut 6 coups de piſton.

COROLLAIRE V.

23. Connoiſſant le nombre de coups de piſton, le rapport de l'air primitif au dernier reſte, & la capacité du vaſe, on connoîtra la capacité du cylindre en cette ſorte.

Je nomme le nombre de coups de piſton $=n$, le rapport de l'air primitif au dernier reſte p, r; la capacité du vaſe $=c$ & celle du cylindre $=x$, donc j'ai $p, r :: \overline{c + x}^n, c^n$, & mettant les logarithmes de ces nombres, j'ai $lp, lr :: nl\overline{c + x}, nlc$, & faiſant la ſomme des extrêmes, & celle des moyens, j'ai $lp + nlc = lr + nl\overline{c + x}$, ou $lp - lr = nl\overline{c + x} - nlc$ ou $\frac{lp - lr}{n} = l\overline{c + x} - lc$, ou enfin $\frac{lp - lr}{n} + lc = l\overline{c + x}$; or $c + x$ étant la ſomme des capacités

cités $l\overline{c+x}$ eſt le logarithme de cette ſomme, donc je puis trouver cette ſomme par le moyen des tables, & cette ſomme étant trouvée je n'ai qu'à en retrancher la capacité du vaſe, & le reſte me donnera la capacité du cylindre.

Soit donc le nombre des coups de piſton $=6$, le rapport de l'air primitif au dernier reſte 2671, 20, & la capacité du vaſe $=460$; je prens dans les tables les logarithmes 3, 4268365, 1, 3010300 des nombres 2671, 20, ou du rapport p, r; je retranche le ſecond du premier & le reſte eſt $2,1258065 = lp - lr$; je diviſe ce reſte par $6 = n$ & le quotient eſt $\frac{lp - lr}{n} = 0,3543010$, j'ajoute à ce quotient le logarithme $2,6627578 = lc$, & la ſomme eſt $3,0170589 = \frac{lp - lr}{n} + lc$, & ce logarithme appartient au nombre 1040, donc 1040 eſt la ſomme des capacités, & par conſéquent $1040 - 460 = 580$ eſt la capacité du cylindre.

COROLLAIRE VI.

24. Si l'on a deux machines dont les deux vaſes ſoient égaux, & les deux cylindres, inégaux, & qu'après un certain nombre de coups de piſtons donnés dans le premier cylindre, & un autre nombre de coups donnés dans le ſecond, il ſe trouve que le rapport de l'air primitif au dernier reſte ſoit le même dans l'une & l'autre machine, je dis que le nombre des coups de piſtons dans la premiere machine eſt au nombre des coups dans la ſeconde, reciproquement comme dans la ſeconde la différence des logarithmes de la capacité du vaſe & de la ſomme des capacités eſt à la même différence dans la premiere.

Je nomme la raiſon de l'air primitif au dernier reſte p, r, la capacité du vaſe $= c$, le nombre des coups de piſton dans la premiere machine $=$ N, & le nombre des coups de piſton dans la ſeconde $= n$, la capacité du cylindre de la premiere machine H, & la capacité de celui de la ſeconde $= h$.

J'ai donc dans la premiere machine $p, r :: \overline{c+H}^{N}, c^{N}$, & dans la ſeconde $p, r :: \overline{c+h}^{n}, h^{n}$, donc $\overline{c+H}^{N}, c^{N} :: \overline{c+h}^{n}, h^{n}$, & mettant les logarithmes au lieu des nombres, j'ai $Nl\overline{c+H}, Nlc :: nl\overline{c+h}, nlh$, & faiſant la ſomme des extrêmes, & celle des moyens, j'ai $Nl\overline{c+H} + nlh = nl\overline{c+h} + Nlc$, ou $Nl\overline{c+H} - Nlc = nl\overline{c+h} - nlh$, d'où je tire $N, n :: l\overline{c+h} - lh, l\overline{c+H} - lH$.

COROLLAIRE VII.

25. Pour connoître le poids abſolu de l'air primitif, il faut peſer le vaſe avec ſon robinet avant de donner aucun coup de piſton, enſuite il faut donner un coup de piſton & peſer de nouveau le vaſe; la différence des poids ſera la quantité de l'air qui aura paſſé dans le cylindre; or le reſte de l'air qui eſt dans le vaſe ayant la même denſité que celui qui eſt paſſé dans le cylindre, il eſt viſible que ces deux airs ſeront entr'eux comme les capacités du vaſe & du cylindre; on dira donc par regle de trois: comme la capacité du cylindre eſt à celle du vaſe, ainſi le poids de l'air qui eſt paſſé dans le cylindre eſt au poids du premier reſte; & ajoûtant enſemble ces deux poids, on aura le poids de l'air primitif.

CHAPITRE III.

De la compreſſion de l'Air & de ſon équilibre avec les autres fluides.

26. DE même qu'on peut tirer l'air d'un vaſe & l'en faire ſortir tout-à-fait, de même auſſi on peut le comprimer de plus en plus; car ſi lorſque le piſton eſt en H (*Fig.* 2.) on ferme l'ouverture O & on ouvre le robinet, il eſt viſible qu'en pouſſant le piſton juſqu'en F, l'air du cylindre eſt obligé de paſſer dans le vaſe, ce qui ne peut arriver à moins que l'air du vaſe & celui du cylindre ne ſe compriment mutuellement juſqu'à n'occuper enſemble que la ſeule capacité du vaſe; or ſi après ce premier coup de piſton on ferme le robinet, & qu'ayant découvert l'ouverture O on retire le piſton juſqu'en H, il eſt encore clair que l'air extérieur entrera dans le cylindre FH, c'eſt pourquoi refermant l'ouverture, & ouvrant de nouveau le robinet, le piſton pouſſé vers G obligera l'air du cylindre d'entrer dans le vaſe où il ſe fera une nouvelle compreſſion; ainſi en multipliant les coups de piſton, on pourra comprimer l'air de plus en plus.

PROPOSITION III.

27. *L'air primitif du vaſe eſt à l'air comprimé après un nombre quelconque de coups de piſton, comme la capacité du vaſe eſt à la ſom-*

me de la capacité du vase, & du produit de la capacité du ~~vase~~ cylindre par le nombre de coups de piston.

DEMONSTRATION.

Après les coups de piston le vase contient non-seulement l'air primitif, mais encore l'air que le cylindre contient pris autant de fois qu'on a donné de coups de piston, mais l'air primitif est à l'air qui étoit contenu dans le cylindre avant le premier coup de piston, comme la capacité du vase à la capacité du cylindre, à cause que ces deux airs avoient la même densité, & par la même raison l'air primitif est à l'air qui entre dans le cylindre après le premier coup de piston, comme la capacité du vase à la capacité du cylindre, & ainsi des autres, donc l'air primitif est à tous les airs qui ont rempli successivement le cylindre, comme la capacité du vase à la capacité du cylindre multipliée par le nombre des coups de piston; donc puis qu'après tous les coups de piston, le vase contient non-seulement toutes les quantités d'air qui ont rempli successivement le cylindre, mais encore l'air primitif, il s'ensuit que l'air primitif est à l'air contenu dans le vase après le coup de piston, comme la capacité du vase à la somme de la capacité du vase & du produit de la capacité du cylindre par le nombre des coups de piston.

Nommant la capacité du vase $=a$, celle du cylindre $=c$, & le nombre des coups de piston $=n$, l'air primitif est donc à l'air comprimé comme a est à $a+nc$.

COROLLAIRE I.

28. Connoissant le rapport de l'air primitif à l'air comprimé, & le rapport de la capacité du vase à la capacité du cylindre, on connoîtra le nombre de coups de piston qu'il faut donner pour comprimer l'air au degré où il est, en cette sorte.

Je nomme le rapport de l'air ptimitif à l'air comprimé $=p, t$, celui de la capacité du vase à la capacité du cylindre $=a, c$, & le nombre des coups de piston $=x$, donc $p, t :: a, a+cx$ (*N.* 26), & par conséquent $pa+pcx=at$, ou $pcx=at-pa$, d'où je tire $x=\frac{at-pa}{pc}=\frac{\overline{t-p}\times a}{pc}$.

Soit $p=1$, $t=7$, $a=1$, $c=2$, donc $t-p=7-1=6$, $\overline{t-p}\times a=6\times 1=6$, $pc=1\times 2=2$, & par conséquent $x=\frac{\overline{t-p}\times a}{pc}$ $=\frac{6}{2}=3$.

COROLLAIRE II.

29. Connoissant la capacité du vase, le nombre des coups de piston, & la raison de l'air primitif à l'air comprimé, on connoîtra la capacité du cylindre en cette maniere.

Je nomme la raison de l'air primitif à l'air comprimé $= p, t$, la capacité du vase $= a$, le nombre des coups de piston $= n$, & la capacité du cylindre $= x$, donc $p, t :: a, a + nx$, & par conséquent $pa + pnx = at$, ou $pnx = at - pa$, d'où je tire $x = \frac{at - pa}{pn}$ $= \frac{\overline{t-p} \times a}{pn}$.

Soit $p = 1, t = 7, a = 1, n = 3$, donc $t - p = 7 - 1 = 6$, $\overline{t-p} \times a = 6 \times 1 = 6, pn = 1 \times 3 = 3$, & par conséquent $x = \frac{\overline{t-p} \times a}{pn} = \frac{6}{3} = 2$.

Et si l'on connoissoit la capacité du cylindre, & qu'on demandât la capacité du vase, on nommeroit la capacité du cylindre $= c$, celle du vase $= x$, & l'on auroit $p, t :: x, x + nc$, donc $px + pnc = tx$, ou $pnc = tx - px$, d'où l'on tireroit $x = \frac{pnc}{t-p}$.

Soit $p = 1, t = 7, n = 3$, & $c = 2$, donc $pnc = 1 \times 3 \times 2 = 6$, $t - p = 7 - 1 = 6$, & par conséquent $\frac{pnc}{t-p} = \frac{6}{6} = 1 = x$.

PROPOSITION IV.

30. *Les différentes compressions d'une même masse d'air sont entr'elles comme les poids qui les compriment.*

DEMONSTRATION.

Les compressions étant causées par les différens poids dont la masse est comprimée, sont par conséquent les effets de ces poids; or les effets sont proportionnels à leurs causes, donc les compressions sont entr'elles comme les poids comprimants.

Nota. 1°. Que je fais abstraction des changemens qui peuvent arriver dans l'air inférieur par la chaleur ou le froid, ou par quelqu'autre cause. 2°. Que je suppose que la compression ne soit ni extrémement grande ni extrémement petite, car le ressort de l'air ayant une force finie, il est visible qu'après un certain degré de compression, il ne sauroit être comprimé davantage, non plus qu'il ne sauroit se dilater davantage après un certain degré de dilatation.

COROLLAIRE I.

31. De-là il suit, 1°. Que les ressorts d'une même masse d'air qui souffre différentes compressions, sont entr'eux comme ces compressions, ou comme les poids qui compriment la masse, c'est-à-dire que le ressort est plus ou moins grand, selon que la masse est plus ou moins comprimée, parce que le ressort est toujours égal à la force qui le comprime. 2°. Que les différentes densités de cette masse sont entr'elles comme les compressions; car le plus ou le moins de compression cause le plus ou le moins de densités. 3°. Que les différens volumes de cette masse sont entr'eux reciproquement comme les compressions; car la masse étant toujours la même, un volume plus grand a moins de densité qu'un volume moins grand, & par conséquent les volumes sont reciproques aux densités, mais les densités sont comme les compressions ou comme les poids, donc les volumes sont aussi reciproques aux compressions ou aux poids. 4°. Que les ressorts sont reciproques aux volumes, à cause que les ressorts sont comme les densités. 5°. Qu'en supposant égalité de masse, l'air qui est sur les parties les plus basses de la surface de la terre, est plus comprimé que celui qui est sur les parties les plus élevées, à cause que les colonnes d'air qui forment la compression de l'air inférieur sont plus hautes sur les parties les plus basses que sur les parties les plus élevées.

REMARQUE.

32. Quoique la vérité de cette proposition soit assez évidente; cependant M. Mariotte en a fait deux expériences qu'il rapporte dans ses Essais de Physique, & qu'on ne sera pas fâché de trouver ici.

Premiere expérience. Prenez un tuyau recourbé ABCD (*Fig.* 3); dont les deux branches soient paralleles, & dont l'une ait 8 pieds de hauteur, & l'autre douze pouces, c'est-à-dire AB = 8 pieds, DC = 12 pouces; ces deux branches doivent être d'égal diametre dans toutes leurs parties, & l'ouverture D de la petite doit être exactement bouchée. Tenez ce tuyau dans une position perpendiculaire à l'horison, & versez-y peu à peu du mercure par l'ouverture A, jusqu'à ce que le fonds qui fait la communication soit rempli, ensorte que la surface BC soit de niveau; dans cet état l'air DC n'est ni plus ni moins comprimé qu'il l'étoit au-

[illegible], mais qu'il a toujours son même volume. Continuez à verser du mercure, mais doucement, de peur que le choc qui [illegible], si on le versoit [illegible], ne [illegible] de nouveau [illegible] qui est déja comprimé, & vous trouverez que quand le mercure sera monté à la hauteur de 4 pouces dans la branche DC, il sera à la hauteur de 14 pouces de plus dans la branche AB, c'est-à-dire à 18 pouces au dessus du mercure qui remplit le coude.

Or pour rendre raison de ceci, il faut observer que quand il n'y avoit point de mercure l'air de la branche DC étoit comprimé par une colonne d'air de même base que la base de cette branche, & dont la hauteur étoit égale à celle de l'atmosphere, & que par conséquent cet air de la branche DC étoit chargé d'un poids égal à cette colonne de l'atmosphere ou à une colonne de mercure de même base & de 28 pouces de hauteur; or quand le mercure est dans la branche AB à la hauteur de 14 pouces au-dessus de celui de la branche DC, l'air de la branche DC ne resiste pas seulement au poids de l'atmosphere; mais encore à la colonne de mercure de 14 pouces laquelle tend à se mettre de niveau avec la colonne de 4 pouces qui est dans la branche DC; ainsi l'air de la branche DC supporte 28 + 14 pouces de mercure = 42 pouces, & au lieu de 12 pouces de volume que cet air avoit, il n'en a plus que 8; mais 8 est à 12, comme 28 est à 42; donc le volume d'après la compression de l'air de la branche DC est au volume d'avant la compression, reciproquement comme le poids dont l'air DC étoit chargé avant la compression, [illegible] chargé après la compression; or la [illegible] sont reciproquement comme les densités, & par [illegible] compressions sont reciproquement comme les [illegible] compressions sont comme les poids.

[illegible] du mercure jusqu'à ce qu'il soit monté [illegible] à la hauteur de 6 pouces, vous trouverez [illegible] la branche AB sera monté à 28 pouces [illegible] au dessus du mercure qui remplit [illegible] la branche DC sera chargé & du [illegible] de mercure, & par conséquent [illegible] de mercure, & son volume [illegible] seconde compression, ne sera plus [illegible] donc le volume 6 après la seconde compression [illegible] avant cette compression, recipro-

quement comme le poids 42 dont l'air étoit chargé avant la compreſſion, eſt au poids 56, dont il ſe trouve chargé après la compreſſion; d'où il eſt aiſé de conclure que les deux compreſſions ſont comme les poids 42, 56; & on trouveroit toujours la même choſe en continuant à verſer du mercure.

Seconde expérience. Prenez un long tuyau AC (*Fig.* 1.) de 40 pouces de longueur, & dont l'extrémité A ſoit exactement fermée, verſez-y 27 pouces $\frac{1}{2}$ de mercure, afin qu'il y reſte douze pouces & demi d'air, bouchez l'ouverture C avec le doigt, & plongez ce tuyau dans un vaſe DE, enſorte qu'il ſoit dans une ſituatation verticale, & qu'il ne s'enfonce que d'un pouce dans le mercure du vaſe; debouchez l'ouverture C, & vous trouverez que le mercure du tuyau deſcendra juſqu'à ce qu'il ne ſoit plus qu'à 14 pouces de hauteur au-deſſus du mercure du vaſe; ainſi comme le tuyau eſt de 40 pouces, & qu'il y en a un qui eſt enfoncé dans le vaſe & 14 qui ſont remplis de mercure, il reſtera 25 pouces d'air; or il n'y en avoit que 12 & $\frac{1}{2}$, donc cette maſſe d'air de 12 pouces & demi s'eſt dilatée.

Pour rendre raiſon de ceci, il faut obſerver que s'il n'y avoit point d'air dans le tuyau, le poids de l'atmoſphere ou une colonne d'air de même baſe que le tuyau & de la hauteur de l'atmoſphere ſoutiendroit 28 pouces de mercure; donc puiſqu'il n'y a que 14 pouces de mercure, il s'enſuit qu'il n'y a que la moitié du poids de l'atmoſphere qui ſoutient le mercure, & que l'autre moitié ſoutient les 25 pouces d'air dilaté; or ſi cet air n'étoit pas dilaté, il ſoutiendroit tout ſeul le poids de l'atmoſphere, donc ſon reſſort après la dilatation eſt à ſon reſſort avant la dilatation comme la moitié du poids de l'atmoſphere eſt au poids entier, & par conſéquent réciproquement comme le volume 12 $\frac{1}{2}$ avant la dilatation au volume 25 après la dilatation; mais les reſſorts ſont comme les denſités & les denſités comme les compreſſions, donc la compreſſion de l'air dilaté eſt à la compreſſion de l'air non dilaté comme le poids que ſouffre l'air dilaté eſt au poids que l'air non dilaté ſouffriroit.

Que ſi vous faites une ſeconde expérience en ne mettant que 16 pouces de mercure pour laiſſer 24 ~~pieds~~ pouces d'air, vous trouverez en faiſant comme il a été dit, que le mercure deſcendra juſqu'à la hauteur de 7 pouces au-deſſus de la ſurface du mercure du vaſe, ainſi à cauſe du pouce enfoncé dans le mercure, il y aura dans le tuyau 32 pouces d'air dilaté; or les ſept pouces de

dans les plus basses ; car comme l'atmosphere pese moins dans les parties les plus élevées, le mercure monte aussi moins dans le Barometre.

PROPOSITION V.

38. *Si un tuyau* AC (Fig. 1.) *dont l'ouverture* A *est bien fermée, est plongé perpendiculairement dans un vase plein d'eau ou d'une autre liqueur, plus il est enfoncé, & plus l'air qu'il contient se trouve comprimé.*

DEMONSTRATION.

L'air contenu dans le tuyau AC est en équilibre avec le poids de l'atmosphere, c'est-à-dire avec une colonne d'air de même base que la sienne, de même hauteur que l'atmosphere ; or quand l'eau du vase surmonte exterieurement l'ouverture C, l'air du tuyau est chargé non-seulement du poids de l'atmosphere, mais encore d'une colonne d'eau de même base que celle du tuyau, & dont la hauteur est égale à la quantité dont l'eau exterieure surmonte l'orifice, donc il faut nécessairement que cet air se comprime, & qu'une partie de l'eau du vase entre dans le tuyau.

COROLLAIRE I.

39. Le ressort de l'air comprimé est égal au poids de l'atmosphere plus au poids de la colonne d'eau de même base qui surmonte le niveau de l'eau qui est entrée dans le tuyau, ce qui est évident, puisque le ressort est toujours égal à la force qui le comprime.

Et si on ajoute de part & d'autre le poids de l'eau qui est entrée dans le tuyau, le ressort de l'air comprimé plus le poids de l'air entré dans le tuyau est égal au poids de l'atmosphere, plus le poids de la colonne de même base que le tuyau & qui surmonte le niveau de l'ouverture C.

COROLLAIRE. II.

40. Connoissant la capacité d'un tuyau ou le volume de l'air qu'il contient, la pesanteur de la colonne d'eau de même base qui surmonte son ouverture inférieure, & le poids de l'atmosphere, on connoîtra le volume de l'air comprimé & celui du fluide qui est entré dans le tuyau en cette sorte.

Je nomme le poids de la colonne d'eau extérieure qui surmonte

le niveau de la base du tuyau $=g$, son volume $=c$, le poids de l'atmosphere $=a$ lequel est égal au ressort de l'air primitif du tuyau, le volume de cet air primitif $=b$, & le volume du fluide entré dans le tuyau $=x$; donc le volume de l'air comprimé $=b-x$.

Or le ressort de l'air primitif est au ressort de l'air comprimé réciproquement comme le volume de l'air comprimé est au volume de l'air primitif; donc $b-x, b :: a, \frac{ab}{b-x} =$ ressort de l'air comprimé; d'autre part le fluide qui est entré dans le tuyau étant homogene au fluide extérieur, le volume c est au volume x comme la pesanteur g est à la pesanteur de l'eau entrée dans le tuyau; donc $c, x :: g, \frac{gx}{c} =$ pesanteur de l'eau entrée dans le tuyau; ainsi par le Corollaire précédent, j'ai $\frac{ab}{b-x} + \frac{gx}{c} = a + g$, & en réduisant tout au même dénominateur commun $bc - cx$, je trouve $abc + gbx - gx^2 = abc + bgc - acx - gcx$, d'où je tire en transposant à l'ordinaire $gx^2 - acx - gcx - gbx = -bgc$, & divisant par g, je trouve $x^2 - cx - bx - \frac{acx}{g} = -bc$, & faisant $c + b + \frac{ac}{g} = d$, j'ai $x^2 - dx = -bc$; j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}dd$ de la moitié du coefficient d du second terme, & j'ai $x^2 - dx + \frac{1}{4}dd = \overline{\frac{1}{4}dd - bc}$, & tirant la racine quarrée, j'ai $\frac{1}{2}d - x = \sqrt{\frac{1}{4}dd - bc}$, & $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - bc}$.



CHAPITRE IV.

De la Raréfaction & Condensation de l'Air, & de sa Densité.

PROPOSITION VI.

41. LA *chaleur augmente le ressort de l'Air.*

DEMONSTRATION.

Si l'on presente au feu une vessie de Porc médiocrement enflée, & dont l'air ne puisse sortir, on trouve qu'elle s'enfle de plus en plus ; donc l'air qui y est renfermé presse plus l'air extérieur qu'il ne faisoit auparavant, or l'air ne presse que par son ressort ; donc le ressort est augmenté par la chaleur.

COROLLAIRE.

42. Si l'on retire la vessie d'auprès du feu, elle reprend peu à peu son premier état ; donc le ressort de l'air s'affoiblit, & par conséquent le froid diminue le ressort.

PROPOSITION VII.

43. *Faire entrer une liqueur dans un vase dont l'ouverture est extrement petite.*

SOLUTION.

Tenez le vase fort près du feu pendant un certain tems, plongez ensuite son ouverture dans la liqueur, & vous trouverez que cette liqueur entrera facilement dans la capacité du vase.

DEMONSTRATION.

Tandis que le vase est près du feu, l'air qu'il contient se raréfie, & il en sort d'autant plus par son ouverture, qu'on le laisse échauffer plus long-tems ; or quand on le plonge dans la liqueur, le ressort de l'air diminue, & comme cet air a moins de masse qu'il n'avoit auparavant, le froid lui fait prendre un volume moindre

qu'il n'avoit avant qu'on presentât le vase au feu, de sorte que cet air n'étant plus en équilibre avec le poids de l'atmosphere, l'eau qui est pressée par ce poids entre dans la capacité du vase où elle trouve moins de résistance.

PROPOSITION VIII.

44. *Soit un globe de verre* AB (Fig. 4.) *ayant à son ouverture* B *un tube* BC *bien soudé ; qu'on verse de l'eau par le tube en laissant une certaine quantité d'air, qu'on bouche ensuite l'ouverture* C *avec le doigt, & qu'on plonge le tube dans un vase* EF *plein d'eau, si l'on vient à déboucher l'ouverture* C, *l'eau descendra jusqu'à ce qu'elle soit à une certaine hauteur* HD *; or je dis que si l'air exterieur devient plus froid ou plus pesant, l'eau montera plus haut, & que si au contraire l'air exterieur devient plus chaud ou moins pesant, l'eau descendra plus bas.*

DEMONSTRATION.

En premier lieu, si l'air extérieur devient plus froid, sa froideur se communique au verre & à l'air intérieur ; donc l'air intérieur se condense & son ressort se diminue, donc aussi cet air cede à l'impression que l'air extérieur fait sur l'eau pour l'obliger de monter.

En second lieu, si l'air extérieur devient plus pesant, la force avec laquelle il presse devient aussi plus grande, & l'air intérieur dont nous supposons que la force n'est point augmentée doit nécessairement ceder.

En troisiéme lieu, si l'air extérieur devient plus chaud, sa chaleur se communique à l'air intérieur par le moyen du verre qu'elle échauffe ; donc l'air intérieur se dilate, & son ressort devenant plus fort, il oblige l'eau de descendre, & il ne faut pas dire que l'air extérieur étant aussi dilaté par la chaleur devroit empêcher l'eau de descendre ; car quoiqu'il soit vrai que l'air extérieur se dilate, & que son ressort augmente, ce ressort ne porte pas directement sur l'eau de même que celui de l'air intérieur auquel le verre résiste de tous côtés, mais il s'étend vers les colonnes laterales, de façon qu'au lieu de presser davantage l'eau qui lui est inférieure, il la presse moins, puisqu'il la presse avec une moindre masse.

En quatriéme lieu, si l'air extérieur devient plus leger, l'eau descend encore, car à mesure que l'air extérieur devient plus

leger, l'air intérieur qui ne change point selon l'hypotèse, devient plus pesant par rapport à l'air extérieur qu'il n'étoit auparavant, & par conséquent l'équilibre doit se rompre, & l'air intérieur doit l'emporter sur l'extérieur.

COROLLAIRE I.

45. Si l'on ne fait attention qu'à la nature de l'air qui est un corps à ressort, il est naturel de dire que les densités de l'air inférieur doivent être proportionnelles à leur compressions ou aux poids qui le compriment, à moins que ces compressions ne fussent plus grandes ou moindres que la force du ressort, mais comme le ressort de cet air peut être diminué ou augmenté par le froid ou par le chaud, ou par quelqu'autre cause on doit dire que les densités de l'air exterieur ne sont pas toujours proportionnelles aux poids qui compriment cet air.

COROLLAIRE II.

46. Si l'air inférieur devient plus dense, les poids des corps graves qui sont dans cet air diminue par la raison que les corps pesans perdent plus de leur poids dans les liqueurs qui ont plus de pesanteur specifique ou de densité, que dans les liqueurs qui en ont moins, & si l'air inférieur devient moins dense, les corps graves qui sont dans cet air deviennent plus pesans.

COROLLAIRE III.

47. Si deux corps de différentes pesanteurs specifiques sont en équilibre dans un air moins dense, & que l'air devienne tout-à coup plus dense, ils cesseront d'être en équilibre, car chacun de ces corps ayant encore plus de pesanteur specifique que cet air plus dense, ils perdront l'un & l'autre une partie de leur poids égale au poids du volume d'air dont ils occupent la place, ainsi qu'il a été dit dans l'*Hydrostatique* ; or le corps qui a plus de pesanteur specifique que celui avec qui il étoit en équilibre, a nécessairement moins de volume, car quand les poids sont égaux, les pesanteurs specifiques sont réciproquement comme les volumes ; donc le poids qui a plus de pesanteur specifique occupe dans l'air plus dense une place moindre que l'autre, & par conséquent il perd moins de son poids ; ainsi l'équilibre doit se rompre & le corps de moindre volume doit l'emporter sur l'autre.

Le contraire arriveroit si les deux corps étant en équilibre

dans un air d'une certaine denſité, cet air commençoit à devenir moins denſe ; car le corps qui a plus de peſanteur ſpecifique ne gagneroit qu'un poids proportionnel au volume d'air plus denſe dont il occupoit la place, & comme l'autre gagneroit auſſi un poids proportionnel au volume du même air dont il occupoit la place, & que ce volume ſeroit plus grand, il s'enſuit que le corps qui a moins de peſanteur ſpecifique gagneroit auſſi plus de poids.

Au reſte, quand nous diſons ici que les deux corps ſont en équilibre, il faut entendre qu'ils ſont mis dans les baſſins d'une balance dont les deux bras ſont égaux, afin que l'égalité des poids ne vienne que de leur peſanteur abſolue, & non pas de ce que l'on pourroit gagner ſur l'autre par la plus grande longueur de ſon bras.

CHAPITRE V.

Du mouvement de l'Air.

48. PAR le mouvement de l'air nous entendons ici le mouvement ſenſible de l'air, à qui nous avons donné le nom de *vent.*

Il n'eſt guéres de Philoſophe qui n'ait tâché de découvrir l'origine & les cauſes des vents. Ariſtote & la plûpart des Anciens ont cru que les vents procédoient des exhalaiſons de la terre, leſquelles ſe reflechiſſent après s'être élevées juſqu'à la moyenne region de l'air. M. Deſcartes a penſé que les vents pourroient être cauſés tantôt par les nuées, qui étant ſur le point de ſe reſoudre en pluye tombent les unes ſur les autres, & tantôt par les dilatations des vapeurs, leſquelles ſont beaucoup plus grandes à proportion que les dilatations de l'air; ces opinions ont été ſolidement refutées par M. Mariotte dans ſon traité du *Mouvement des Eaux*, où il nous donne ſur cette matiere des conjectures qui paroiſſent beaucoup plus conformes à la nature du ſujet.

Selon cet illuſtre Académicien il y a trois cauſes principales des vents & quelques autres particulieres & moins importantes, les trois principales ſont 1°. Le mouvement de la terre de l'Occident à l'Orient. 2°. Les viciſſitudes des rarefactions & des condenſations

densations de l'air, selon que le soleil l'échauffe ou cesse de l'échauffer. 3°. Les vicissitudes des élevations de la Lune vers son apogée, & de ses descentes vers son perigée. Les causes particulieres sont 1°. Quelques élevations extraordinaires d'exhalaisons & de vapeurs en certains lieux de la terre; 2°. La chute des grosses pluyes ou de quelques grêles épaisses. 3°. Les eruptions de quantité d'exhalaisons sulphurées & salpetreuses dans les tremblemens de terre. 4°. Les soudaines fontes des neiges dans les hautes montagnes. Par ces causes tant générales que particulieres combinées de plusieurs façons, l'Auteur explique tous les vents avec beaucoup de savoir & d'érudition, comme on peut voir dans l'ouvrage cité.

Comme nous ne nous attachons dans cet Ouvrage qu'à ce qui regarde la mechanique, nous ne nous arrêterons aussi qu'à la seconde cause principale, c'est-à-dire aux vicissitudes des rarefactions & des condensations de l'air de quelques causes qu'elles puissent provenir.

PROPOSITION IX.

49. *Si le ressort de l'air devient plus foible en quelque endroit, le ressort des parties voisines se debandera de ce côté, & il se formera du vent.*

DEMONSTRATION.

L'air étant un fluide qui par son ressort tend à s'étendre de toutes parts, il est visible que si quelqu'une de ces parties vient à s'affoiblir, & par conséquent à se condenser, le ressort des parties voisines doit agir de ce côté & former un flux qui remplisse l'espace que la partie condensée a laissé; donc si sur quelque partie de la surface de la terre l'air vient a se condenser, l'air des parties voisines se repandra de ce côté & formera un vent plus ou moins sensible, selon que la condensation sera plus ou moins grande, ou qu'elle se sera faite plus ou moins rapidement.

COROLLAIRE I.

50. Si sur quelque partie de la surface de la terre le poids de l'atmosphere est moins grand que dans les parties voisines, l'air inférieur des parties voisines se trouvant plus comprimé a aussi plus de ressort, donc il doit se repandre du côté où l'air inférieur

en a moins, & par conféquent il fe fera du vent fur cette partie de la terre.

COROLLAIRE II.

51. L'air plus denfe ayant plus de poids que l'air moins denfe, il s'enfuit que s'il fe trouve quelque endroit où l'air foit plus leger que fur les endroits voifins, le vent doit fouffler de ce côté.

COROLLAIRE III.

52. Si une portion d'air vient à être échauffée par le foleil ou par quelqu'autre caufe, fon reffort s'augmente & s'étend fur les parties voifines, & par conféquent le vent doit fouffler vers ces parties; mais fi ce même air après avoir été échauffé vient à fe refroidir, fon reffort s'affaiffe, & les parties voifines reprenant le deffus, le vent fouffle fur l'air qui fe condenfe.

PROPOSITION X.

53. *Connoiffant l'efpace qu'un fluide pouffé par la force de l'air parcourt dans un certain tems en montant dans un tube vuide d'air, fachant auffi le rapport de la pefanteur fpecifique du fluide à la pefanteur fpecifique de l'air, connoître l'efpace que l'air pouffé avec la même force parcourroit dans le même tems.*

SOLUTION.

Soit un tube AC (*Fig.* 1.) dont l'extrémité A eft exactement bouchée, & ayant à l'autre extremité C un robinet, fi on en tire tout l'air qui y eft contenu, & qu'ayant fermé le robinet on plonge l'extrémité C dans le vafe DE plein d'eau en tenant le tube vertical, & qu'on ouvre le robinet, le poids de l'air extérieur fera monter l'eau dans le tube, & il fera facile d'examiner l'efpace que cette eau aura parcouru dans un certain tems, cela pofé.

Je nomme la hauteur à laquelle l'eau fera montée dans un certain tems $= s$, le rapport de la pefanteur fpecifique de l'eau à la pefanteur fpecifique de l'air $= b$, c, la hauteur totale à laquelle l'eau doit monter pour être en équilibre avec le poids de l'atmofphere $= a$. Je fuppofe pour un moment que l'air qui monteroit dans ce même tube foit un fluide fans reffort, il eft fûr par les principes de l'*Hydroftatique* (Livre 2 Propofition 5), que ce fluide fans reffort étant dans le vafe à la place de l'eau, la hauteur

totale à laquelle le poids de l'atmoſphere le feroit monter dans le tube, feroit à la hauteur totale à laquelle l'eau preſſée par le même poids s'éleve, reciproquement comme la peſanteur ſpecifique de l'eau à la peſanteur ſpecifique de ce fluide, laquelle n'eſt autre choſe que la peſanteur ſpecifique de l'air, car le reſſort n'augmente ni ne diminue rien de ſa peſanteur; nommant donç y la hauteur totale à laquelle l'air ſans reſſort monteroit dans le tube, & x l'eſpace que l'air devroit parcourir dans le même tems que l'eau parcourt l'eſpace s nous aurons $c, b :: a, y$ donc $y = \frac{ab}{c}$; or les viteſſes des corps qui montent ſont comme les racines des hauteurs, donc la viteſſe avec laquelle l'eau s'éleveroit à ſa hauteur totale eſt à la viteſſe avec laquelle l'air ſans reſſort s'éleveroit à ſa hauteur totale, comme $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{ab}{c}}$; or les eſpace s, x, étant parcourus dans des tems égaux par la ſuppoſition, ſont entr'eux comme les viteſſes, donc $\sqrt{a}, \sqrt{\frac{ab}{c}} :: s, x$, ou $\sqrt{ac}, \sqrt{ba} :: s, x$; d'où je tire $ac, ba :: s^2, x^2$, & $c, b :: s^2, x^2$, c'eſt-à-dire, *la peſanteur ſpecifique de l'air eſt à la peſanteur ſpecifique de l'eau, reciproquement, comme le quarré de l'eſpace parcouru par l'eau eſt au quarré de l'eſpace que l'air parcourroit dans le même tems.*

Suppoſant donc que la peſanteur ſpecifique de l'eau ſoit à celle de l'air comme 970 à 1, ainſi que quelques Auteurs diſent l'avoir trouvé, & que l'eau dans une minute ait parcouru deux pieds, nous aurons $1, 970 :: 4, \frac{3880}{1}$ pour le quarré de l'eſpace que l'air auroit parcouru dans le même tems en entrant dans le tube vuide, & tirant la racine quarrée par approximation, nous aurons $\frac{6227}{100} = 62$ pieds $\frac{27}{100}$.

PROPOSITION XI.

54. *Connoiſſant la hauteur totale à laquelle un fluide eſt élevé dans un tube vuide par le poids de l'atmoſphere, & l'eſpace qu'un corps grave parcourt dans une ſeconde en tombant, connoître l'eſpace que le fluide parcourroit dans la même ſeconde avec une viteſſe uniforme égale à celle que lui donne le poids de l'atmoſphere.*

SOLUTION.

Je nomme a la hauteur totale du fluide, b une ſeconde, & x l'eſpace cherché, un corps grave à la fin de ſa chute à une vi-

tesse acquise qui le fait remonter à la même hauteur dont il est tombé, donc la force de l'air qui fait monter le fluide à la hauteur donnée est égale à la force qu'un corps grave quelconque auroit acquise s'il étoit tombé de la même hauteur; or la vitesse acquise à la fin de la chute est égale à une vitesse uniforme qui feroit parcourir au corps un espace double dans le même tems, donc cette espace double seroit $= 2a$; mais le tems que le corps grave employeroit à remonter l'espace a avec sa vitesse acquise est à une seconde $= b$, comme la racine de l'espace a est à la racine de l'espace qu'il parcourroit en tombant pendant cette seconde; nommant donc ce dernier espace c, nous aurons $\sqrt{c}$, $\sqrt{a} :: b$, $\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{c}} =$ tems que le corps employeroit à parcourir l'espace a, supposant donc que le mouvement soit uniforme, nous aurons $\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{c}}$, $b :: 2a, x$, donc $2ab = x\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{c}}$, d'où je tire $4a^2b^2 = \frac{x^2ab^2}{c}$ ou $4ac = x^2$ qui se reduit à $2a, x :: x, 2c$, c'est-à-dire, *l'espace que le fluide parcourroit dans une seconde d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à celle que lui donne le poids de l'atmosphere, est moyen proportionnel entre le double de sa hauteur totale & le double de l'espace qu'un corps grave parcourroit en tombant pendant la même seconde.*

Par exemple, nous savons que l'eau s'éleve jusqu'à 32 pieds, nous savons aussi qu'un corps pesant parcourt en tombant dans une seconde 15 pieds 1 pouce, donc nous avons $a = 32$ pieds, & $c = 15$ pieds $\frac{1}{12}$, donc $2a = 64$, & $2c = 30$ pieds $\frac{1}{6}$, & multipliant 64 par $30\frac{1}{6}$, nous aurons $1930\frac{2}{3}$, dont la racine quarrée est à peu près $\frac{132}{3} = 44$ pieds.

PROPOSITION XII.

55. *Connoissant la hauteur à laquelle le poids de l'atmosphere fait monter une liqueur dans un tube vuide, connoître l'espace que l'air poussé avec la même force devroit parcourir dans une seconde dans un milieu non resistant.*

SOLUTION.

Cherchez par la Proposition précédente l'espace que le fluide devroit parcourir dans une seconde d'un mouvement uniforme & avec une vitesse égale à celle que lui donne le poids de

l'atmosphere ; & par la Proposition 10 cherchez l'espace que l'air devroit parcourir dans le même tube pendant cette seconde.

Par exemple, l'espace que l'eau parcourroit dans une minute est 44 pieds, comme nous avons vû dans la Proposition précédente ; or par la Proposition 10 la pesanteur specifique de l'air est à celle de l'eau reciproquement, comme le quarré de l'espace 44 est au quarré de l'espace que l'air doit parcourir ; or le rapport des pesanteurs specifiques est 1, 970, donc 1, 970 :: 1936, 1877920, & tirant la racine quarrée du dernier terme, j'ai 1370 pieds pour l'espace que l'air parcourroit dans une minute.

COROLLAIRE I.

56. Connoissant la différence des poids de l'atmosphere dans deux endroits différens, mais contigus, on pourra connoître l'espace que l'air plus pesant parcourra dans une minute en passant du côté du moins pesant en cette sorte.

Supposons que l'air moins pesant soutienne 31 pieds d'eau, & le plus pesant 32, la différence des poids de l'atmosphere est donc 1, ainsi l'air plus pesant passe dans le moins pesant de même qu'il monteroit dans le vuide avec un de force ; supposant donc que le poids de l'atmosphere ne puisse faire monter l'eau qu'à un pied, je cherche par la Proposition 11 l'espace que l'eau parcourroit dans une seconde avec une vitesse uniforme & égale à celle que lui donneroit le poids de cet atmosphere ; or j'ai trouvé dans cette Proposition $2a, x :: x, 2c$, donc $2 \times 1, x :: x$, 30 pieds $\frac{1}{6}$, & 60 pieds $\frac{1}{3} = xx$, ou $60 \frac{3}{9} = xx$, ou enfin $\frac{541}{9} = xx$, & tirant la racine quarrée, j'ai $x = \frac{24}{3} = 8$, à peu près ; je cherche par la Proposition 10 l'espace que l'air doit parcourir dans le même tems dans le vuide, & par la regle de cette Proposition, j'ai 1, 970 :: 64, 62080, & tirant la racine quarrée du quatriéme terme, j'ai 249 pieds que l'air plus pesant parcourroit dans une minute en se rejettant sur le moins pesant, & ainsi des autres.

COROLLAIRE. II.

57. Connoissant la hauteur à laquelle un poids d'atmosphere comprimé d'une certaine façon fait monter une liqueur, on peut connoître aisément la hauteur à laquelle l'air fera monter la même même liqueur lorsqu'il sera comprimé, car les effets sont proportionnels aux causes ; c'est pourquoi si le même air vient à se

dilater, on pourra aussi connoître la vitesse avec laquelle le ressort de cet air agit de tous côtés.

PROPOSITION XIII.

58. *Connoissant l'espace que l'air parcourt dans une seconde, connoître la pression qui peut produire la vitesse de cet air.*

SOLUTION.

Si cet air faisoit monter une liqueur dans un tube, le quarré de l'espace que cette liqueur parcourroit dans une seconde seroit au quarré de l'espace que l'air parcourt dans une même seconde, reciproquement comme la pesanteur specifique de l'air est à celle du fluide (*N.* 49); nommant donc le rapport des pesanteurs specifiques de l'air & de la liqueur $= c, b$, & l'espace que l'air parcourt $= a$, j'ai $b, c :: a^2, \frac{a^2c}{b}$; or par la Proposition 11, nommant x la hauteur à laquelle l'eau peut être élevée dans un tube, & d l'espace qu'un corps grave parcourroit en tombant dans une seconde, j'ai $2x, \frac{\sqrt{a^2c}}{\sqrt{b}} :: \frac{\sqrt{a^2c}}{\sqrt{b}}, 2d$, donc $4dx = \frac{a^2c}{b}$ ou $4bdx = a^2c$, d'où je tire $x, a :: ac, 4bd$, c'est-à-dire la hauteur à laquelle l'air peut élever un fluide avec la même force dont il est pressé pour parcourir un espace dans une seconde, est à cet espace en raison composée de la raison de la pesanteur specifique de l'air à celle du fluide, & de la raison de l'espace parcouru par l'air à quatre fois l'espace qu'un corps grave parcourroit en tombant dans une seconde.



CHAPITRE VI.

Des Instrumens qui servent à connoître & à mesurer les différentes pesanteurs de l'Air, ses différentes densités, & ses différens degrés de chaleur & de froideur.

DU BAROMETRE.

59. LE Barometre, comme tout le monde sçait, est un tube assez semblable au tube AC Figure 1, dont le sommet A est fermé hermetiquement; on le remplit entierement de mercure, après quoi bouchant exactement l'ouverture C avec le doigt, on plonge ce bout C dans un vase spherique plein aussi de mercure, & debouchant l'ouverture on attache le vase au tube & l'on met le tout ensemble sur une planche que l'on tient verticale, marquant à côté du tube les différentes hauteurs auxquelles l'ouverture s'éleve selon les différens poids de l'atmosphere.

Cet instrument sert à connoître les différentes pesanteurs de l'atmosphere dans un même lieu ou en différens lieux, car comme on a éprouvé que le poids de l'atmosphere dans les parties les plus basses de la surface de la terre, soutient ordinairement 28 pouces de mercure, il est visible que si dans certains tems le mercure s'éleve au-dessus de 28 pouces ou se met au-dessous, la pesanteur de l'atmosphere doit augmenter ou diminuer à proportion.

Le Vent de Nord & de Nord-Est condensent l'air, non-seulement par leur froideur, mais parce qu'en soufflant contre la terre de haut en bas, ils pressent l'air supérieur sur l'air inférieur, donc le mercure doit alors s'élever dans le Barometre, & comme ces deux vents amenent ordinairement le beau tems, on peut juger par cette élevation que le beau tems doit regner.

Que si lorsque le Nord ou le Nord-Est ont soufflé pendant quelques jours, le Barometre commence à baisser peu à peu quoique le beau tems continue, c'est que ces vents amenent peu à peu des vapeurs, & que l'air trop pressé venant à s'étendre vers le Sud-Ouest perd peu à peu de son ressort & devient moins pesant.

Le vent de Sud & de Sud-Oueſt ſoufflent de bas en haut, & ſoulevent l'air ſupérieur, donc l'atmoſphere devient moins peſante, & le mercure baiſſe dans le Barometre; or en ce cas ſi le vent continue de même, ou s'il tourne vers le Nord en paſſant par l'Oueſt; c'eſt ordinairement un ſigne de pluye, mais s'il tourne vers le Nord en paſſant par l'Eſt, c'eſt ſigne que le beau tems doit reprendre le deſſus.

Quand le reſſort de l'air ne peut plus ſoutenir les vapeurs, il ſe forme des nuées par la chute des vapeurs plus élevées ſur celles qui le ſont moins, & ces nuées ſe reduiſent en pluye; l'air eſt donc moins peſant dans ce tems-là que dans le beau tems puiſqu'il a moins de reſſort, par conſéquent le Barometre doit baiſſer, & par ce baiſſement on peut pronoſtiquer la pluye.

M. Mariotte dans ſes Eſſais de Phyſique à prétendu pouvoir déterminer la hauteur de l'atmoſphere par les différentes hauteurs du Barometre, ſelon qu'on l'éleve plus haut; voici quel eſt ſon raiſonnement. Suppoſons que le Barometre ſoit d'abord dans un endroit où le mercure eſt à 28 pouces, ſi on vient à l'elever 60 pieds au-deſſus de cet endroit, on trouve que le Barometre baiſſe d'une ligne; diviſons l'atmoſphere en 4032 diviſions horizontales toutes d'un même poids, ou d'une même quantité de matiere, mais diverſement dilatées ſelon leurs différentes élevations, ce nombre de diviſions ſera égal à la hauteur 28 pouces du Barometre dans la plus baſſe diviſion reduite en lignes & en douziéme de lignes, car 28 multiplié par 12 fait 336, & ce produit multiplié encore par 12 donne 4032, ainſi il y aura un douziéme de ligne pour chaque diviſion, c'eſt-à-dire à meſure que le Barometre paſſera d'une diviſion à l'autre en montant, le mercure baiſſera d'un douziéme de ligne; maintenant puiſqu'en élevant le Barometre à la hauteur de 60 pieds, la différence eſt une ligne, il s'enſuit que la plus baſſe diviſion doit être de 5 pieds qui eſt le douziéme de 60, & qu'en tenant le Barometre à la hauteur de 5 pieds le mercure ne baiſſera que de $\frac{1}{12}$ de lignes, & comme à la moitié du poids de l'atmoſphere, c'eſt-à-dire à la 2016e diviſion l'air doit être moins peſant de la moitié, il eſt évident que la 2016e aura 10 pieds de hauteur & toutes les autres diviſions compriſes entre la plus baſſe & la 2016e iront en augmentant proportionnellement; or cette progreſſion geométrique ne pouvant être que très-peu différente de la progreſſion arithmétique, ſi nous la ſuppoſons arithmétique nous aurons la ſomme de cette progreſſion en

en ajoutant le premier terme 5 au dernier 10, ce qui fait 15, & multipliant la ſomme 15 par la moitié 1008 du nombre des termes 2016, ce qui donnera 15120 pieds, pour l'étendue ou la hauteur de l'air depuis la premiere diviſion juſqu'à la 2016e, & 14 pouces de mercure dans le Barometre ſeront en équilibre avec cette étendue.

Prenons la moitié 1008 de 2016 diviſions reſtantes, la plus haute de ces 1008 étant moins chargée de la moitié que la plus haute des 2016 précédentes, ſon étendue ſera par conſéquent de 20 pieds; & pour trouver celles qui ſont compriſes entre deux, nous n'avons qu'à ajouter le premier terme 10 au dernier terme 20, & multiplier la ſomme 30 par la moitié 504 du nombre des termes, ce qui donne encore 15120 pieds pour l'étendue de ces 1008 diviſions, & continuant à prendre la moitié 504 des 1008 diviſions, puis la moitié de 252 des 504 reſtantes, & de même la moitié 126 des 252 reſtantes, &c. on trouvera pour chacune de ces progreſſions 15120, & comme il eſt aiſé de voir qu'il y en aura 12, il y aura par conſéquent 12 fois 15120 pieds pour toute la hauteur de l'atmoſphere; or 12 fois 15120, font 181440 pieds, leſquels diviſés par 5, à cauſe qu'un pas geometrique vaut 5 pieds, donnent 36288 pas geometriques, & diviſant encore par 2400 à cauſe que la lieue moyenne de France vaut 2400 pas geometriques, le quotient qui eſt un peu plus de 15 lieues ſera la hauteur totale de l'atmoſphere.

Que ſi on veut, ajoute M. Mariotte, que l'air étant rarefié 4032 fois plus, n'a pas encore ſon étendue naturelle, & qu'on veuille que la plus haute diviſion ſoit deux fois plus dilatée que nous ne l'avons ſuppoſée, c'eſt-à-dire qu'au lieu d'être 4032 fois plus dilatée que la plus baſſe diviſion de l'air inférieur, elle ſoit 8064 fois plus dilaté, alors il y aura un terme de plus dans les moitiés des moitiés que nous avons pris ci-deſſus, & par conſéquent il y aura 15120 pieds d'étendue, ce qui ne va qu'autour de cinq quarts de lieue de plus, & continuant à dilater davantage la plus haute diviſion, M. Mariotte trouve par le même raiſonnement que quand même la derniere diviſion ſeroit huit millions de fois plus dilatées que la premiere diviſion, la hauteur de l'atmoſphere n'iroit tout au plus qu'à 30 lieues.

Or ce raiſonnement de M. Mariotte 1° ne détermine rien; puiſqu'il eſt toujours permis de ſuppoſer la derniere couche dilatée de plus en plus, pourvû que ce ne ſoit pas à l'infini; car

on ſçait qu'une pareille dilatation ne ſçauroit être. 2°. Il ſuppoſe que le reſſort de l'air peut être comprimé ou dilaté ſans bornes, ce qui ne ſçauroit être, car le reſſort ayant une force finie, il y a un certain degré de compreſſion au-delà duquel il ne peut être comprimé, & un certain dégré de détention ou de relâchement au-delà duquel il ne paſſe point ; or quoiqu'il ne paroiſſe pas que l'air ſoit jamais comprimé au dernier point, car ſi cela arrivoit, tout ce qui a vie dans cet air ceſſeroit de reſpirer par ſon défaut de fluidité, il nous paroît au contraire que le reſſort de cet air en s'éloignant de la ſurface de la terre peut ſe détendre à un tel point qu'il ne puiſſe plus être relâché, & comme ce relâchement ne vient que parce que ce reſſort eſt plus fort que le poids de l'air ſupérieur qui le comprime, pourquoi ne pourroit-on pas dire que cet air ſupérieur devient de plus en plus ſi leger, qu'il n'agit plus ſur le reſſort, quoique ce reſſort ne ſe dilate pas davantage, à cauſe qu'il eſt au dernier point de dilatation où il peut parvenir.

Il ne faut donc compter ſur le principe des denſités de l'air proportionnelle aux poids dont il eſt chargé que dans les lieux voiſins des parties les plus baſſes de la ſurface de la terre, au nombre deſquels je mets les ſommets des plus hautes montagnes à cauſe que la hauteur de ces montagnes, quelque grande qu'elle nous paroiſſe, n'eſt peut-être rien ou du moins peu de choſe à l'égard de la hauteur de l'atmoſphere. On peut donc en employant le principe de M. Mariotte, connoître de combien le ſommet d'une montagne eſt plus élevé que la plaine qui ſe trouve au bas. Suppoſons, par exemple, que dans la plaine le Barometre monte à 28 pouces, & qu'au ſommet de la montagne il ſoit deſcendu de 8 lignes, je réduis les 28 pouces en lignes, ce qui fait 336, & comme par l'experience cité ci-deſſus, 60 pieds de hauteur font baiſſer d'une ſeule ligne, je conçois que la maſſe de l'atmoſphere eſt diviſée en 336 diviſions d'inégale denſité à proportion de leur hauteur, mais dont chacune peſe également une ligne de mercure, & par conſéquent la plus baſſe aura 60 pieds d'étendue ; or la diviſion qui ſera à la moitié du poids de l'atmoſphere, c'eſt-à-dire la 168 partie étant moins preſſée de la moitié, aura 120 pieds d'étendue, & les diviſions entre celle-ci & la plus baſſe, augmenteront en progreſſion arithmetique; donc pour trouver leur différence, je retranche de la plus haute 168, la double 120 de la plus baſſe, & le reſte 48

est la différence de la progression multipliée par le nombre des termes moins un, selon les regles de ces sortes de progression, mais le nombre des termes est 168; retranchant donc 1 de 168, je divise 48 par 167, & le quotient $\frac{48}{167}$ est la différence de la progression. Maintenant depuis la plaine jusqu'au haut de la montagne, il y a huit lignes de différence; donc il y a huit divisions, c'est-à-dire, il y a une progression de huit termes dont le premier est 60, la différence est $\frac{48}{167}$, & le nombre des termes est 8; pour connoître donc le dernier terme, j'ajoute au premier 60 la différence multipliée par le nombre des termes moins un, c'est-à-dire par 7, ce qui donne 62 $\frac{2}{167}$ pour le dernier terme, j'ajoute le premier terme au dernier, ce qui fait 122 $\frac{2}{167}$, ou 122 en négligeant la fraction à cause de sa petitesse, & multipliant la somme par la moitié 4 du nombre des termes, j'ai 488 pieds pour la hauteur du sommet de la montagne au-dessus de la plaine, & ainsi des autres.

Il faut prendre garde en transposant le Barometre de la plaine au sommet de la montagne, qu'il regne un tems où la différence de la chaleur ou du froid de l'un à l'autre endroit ne soit pas bien grande, ou qu'il ne fasse pas au sommet de la montagne un vent beaucoup plus fort que celui qui souffle au bas; car tout cela peut faire du changement dans le Barometre.

De tous les liquides, le Mercure est celui qui souffre le moins d'alteration de la chaleur & du froid, & c'est pour cette raison qu'on l'a choisi preférablement aux autres pour la construction du Barometre; cependant comme il ne laisse pas que de varier à la presence de l'une ou de l'autre de ces causes, & que les variations qu'il en reçoit ne sont pas proportionnelles à leur dégré d'activité, on se tromperoit doublement si l'on s'imaginoit que le Barometre est toujours une mesure certaine de la pesanteur de l'air, & qu'on puisse s'en servir pour connoître les différens dégrés de chaleur ou de froid dont il est affecté. M. Amontons a tâché de corriger les défauts du Barometre par rapport à la chaleur & au froid, & l'on peut voir ce qu'il en dit dans les Memoires de l'Academie des Sciences.

DU MANOMETRE.

60. Le Manometre est un instrument dont on se sert pour connoître les différentes densités de l'air.

Le chaud ou le froid, ou quelque autre cause peuvent alte-

rer les densités de l'air inférieur sans altérer le poids de l'atmosphere ; car si dans le tems que l'air inférieur se dilate par la chaleur, & devient par conséquent moins dense & moins pesant, il arrive que dans une partie plus haute il se fasse une condensation équivalente à la raréfaction de l'air inférieur, le poids de l'atmosphere sera toujours le même, quoique la densité de l'air inférieur soit moindre qu'elle étoit auparavant, & par la même raison le poids de l'atmosphere ne variera point, si dans le même tems que l'air inférieur se condense, il arrive que l'air supérieur se rarefie dans la même proportion, donc le Barometre ne peut servir à marquer les condensations ou les raréfactions de l'air inférieur, & quoique le Thermometre dont nous parlerons bientôt puisse marquer les raréfactions ou condensations causées par le chaud ou le froid, cependant comme il y a d'autres causes qui peuvent contribuer aux différentes densités de l'air, comme les différens poids de l'atmosphere, les vents, les vapeurs, &c. il faut nécessairement se servir de quelqu'autre instrument si l'on veut porter un jugement sûr touchant le rapport de ces densités.

Pour construire un *Manometre*, on prend un vase spherique de cuivre Q (*Fig.* 5.) dont on fait sortir l'air ; on pese ce vase vuide d'air, & l'on prend une quantité de matiere bien pesante comme du plomb, dont le poids soit égal au poids du vase, on suspend le vase Q, & le poids P aux deux extremités B, A, d'une balance dont le centre du mouvement C soit au-dessus du centre D du joug AB ; enfin on met à l'extremité du fleau un quart de cercle MLN dont le rayon soit la longueur CL de la languette, & l'instrument est fait.

Supposons que dans le tems qu'on a fait l'instrument, le poids P & le vase Q fussent en équilibre lorsque le joug AB étoit dans une situation horizontale ; si l'air devient plus dense, le poids P devient plus pesant (*N.* 45.), & par conséquent le vase Q doit s'élever. Supposons donc qu'en cet état le centre de gravité commun soit H, ce centre descendra jusqu'à ce qu'il soit dans la ligne verticale C*h* qui passe par le centre C de mouvement, & comme il ne sçauroit descendre plus bas, il y aura alors équilibre, & par conséquent le joug de la balance sera dans la position oblique *ab*, or la balance étant dans cette position, la languette est dans la position CT ; ainsi il n'y a qu'à compter les dégrés compris dans l'arc TL pour sçavoir de combien l'air est

devenu plus denſe ; que ſi l'air ſe raréfie peu à peu, & devient moins denſe qu'il n'étoit dans le tems même qu'on a conſtruit le Manometre, la balance reprend peu à peu la ſituation horizontale, & delà elle paſſe dans une poſition oblique oppoſée à la précédente, parce que le vaſe Q devient plus peſant, ainſi les dégrés que la languette marque ſur l'arc LN, dénotent de combien l'air eſt devenu moins denſe que lorſque l'inſtrument a été fait.

Pour être convaincu que le poids P doit être plus ou moins peſant que le vaſe Q, ſelon que l'air eſt plus ou moins denſe, il n'y a qu'à faire attention que ſi l'on mettoit à la place du vaſe un ſolide de même volume & de même poids, ce ſolide auroit moins de peſanteur ſpécifique que le poids P avec qui il ſeroit en équilibre ; car ce poids a néceſſairement moins de volume que le vaſe, à cauſe du vuide que ce vaſe contient ; or nous avons démontré (*N.* 45.) que deux poids de différentes peſanteurs ſpécifiques étant en équilibre dans l'air, perdent leur équilibre ſi l'air eſt plus ou moins denſe, & que celui qui a plus de peſanteur ſpécifique devient plus ou moins peſant ſelon que l'air eſt plus ou moins denſe ; donc le poids Q devient plus ou moins peſant que le ſolide mis à la place du vaſe ſelon le plus ou le moins de denſité de l'air, mais le vaſe fait le même effet que le ſolide mis à ſa place, à cauſe de l'égalité de poids & de volume ; donc, &c.

DE L'ANEMOMETRE.

61. L'Anemometre eſt un inſtrument inventé pour trouver les différens dégrés de force que le vent peut avoir.

Pour conſtruire cette machine on prend un aiſſieu AB (*Fig.* 6.) auquel on ajoute quatre aîles C, D, E, F, ſemblables à celles des moulins à vent, & diſpoſées de façon que ſi l'aiſſieu étant dans la ſituation horizontale, comme il doit être, on le coupoit par un plan vertical qui coupât ſes côtés à angles droits, les quatre aîles fiſſent avec ce plan chacune un angle de 54 dégrés ; (Nous dirons dans l'Hydraulique pourquoi cet angle doit être préféré à un autre.) autour de l'aiſſieu on met une vis G qui s'engraîne avec les dents d'une roue dentée H ; cette roue a un aiſſieu ſaillant HI, lequel à quelque diſtance de la roue s'enchaſſe dans une piece de bois ZQ faite de façon que ſon centre de gravité ſoit le centre de l'aiſſieu, à l'extremité Z du plus long bras de cette piece eſt un poids Z, & vis-à-vis le centre de l'aiſſieu de la roue on met un ſtile attaché à la piece ZQ à laquelle

joint à un tube BC, verser de l'eau par l'ouverture C, en laissant une certaine quantité d'air, puis boucher l'ouverture avec le doigt, & enfoncer cette ouverture dans un vase plein d'eau où l'on deboucheroit l'ouverture ; car, disoit-on, lorsque l'air exterieur deviendra plus chaud, l'air intérieur à qui la chaleur se communiquera, ne manquera pas de se dilater, & par conséquent il obligera l'eau de descendre, & au contraire si l'air intérieur se condense par le froid, il occupera moins de volume, & l'eau montera ; mais on n'avoit pas fait attention qu'il arrive souvent que l'air inférieur étant plus chaud, le poids de l'atmosphere non-seulement ne diminue point, mais que même il augmente, d'où il suit que l'effort que l'air intérieur fait pour se dilater n'étant pas assez fort pour surmonter celui de l'atmosphere, l'eau loin de descendre peut même s'élever plus haut qu'elle n'étoit ; & comme il peut arriver aussi que le poids de l'atmosphere soit plus leger dans des tems où le froid condense l'air inférieur, il s'ensuit encore que dans ces occasions l'eau doit descendre, quoique l'air intérieur dut se condenser.

Pour éviter donc cet inconvénient, Messieurs les Academiciens de Florence eurent recours aux condensations & aux dilatations que l'esprit de vin souffre par l'action du froid & du chaud, & composerent le Thermometre dont on se sert aujourd'hui de la façon que nous allons expliquer.

On prend un long tube AB (*Fig.* 7.) ayant à son extremité B un globe creux de verre, on y verse de l'esprit de vin, puis on met le globe dans de l'eau à la glace, & alors l'esprit de vin se condensant par le froid, descend, & l'on observe la hauteur où il reste, laquelle doit être au-dessus de l'entrée B du globe BC; cette hauteur que je suppose être BH, fait connoître le dégré le plus bas où l'esprit de vin s'arrête dans le grand froid ; on tire le globe hors de cette eau, & on le plonge dans une autre eau que l'on fait chauffer jusqu'à ce que l'esprit de vin soit prêt à bouillir ; alors on observe la hauteur BT à laquelle la chaleur a fait monter l'esprit de vin, & comme c'est la plus grande où elle puisse s'élever dans les chaleurs de l'été, on ferme le tube hermetiquement en T avant même que l'esprit de vin ait eu le tems de descendre en se réfroidissant ; cela fait, on adosse le globe & le tube à une planche, & l'on marque à côté du tube entre H & T plusieurs divisions égales qu'on nomme *dégrés*.

Il est visible que quand le froid augmente, la liqueur se con-

dense de plus en plus, & descend, & qu'au contraire quand l
chaleur augmente, la liqueur se dilate à proportion & mont
plus haut; cependant il faut observer que quoique ce Thermo
metre soit moins imparfait que le précédent, il ne laisse pas qu
d'avoir ses défauts. 1°. Quand il fait froid, la liqueur en descen
dant acquiert une vitesse qui augmente son dégré de compres
sion; au contraire quand il fait chaud, la pesanteur de la liqueu
s'oppose à l'élevation que sa raréfaction lui donne, & par con
séquent elle doit moins monter à proportion qu'elle n'étoit des
cendue. 2°. Plusieurs expériences ont fait connoître que quan
les liqueurs se condensent, il en sort de l'air; donc quand aprè
le froid l'esprit de vin se dilate, l'air qui en étoit sorti par sa con
densation doit l'empêcher de monter aussi haut qu'il devroi
monter; il est vrai que par d'autres expériences que M. Mariott
rapporte dans son Essai sur la Nature de l'air, il arrive que l'ai
qui est sorti d'une liqueur y rentre, mais comme il s'en faut d
beaucoup qu'il y rentre aussi vite qu'il en est sorti, il s'ensuit qu
pendant cet intervalle l'esprit de vin ne s'éleve point à la hau
teur où il devroit s'élever; ces raisons & d'autres que je n
rapporte point de peur d'être trop long, doivent faire conclur
que ce Thermometre ne peut servir à mesurer exactement le
différens dégrés de chaleur ou de froid qui regnent dans l'air
& c'est ce qui fait que quelques Auteurs prétendent qu'on doi
appeller cet instrument *Thermoscope* plutôt que Thermometre,
de même qu'ils donnent le nom de *Baroscope* à ce que nous ap-
pellons *Barometre*, voulant dire par-là que ces deux instrumens
peuvent bien servir à connoître les variations de l'air, mais non
pas à les mesurer.

DE L'HYGROMETRE.

63. L'*Hygrometre* est un instrument dont on se sert pour con-
noître l'humidité ou la secheresse de l'air; on en fait de plu-
sieurs façons, entre lesquels ceux qui me paroissent les plus
simples & les meilleurs sont les deux suivans.

Attachez une corde de chanvre à un point fixe E (*Fig.* 7.)
disposez plusieurs poulies fixes A, B, C, D, H, de la façon
que la figure le montre, faites passer la corde sur toutes ces pou-
lies, & attachez à son extremité un poids P.

Si l'air devient humide, son humidité gonflera la corde, &
par

par conséquent elle en diminuera la longueur ; donc le poids P s'approchera davantage de la poulie H ; & si l'air devient sec, la corde devenant aussi plus seche, s'étendra davantage, & le poids P s'éloignera de la poulie H ; c'est donc par les différens éloignemens du poids P à la poulie H, qu'on jugera du plus ou du moins d'humidité ou de secheresse de l'air, & il est clair que plus le nombre de poulies sera grand, plus aussi les différentes distances de P à H seront sensibles.

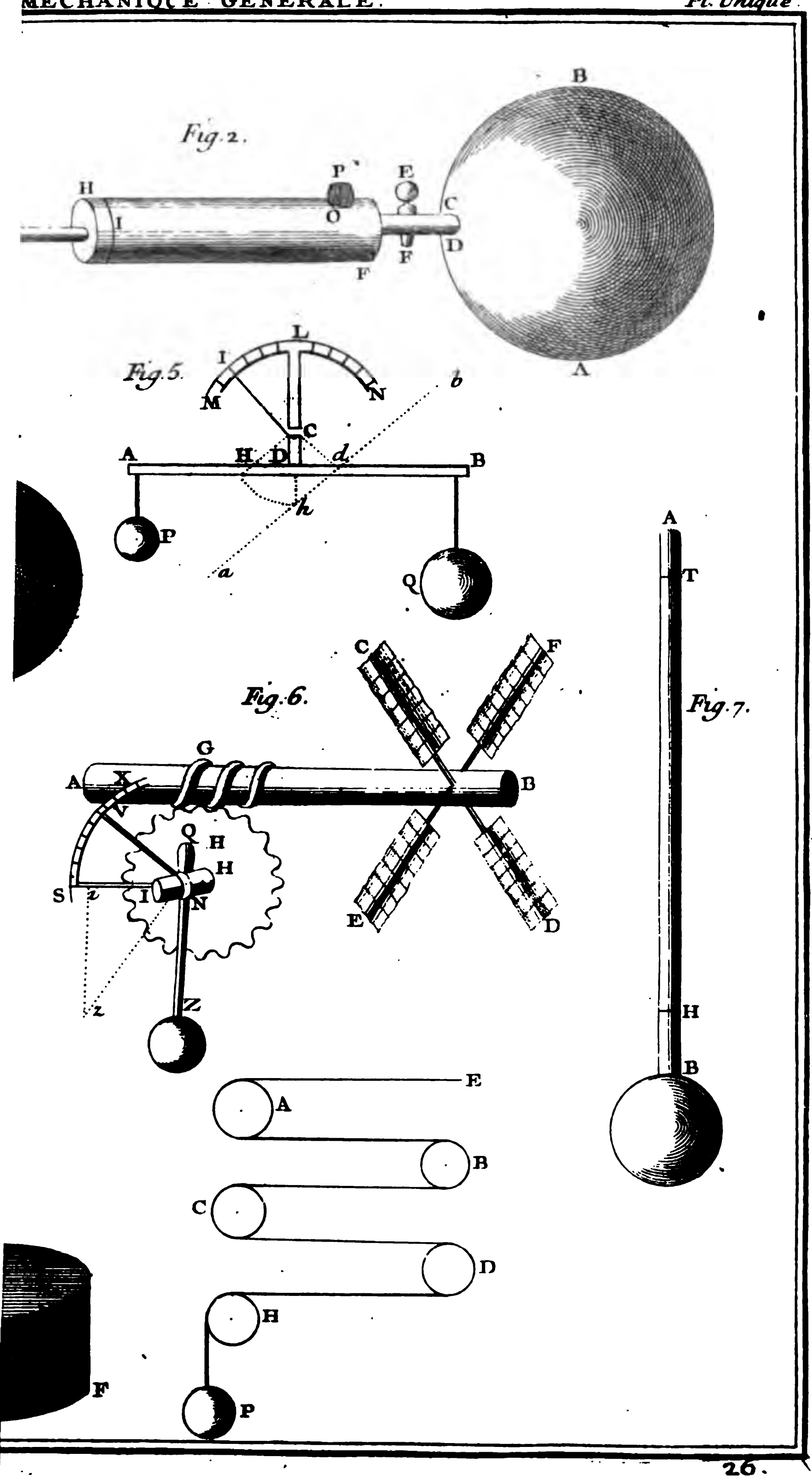
Le défaut de cet hygrometre & de tous ceux qui sont faits avec des cordes, consiste en ce que le poids tenant toujours la corde tendue, les fibres de la corde s'allongent peu à peu de façon qu'un même dégré d'humidité dans des tems différens ne la racourcit pas de la même maniere, c'est pourquoi j'aimerai encore mieux l'Hygrometre suivant.

Prenez une balance semblable à celle du Manometre (*Fig.* 5.); suspendez en B une éponge au lieu du vase Q, & en A un poids P qui soit en équilibre avec l'éponge ; si l'air devient humide, l'éponge s'imbibera de vapeurs & pesera davantage, mais si l'air devient plus sec qu'il n'étoit, l'éponge deviendra plus legere ; l'équilibre se rompra donc dans l'un & dans l'autre cas, & la languette marquera sur le quart de cercle de combien l'air est plus ou moins humide ou sec qu'il n'étoit, lorsqu'on a fait l'instrument.

Fin du Livre troisiéme.




GEOMETRIA


Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.



LA MECHANIQUE GENERALE,

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE, L'HYDROSTATIQUE, ET L'HYDRAULIQUE, &c.

LIVRE QUATRIE'ME.

De l'Hydraulique.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement des Fluides causé par leurs pesanteurs.

DEFINITION.

1°. L'HYDRAULIQUE est la Science qui traite du mouvement des fluides, & surtout du mouvement des eaux.

PROPOSITION I.

2. *Si l'eau passe d'un lieu à un autre, le terme auquel elle va abou-*

tir doit être ou de niveau avec celui d'où elle part *tre de la terre.*

DEMONSTRATION

L'eau peut couler ou dans des canaux to ou dans des canaux inclinés à l'horiſon ; ſi canaux horizontaux, elle coulera juſqu'à ce rieure ſoit parfaitement de niveau ſans pouvoi & quand cela arrivera ſa maſſe reſtera en rep maſſe étant peſante tend à deſcendre vers le & non pas à s'élever ; au reſte je dis que ſa n pos & non pas ſes parties, car on a vû dans les parties de l'eau & des autres liquides on teſtin qui les fait mouvoir de tout ſens, ſans peſanteur de la maſſe.

Si l'eau ſe trouve au haut d'un canal ou tu cliné à l'horizon, ſon poids l'obligera a deſc canal juſqu'à ce qu'elle rencontre un plan h ſurface ſe mettant de niveau, ſa maſſe reſtera

Mais ſi après être deſcendue par le canal un autre BC, & qu'elle ne puiſſe s'échapper remontera dans ce tuyau BC juſqu'à la lig après quoi l'eau du canal AB & celle du ca un parfait équilibre, ainſi qu'il a été prouvé & par conſéquent la maſſe n'aura plus de mou

PROPOSITION II.

3. *Si deux vaſes* AB, CD (Fig. 2.) *toujours* *vertures* E, F *égales & à égale diſtance de la* *l'eau , les quantités d'eau qui ſortiront par ces* *tems égaux ſeront égales.*

DEMONSTRATION.

Nous avons demontré dans *l'Hydroſtatique* preſſe toutes les parties de ce vaſe à proportio ces parties, & de leurs diſtances à la ſurface cela poſé, ſuppoſons que les deux ouvertur & faſſent partie de leurs vaſes, ces deux par l'hypotèſe & leurs diſtances EG, FH à la ſu l'eau, étant auſſi égales, l'effort que l'eau f conſéquent égal.

Or en supposant que les vases soient toujours pleins, & que les ouvertures soient debouchées, l'effort est toujours le même, donc les colonnes d'eau qui pesoient sur les ouvertures lorsqu'elles étoient bouchées, sortiront dans des tems égaux avec la même force & avec la même vitesse à cause de l'égalité de leurs masses; donc aussi les quantités d'eau qui sortiront dans des tems égaux, seront égales, car ces quantités ne sont autre chose que les masses qui sortent; or les masses qui sortent multipliées par leurs vitesses lesquelles sont égales, sont les quantités de mouvement, & ces quantités de mouvement doivent être égales puisqu'elles sont produites par des forces égales, donc ces quantités de mouvement ayant une de leurs racines égales, c'est-à-dire leurs vitesses doivent avoir aussi l'autre racine égale, c'est-à-dire leurs masses ou les quantités d'eau qui sortent dans des tems égaux.

COROLLAIRE I.

4. Ce seroit la même chose si l'un des vases étoit incliné à l'horizon, pourvû que les ouvertures fussent égales, & que les distances ou les perpendiculaires tirées de ces ouvertures à la surface supérieure de l'eau fussent égales, car les pressions & les vitesses causées par ces pressions seroient égales de part & d'autre.

COROLLAIRE II.

5. *Si les ouvertures* E, F *sont inégales & les hauteurs égales, les quantités d'eau qui sortent dans des tems égaux sont comme les ouvertures;* car si l'on suppose que l'une des ouvertures soit quadruple de l'autre, la colonne qui le pressera sera quadruple de celle qui pressera l'autre à cause de l'égalité des hauteurs, & par conséquent les forces qui obligeront l'eau de sortir seront comme 4 à 1, mais les vitesses seront égales à cause de l'égalité des hauteurs, donc les masses qui sortiront seront comme 4 à 1, car ces masses multipliées par leurs vitesses étant les quantités de mouvement, lesquelles sont toujours entr'elles comme les forces, doivent être comme 4 à 1, ce qui ne sauroit être, à moins que les masses ne soient elles-mêmes comme 4 à 1.

COROLLAIRE III.

6. Si ce que nous venons de dire n'arrive pas toujours exactement dans la pratique, cela vient de la resistance de l'air, du

frottement de l'eau contre les ouvertures, & d'autres caufes étrangeres, dont nous faifons abftraction ; au refte il faut obferver en paffant que quand les ouvertures font inégales & rondes comme on a coutume de les faire, la plus grande a néceffairement des parties plus hautes ou plus baffes que la moindre, & que par conféquent l'eau qui paffe par ces parties a plus ou moins de viteffe, ce qui ne peut manquer de caufer quelque alteration.

COROLLAIRE IV.

7. *Si les ouvertures font égales & les hauteurs inégales, les quantités d'eau qui fortent dans le même tems font comme les viteffes ;* car à caufe de l'égalité des ouvertures les preffions font comme les hauteurs, & à caufe de l'inégalité des hauteurs les viteffes que ces preffions donnent aux quantités d'eau qui fortent font inégales ; or fi nous divifons le tems de l'écoulement en parties infiniment petites, ce mouvement des quantités d'eau de part & d'autre pendant chacun de ces inftans pourra être regardé comme uniforme, donc les viteffes de ces quantités d'eau dans un petit inftant feront entr'elles comme les efpaces parcourus ; ainfi fi dans un même petit inftant l'eau qui fort par E s'étend jufqu'en L, & l'eau qui fort par F jufqu'en I, ces quantités d'eau étant comme leurs maffes ou comme les cylindres EL, FI lefquels ont les bafes égales, feront comme leurs longueurs, ou comme les efpaces EL, FI, & par conféquent elles feront dans le rapport des viteffes ; & comme la même chofe arrivera dans tous les inftans de l'écoulement, il s'enfuit que les quantités écoulées feront entr'elles comme les viteffes.

COROLLAIRE V.

8. *Si les ouvertures font égales & les hauteurs inégales, les quantités d'eau qui fortent dans un même inftant font comme les racines des hauteurs.*

Je nomme Q la plus grande quantité, q la moindre, V la viteffe de la plus grande quantité, u la viteffe de la moindre ; les forces qui compriment font comme les hauteurs EG, FH en fuppofant que EG foit plus grand que FH ; or ces forces font comme les mouvemens des quantités Q, q ; donc ces forces font comme $Q \times V$, $q \times u$, & par conféquent nous avons $Q \times V, q \times u :: EG, FH$; mais par le Corollaire précédent, nous avons

$Q, q :: V, u$, donc $Q \times V, q \times u :: Q^2, q^2$, & par conséquent $Q^2, q^2 :: EG, FH$, & $Q, q :: \sqrt{EG}, \sqrt{FH}$.

COROLLAIRE VI.

9. Les viteſſes étant comme les quantités d'eau qui ſortent dans le même inſtant, elles ſont par conſéquent auſſi comme les racines des hauteurs.

COROLLAIRE VII.

10. *Si les ouvertures ſont inégales & les hauteurs auſſi, les quantité d'eau qui ſortiront dans le même inſtant ſont en raiſon compoſée de la raiſon des ouvertures, & de la raiſon des racines des hauteurs.*

Par le Corollaire 5, ſi les ouvertures ſont égales, les quantités d'eau qui ſortent dans un même inſtant ſont comme les racines des hauteurs; maintenant concevons que l'une des ouvertures s'agrandiſſe & devienne quatre fois plus grande qu'elle n'étoit, elle ſera preſſée par quatre colonnes d'eau égales à celles qui la preſſoient avant qu'on l'eût agrandie, & ces colonnes donneront chacune aux parties d'eau qu'elles preſſent la même viteſſe que la colonne ſeule donnoit à l'eau qu'elle preſſoit lorſque l'ouverture étoit quatre fois moindre; ainſi il ſortira quatre fois plus d'eau, mais avec la même viteſſe. Puis donc qu'en ſuppoſant les deux ouvertures égales, les quantités d'eau qui ſortent ſont dans la raiſon des viteſſes ou des racines des hauteurs, & qu'en ſuppoſant que l'une des ouvertures devienne à l'égard de l'autre comme 4 à 1, la raiſon des viteſſes ſubſiſte, & qu'outre cela la quantité d'eau qui ſort par l'ouverture agrandie, augmente dans la raiſon 4, 1 des ouvertures, il s'enſuit que les quantités d'eau qui ſortent dans le même inſtant ſont dans la raiſon compoſée de la racine des hauteurs, & de la raiſon 4, 1 des ouvertures.

COROLLAIRE VIII.

11. Si par deux ouvertures de différentes grandeurs, & d'inégale hauteur, il ſort dans le même inſtant des quantités égales d'eau, les ouvertures ſont reciproquement comme les racines des hauteurs.

Par le Corollaire précédent les quantités d'eau ſont en raiſon compoſée de la raiſon des ouvertures & de celle des raiſons des hauteurs; nommant donc Q, q les quantités, A, a les hauteurs, & L, l les ouvertures, nous avons $Q, q :: L \times \sqrt{A}, l \times \sqrt{a}$ donc en

égales, les viteſſes ſeront égales (*N.* 5), donc elles ſeront comme les hauteurs ou comme leurs racines.

En troiſiéme lieu, ſi les ouvertures ſont égales & les hauteurs inégales, nous avons démontré (*N.* 7.) que les quantités d'eau qui ſortent dans un même inſtant, ſont comme leurs viteſſes & (*N.* 8.) que ces mêmes quantités ſont comme les racines des hauteurs, donc les viteſſes ſont auſſi comme les racines des hauteurs.

En quatriéme lieu, ſi les ouvertures étant inégales les hauteurs le ſont auſſi; prenons trois vaſes A, B, C, dont les deux B, C, ont les ouvertures inégales & leurs hauteurs égales, & les deux A, B, ont les ouvertures égales, & les hauteurs inégales; je nomme H la hauteur de C, & V ſa viteſſe; h la hauteur de B, & u ſa viteſſe, nous aurons à cauſe de l'égalité des hauteurs $V, u :: \sqrt{H}, \sqrt{h}$; je nomme x la hauteur de A, & ſa viteſſe z, nous aurons à cauſe des ouvertures égales de B & de A troiſiéme $u, z :: \sqrt{h}, \sqrt{x}$; mais par l'hypotèſe $H = h$, donc $\sqrt{H} = \sqrt{h}$, & par conſéquent à cauſe de $V, u :: \sqrt{H}, \sqrt{h}$, nous aurons $V = u$, mettant donc V au lieu de u, & $\sqrt{H}$, au lieu de $\sqrt{h}$ dans $u, z :: \sqrt{h}, \sqrt{x}$, nous aurons $V, z :: \sqrt{H}, \sqrt{x}$, c'eſt-à-dire les viteſſes des quantités d'eau qui ſortent dans le même inſtant par les ouvertures inégales des vaſes C, A, dont les hauteurs ſont auſſi inégales, ſont entr'elles comme les racines des hauteurs.

COROLLAIRE I.

14. Il ſuit de-là que l'eau qui ſort à chaque inſtant par l'ouverture d'un vaſe toujours plein, coule avec une viteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur de la ſurface ſupérieure de l'eau; car ſelon la loi de Galilée, tout corps grave à la fin de ſa chute à acquis une viteſſe qui eſt comme la racine de la hauteur dont il eſt tombé; or l'eau qui ſort de l'ouverture d'un vaſe a une viteſſe qui eſt comme la racine de la hauteur de l'eau; donc elle a la viteſſe qu'elle auroit acquiſe en tombant de cette hauteur.

COROLLAIRE II.

15. Si tandis que l'eau ſort par l'ouverture d'un vaſe, on augmente la hauteur de l'eau ou on la diminue, la viteſſe de l'eau qui ſort augmentera ou diminuera, & ces différentes viteſſes ſeront toujours entr'elles comme les racines des hauteurs.

COROLLAIRE III.

16. Puisque l'eau qui sort de l'ouverture d'un vase a une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur de la surface supérieure de l'eau, il s'ensuit selon la même loi de Galilée que si l'ouverture O (*Fig.* 4.) lui fait prendre une direction verticale, elle s'élevera jusqu'au niveau de la surface supérieure de l'eau du vase.

Si cela n'arrive pas exactement dans les jets d'eau, cela vient du frottement de l'eau contre les tuyaux, & de la resistance de l'air.

COROLLAIRE IV.

17. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici de l'eau qui sort de l'ouverture d'un vase, ou dont les côtés sont perpendiculaires à l'horison, doit se dire de l'eau qui sort de l'ouverture d'un vase incliné.

PROPOSITION IV.

18. *Si un vase cylindique* AB (Fig. 5.) *plein d'eau, se desemplit par une ouverture* E *beaucoup moindre que la largeur de son fonds, les quantités d'eau qui sortiront dans des tems égaux, seront comme les nombres impairs pris en retrogradant, c'est-à-dire comme les nombres 9, 7, 5, &c.*

DEMONSTRATION.

Concevons que le vase soit coupé par des plans paralleles à sa base, dont les hauteurs CH, CI, CL, CA soient comme les quarrés 1, 4, 9, 16 des nombres naturels 1, 2, 3, 4; quand l'eau commencera à couler sa vitesse étant comme la racine de la hauteur CA = 16 sera comme 4, & quand le niveau de l'eau sera descendu jusqu'en L*l*, la vitesse sera comme $\sqrt{CL} = \sqrt{9}$, ou comme 3, & quand le niveau de l'eau sera descendu en I*i* la vitesse sera comme $\sqrt{CI} = \sqrt{4}$, ou comme 2 & ainsi de suite; or les cylindres CD, C*l*, C*i*, C*h* étant entr'eux comme leurs hauteurs, à cause de la base commune, sont par conséquent comme 16, 9, 4, 1, & leurs différences, c'est-à-dire les cylindres LD, I*l*, H*i*, C*h* sont comme 7, 5, 3, 1, donc les quantités d'eau qui remplissent ces cylindres, c'est-à-dire les eaux

écoulées dans le tems que la viteſſe diminuoit ſucceſſivement d'un degré, ſont comme 7, 5, 3, 1; mais ſi l'eau étoit pouſſée de bas en baut d'un mouvement acceleré par une force égale à ſa peſanteur & qui agit de la même façon, elle parcourroit dans des tems égaux des eſpaces qui ſeroient comme 1, 3, 5, 7, &c. & ſa viteſſe augmenteroit d'un degré à chaque tems, ſelon la loi de Galilée; donc puiſqu'en deſcendant elle parcourt ces mêmes eſpaces priſes en retrogradant, tandis que ſa viteſſe diminue ſucceſſivement d'un degré, il s'enſuit qu'elle doit les parcourir dans des tems égaux.

COROLLAIRE I.

19. J'ai dit dans la Propoſition que l'ouverture doit être beaucoup moindre que le fonds du vaſe, car 1°. Si l'ouverture étoit égale au fonds du vaſe, il eſt viſible qu'en ce cas l'eau du vaſe tomberoit tout d'une piece, de façon que les parties inférieures n'auroient pas plus de viteſſe que les ſupérieures, & que par conſéquent cette maſſe d'eau ſuivroit la loi ordinaire des corps peſans, c'eſt-à-dire que les eſpaces qu'elle parcourroit dans des tems égaux iroient en augmentant ſelon la progreſſion des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. 2°. Si l'ouverture eſt trop grande par rapport au fonds, la colonne qui eſt ſur cette ouverture étant d'un poids trop conſidérable s'affaiſſe plus vite, ce qui fait retomber ſur elle l'eau ſupérieure des autres colonnes, d'où il arrive que l'eau qui ſort a une viteſſe plus grande qu'elle n'auroit ſi l'écoulement ſe faiſoit, de façon que la lenteur du mouvement laiſſât le tems à toutes les colonnes de fournir à peu près une même quantité d'eau.

COROLLAIRE II.

20. Connoiſſant le tems pendant lequel l'eau d'un vaſe ou d'un baſſin s'écoule par une petite ouverture, on connoîtra les quantités d'eau pendant les parties déterminées de ce tems, en cette ſorte.

Suppoſons que toute l'eau d'un vaſe s'écoule dans 12 heures, ſelon la loi de Galilée l'eſpace parcouru dans 12 heures eſt comme le quarré de 12, c'eſt-à-dire comme 144, je conçois donc que le vaſe eſt coupé par 144 plans qui ſoient tous à égale diſtance entr'eux, ou, ce qui revient au même, que le côté du vaſe ſoit diviſé en 144 parties égales, je reduis ces 144 diviſions au nom-

jusqu'à ce que le petit cylindre C*c* soit entierement écoulé, le tems de l'écoulement de C*c* sera au tems de l'écoulement de A*a* comme 2 à 1. Supposant donc qu'on débouche l'ouverture H jusqu'à ce que le cylindre E*e* se soit écoulé, nous trouverons de même que le tems de l'écoulement du cylindre F*f* sera à celui de l'écoulement du cylindre E*e* encore comme 2 à 1 ; & comme en agissant toujours de même, on trouvera toujours la même chose, il s'ensuit que le tems de l'écoulement total du cylindre CD, sera au tems de l'écoulement total du cylindre AB comme 2 à 1, ou comme la base D*d* à la base B*b* ; or il est visible que si l'on laissoit couler tout de suite le cylindre AB, le tems de son écoulement seroit égal à la somme des instans des écoulemens interrompus de ses petits cylindres ; car ces interruptions n'alterent point les vitesses de ces cylindres, lesquelles sont toujours comme les racines des hauteurs, donc en laissant couler les deux vases, les tems des écoulemens seront comme les bases.

COROLLAIRE V.

23. Si les deux vases sont d'égale hauteur, & les ouvertures de différente grandeur, il est évident que les tems des écoulemens seront en raison composée des bases & des ouvertures ; car les ouvertures doubles donnent dans le même tems des quantités d'eau doubles, &c.

COROLLAIRE VI.

24. Si les vases ayant les ouvertures égales & les bases aussi, leur hauteurs sont inégales, les tems employés à se desemplir sont comme les racines des hauteurs.

Si les hauteurs & les ouvertures sont inégales, les tems sont en raison composée de la raison des racines des hauteurs & de la raison des ouvertures.

Enfin si les ouvertures, les bases & les hauteurs sont inégales, les tems sont en raison composée de la raison des racines des hauteurs, de la raison des ouvertures & de la raison des bases.

REMARQUE.

25. L'eau étant un corps pesant, si elle descend le long d'un tube incliné, on peut lui appliquer tout ce qui a été dit dans la Mechanique touchant la descente des corps graves le long des lans inclinés.

Lorſqu'on trempe l'ouverture C dans l'eau ſans appliquer la bouche à l'ouverture A, l'air du ſiphon, & l'air extérieur qui paſſe ſur la ſurface de l'eau ſont en équilibre, c'eſt pourquoi l'eau étant également preſſée de part & d'autre, ſe tient dans ſon niveau & ne monte pas ; mais quand on applique la bouche en A, & qu'on aſpire, comme alors on étend la capacité des poulmons, l'air du ſiphon ſe dilate, & ſon reſſort s'affoiblit ; ainſi l'air qui peſe ſur la ſurface de l'eau ſe trouvant plus fort, oblige l'eau de monter par la branche CB ; or cette branche étant beaucoup moins longue qu'il ne faudroit pour contenir le volume d'eau qui ſeroit en équilibre avec le poids de l'air, l'eau qui ſe trouve encore preſſée lorſqu'elle eſt parvenue en B, deſcend le long de la branche BA, forçant l'air dilaté qui s'y trouve de paſſer dans la bouche & la poitrine de la perſonne qui aſpire ; quand donc l'eau eſt parvenue juſqu'à la bouche, & qu'on ſe retire, elle coule par l'ouverture A, parce que la colonne d'air qui agit ſur l'ouverture A étant chargée du volume d'eau AB qui eſt plus grand que le volume BC dont eſt chargée la colonne qui peſe ſur la ſurface de l'eau du vaſe, celle-ci a plus de force, & par conſéquent elle continue à faire monter l'eau.

Delà il ſuit 1°. Que ſi on faiſoit la branche BC aſſez longue pour contenir l'eau que la force de la colonne extérieure d'air peut faire monter, l'eau ne deſcendroit point par la branche AB ; or s'il n'y avoit point d'air dilaté dans le ſiphon, l'eau pourroit monter juſqu'à 31 ou 32 pieds, mais à cauſe de l'air dilaté, lequel ne laiſſe pas de faire quelque réſiſtance quoiqu'elle ſoit peu de choſe, ſurtout ſi on aſpire bien fort, la hauteur EB de la branche BC doit toujours être un peu moindre de 31 pieds. 2°. Que ſi la branche AB étoit de même hauteur que la branche BC, l'eau reſteroit ſuſpendue à l'ouverture A ſans couler, parce que les colonnes d'air qui peſent ſur les ouvertures ſeroient d'égale force. 3°. Que ſi la branche AB étoit plus courte que la branche BC, la colonne d'air qui agit ſur l'ouverture A étant moins chargée, ſeroit plus forte, & par conſéquent elle obligeroit l'eau de rebrouſſer chemin.

Et il ne faut pas dire que la colonne qui agit ſur A étant plus haute que celle qui agit ſur B, a plus de force que nous ne lui en donnons ; car ſi elle eſt plus longue, elle eſt auſſi plus chargée, & le volume d'eau dont elle eſt ſurchargée peſe beaucoup plus que le même volume d'air qu'elle contient de plus.

28. Si on veut se passer d'appliquer sa bouche à l'extrémité du siphon, on suppléera à ce défaut d'aspiration en cette sorte.

Prenez une boëte HI (*Fig.* 8.) ayant deux tubes TV, FEDC bien soudés, & disposés comme on les voit dans la figure, le tube TV doit avoir un robinet en V, & le tube FE doit être de telle hauteur que lorsque l'extremité C sera dans la liqueur, la surface supérieure de la boëte HI soit de niveau avec la surface supérieure de l'eau du vase AB ; trempez l'extremité C dans l'eau du vase de façon que le tube EF soit vertical, remplissez d'eau la boëte HI, & le tube TV par le moyen d'une ouverture qui doit être sur la surface superieure de la boëte & que vous boucherez ensuite exactement, afin que l'air extérieur n'y entre point; cela fait, ouvrez le robinet, & tandis que l'eau de la boëte descendra, l'air contenu dans le tube EFI venant à se dilater, perdra de son ressort, c'est pourquoi l'air qui pese sur l'eau du vase contraindra cette eau à monter dans le tube dont nous supposons la hauteur moindre de 32 pieds, delà l'eau se répandra dans le tube DE, d'où elle descendra dans le tube EF pour se joindre à celle de la boëte HI, & comme nous supposons que la capacité de la boëte est assez grande pour ne s'être pas tout-à-fait desemplie avant que l'eau du vase y soit parvenue, il ne tombera pas plus d'eau par l'ouverture V qu'il n'en viendra par le tube CDEF ; ainsi l'air intérieur qui restera étant toujours moins fort que l'air qui presse sur la surface de l'eau du vase, cette eau ne cessera de monter par le tube CDEF que lorsque le vase sera tout-à-fait desempli, pourvû qu'on ait soin de tenir toujours l'extremité C trempée dans l'eau.

29. Si l'on joint ensemble plusieurs siphons semblables à celui que je viens de décrire, on pourra élever l'eau beaucoup au-dessus de 32 pieds en cette sorte.

Soient les deux caisses CD, EF (*Fig.* 9.) dont les surfaces superieures sont de niveau à la surface superieure de l'eau du vase AB ; j'adapte aux surfaces inférieures de ces caisses deux tuyaux ON, PQ, d'égale hauteur, ayant chacun son robinet en O & en P ; j'adapte deux autres tuyaux ST, VX à leur surfaces superieures, faisant le tuyau VX plus long que l'autre, & j'enchasse ces tuyaux dans deux caisses HI, LM dont la derniere est plus élevée que la premiere au-dessus du niveau de l'eau du vase AB ; enfin j'adapte au côté de la caisse HI un tube ZR qui descend dans l'eau du vase, & au côté de la caisse LM un tube GY qui s'enchasse

s'enchasse dans la surface supérieure de la caisse HI ; les caisses doivent être bien fermées de tous côtés, & les siphons bien soudés, afin que l'air extérieur n'entre point, & les extremités T, X, des tubes TS, VX, doivent entrer bien avant dans les caisses HI, LM, afin que l'eau qui montera par les tubes ZR, YG, ne descende point dans les caisses inférieures CD, EF, cela fait.

Je remplis d'air les caisses CD, EF, & leur tubes inférieurs par le moyen des ouvertures qui doivent se trouver sur les surfaces supérieures de ces caisses, ensuite bouchant bien ces ouvertures, j'ouvre le robinet O ; alors l'eau de la caisse CD commençant à descendre, l'air compris dans les tubes se dilate, & la colonne d'air qui pese sur l'eau du vase devenant plus forte que l'air intérieur dont la dilatation diminue le ressort, l'eau du vase monte par le tube ZR, & se répand dans la caisse HI ; je ferme le robinet O, afin que toute l'eau de la caisse CD ne s'enfuye pas ; car si cela arrivoit, l'air qui entreroit le long de NT arrêteroit le cours de l'eau du tube ZR ; & en même-tems j'ouvre le robinet P, ainsi l'eau de la caisse EF venant à descendre, l'air compris dans les tubes VX, GY, se dilate encore davantage, ce qui fait que l'eau monte par le tube YG dans la caisse LM, & je pourrois continuer de la même façon à élever l'eau de plus en plus, en augmentant le nombre des caisses inférieures & des caisses supérieures.

Cette Machine est très-propre pour faire voir comment la seule dilatation de l'air peut élever l'eau non-seulement au-dessus de son niveau, mais même au-dessus de 32 pieds qui est le poids de l'atmosphere, mais elle seroit extremement incommode dans la pratique par la trop grande quantité de caisses inférieures & superieures, & de tuyaux qu'il faudroit faire si on vouloit élever l'eau à une certaine hauteur, & par l'embarras de remplir d'eau les caisses inférieures.

30. On peut vuider un vase plein par le moyen d'un Siphon sans y employer la dilatation de l'air, ainsi qu'on va voir.

Soit le vase AB (*Fig.* 10.) je fais une ouverture X au fonds du vase à laquelle j'adapte un Siphon STV dont l'extremité S à laquelle je mets un robinet est hors du vase, & l'autre extremité V est un peu au-dessus du fonds ; je verse de l'eau dans le vase, & à mesure qu'elle s'éleve, elle monte dans la branche VT, c'est pourquoi si le plus haut point T du Siphon se trouve plus

bas que le niveau de l'eau lorsque le vase est plein, l'eau de l
branche VT se trouvant pressée par une colonne d'eau extérieur
plus haute, passe dans la branche TS & y descend, soit que l
robinet soit ouvert ou qu'il ne le soit pas ; car s'il est ouvert, l
colonne d'air qui agit par l'ouverture S est obligée de supporte
non-seulement une colonne d'air semblable qui pese sur le nivea
de l'eau, mais encore l'effort que l'eau du vase fait sur l'eau d
la branche VT qui n'est pas à son niveau ; ainsi cette colonn
doit ceder & laisser couler l'eau, & si le robinet est fermé, l'ai
qui est enfermé dans le Siphon se condense pour ceder à la forc
de l'eau, & quand il se trouve trop pressé, il se met en petites bulle
qui se glissent entre l'eau & les parois du Siphon, & sortent pa
la surface de l'eau du vase en y faisant des petites vessies.

Supposant donc le robinet ouvert, & que le niveau de l'ea
du vase surpasse la hauteur du Siphon, l'eau coule par l'ouvertur
S, à cause du poids de l'eau qui est au-dessus du niveau du Si
phon, & ensuite quand la surface supérieure devient plus bass
que la hauteur du Siphon, l'eau ne laisse pas que de couler tou
jours, parce que la colonne d'air qui agit sur l'ouverture S sup
porte une colonne d'eau ST beaucoup plus haute que celle qu
fait élever la colonne d'air qui pese sur la surface de l'eau ; d'o
il suit que cette colonne étant toujours obligée de céder, l
vase doit se desemplir totalement.

Si l'on ne verse de l'eau dans le vase que jusqu'à une hauteu
moindre que celle du Siphon, l'eau restera dans la branche VT
à la hauteur de l'eau extérieure, mais si on applique la bouche
en S, & qu'on aspire, toute l'eau du vase s'écoulera par cette
ouverture dès qu'on aura retiré la bouche.

Si l'on accommode le Siphon de façon qu'il passe le long des
parois du vase (*Fig.* 11.) & qu'on y fasse une petite ouverture E
en dessous de la courbure qui sert d'anse au vase, on aura beau
aspirer en S, l'eau ne remontera point, parce que l'air extérieur
entrant par l'ouverture E empêchera la dilatation de l'air inté-
rieur du Siphon, c'est pourquoi l'air qui pesera sur l'eau du vase,
s'il n'est pas plein, ne pourra l'élever au-dessus de son niveau ;
mais si on bouche l'ouverture E avec le doigt, & qu'on aspire
en S, on fera couler toute l'eau qui étoit dans le vase par l'ou-
verture S ; que si on remplissoit totalement le vase, en sorte que
le niveau fut au-dessus de l'ouverture E, l'eau couleroit par cette
ouverture jusqu'à ce qu'elle fut de niveau avec elle, après quoi

elle ne couleroit plus quand même on boucheroit l'ouverture E, à moins qu'on n'aſpirât en même-tems en S.

Le vaſe que je viens de décrire, & grand nombre d'autres inventions ſemblables, étonnent beaucoup les perſonnes qui en voyent les effets ſans en pénétrer la cauſe, mais pour peu qu'on vienne à connoître les proprietés de l'air, on eſt bientôt étonné de l'avoir été tant.

31. L'eau qui coule de l'extremité S du Siphon, lorſque le vaſe eſt plein (*Fig.* 10. 11.) coule avec une viteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale à la hauteur du niveau de l'eau du vaſe, parce qu'elle eſt preſſée par cette hauteur, laquelle eſt plus grande que la hauteur du Siphon; au contraire dans le Siphon de la figure 7. l'eau ne coule de l'ouverture A qu'avec la viteſſe qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur de l'eau du vaſe, quoique la hauteur de la branche AB ſoit plus grande, parce que le ſurplus de la hauteur ſeroit ſoutenu par la colonne d'air qui agit ſur A, comme il a été dit plus haut.

32. La compreſſion de l'air peut auſſi donner du mouvement à l'eau, de même que la dilatation, & c'eſt ce que nous allons voir.

Soit un grand vaſe AB (*Fig.* 12.) ſéparé en deux par un fonds ou diaphragme CD ayant le fonds ſupérieur AE concave auquel eſt une ouverture F qui communique avec l'eſpace AD; j'adapte au milieu de ce fonds ſupérieur un tuyau NM dont l'extremité M ne touche pas le diaphragme, & dont l'autre extremité N ſoit élevée au-deſſus du fonds ſuperieur; j'adapte à ce fonds un autre tuyau GH qui traverſe le diaphragme, & dont l'extremité H ne touche pas le fonds inférieur; enfin j'en adapte un troiſiéme IL dont les extremités ne touchent ni le fonds ſuperieur ni l'intérieur; cela fait, je bouche l'ouverture G & je verſe de l'eau dans la capacité ſupérieure AD par l'ouverture F, juſqu'à ce qu'elle ſoit au niveau de l'ouverture I du tube IL, je ferme l'ouverture F, & débouchant l'ouverture G, je laiſſe entrer l'eau dans la capacité inférieure CB, cette eau montant peu à peu dans cette capacité, en chaſſe l'air lequel paſſe par le tuyau IL, & comprime l'air qui ſe trouve dans le reſte de la capacité AD, par cette compreſſion le reſſort de l'air s'augmente de plus en plus, & comme auparavant il y avoit équilibre entre l'air extérieur & l'air intérieur, cette équilibre ſe rompt, & l'air intérieur l'emporte, mais

comme on a soin de faire la hauteur EB
que la hauteur du tuyau MN au-dessus d
est dans la capacité AD, il est visible que
que l'air intérieur doit élever, est plus foible
HG, donc l'air intérieur doit l'emporter du
doit sortir par l'ouverture N ; cette Machin
la Fontaine de *Heron*, qui étoit un Math
drie.

33. Si après avoir laissé remplir la cap
on met du feu sous le fonds du vase, la
l'air qui reste dans la capacité AD, & par
de cet air étant augmenté, l'eau de la ca
le tube MN.

34. L'eau qui sort par l'effort de l'air c
vitesse qu'elle auroit si elle étoit pressée pa
capable d'être en équilibre avec la différen
fort de l'air comprimé & de la force de l'ai
l'air comprimé forçant l'air exterieur, emp
force à le vaincre, & ce n'est qu'avec l'aut
l'eau de sortir ; or une colonne d'eau qui se
cette partie, auroit la même force ; donc si
agissoit sur l'eau qui sort, elle lui imprir
tesse.

Donc 1°. l'eau qui sort par la force de la
a une vitesse égale à celle qu'elle auroit ac
la hauteur d'une colonne d'eau qui feroit si
que la compression, car l'eau qui sort par u
jours la vitesse qu'elle acquerroit en tomb
l'eau qui la comprime (*N.* 14.) 2°. Si le re
en sorte que sa force s'augmente ou qu'elle
de l'eau qui sort sont comme les racines d
lonnes d'eau qui feroient le même effet su
de l'air ; car ces colonnes augmenteroient
lon que la force du ressort de l'air augmente
mais les vitesses de l'eau qui sortiroit, sero
si elle tomboit de ces différentes hauteurs
quises à la fin des hauteurs sont comme les r
donc, &c. 3°. Le ressort de l'air comprim
l'air non comprimé comme la masse à la n
volume, il s'ensuit que l'eau est pressée par

une force qui est comme la différence des masses de l'air comprimé & de l'air non comprimé ; je suppose ici que l'air comprimé occupe la même place qu'occupoit l'air non comprimé, ce qui arriveroit dans la fontaine de *Heron*, si au lieu de faire couler de l'eau par le tube GH, on adaptoit en G un cylindre avec un piston, & qu'on comprimât l'air intérieur, ainsi qu'il a été dit dans l'airometrie. 4°. Le ressort de l'air comprimé étant au ressort de l'air non comprimé réciproquement comme le volume de l'air non comprimé au volume de l'air comprimé, l'eau qui sort par la pression de l'air comprimé est poussée avec une force qui est comme la différence du volume de l'air non comprimé au volume de l'air comprimé ; je suppose que les masses de ces deux airs sont différentes, ce qui arrive dans la fontaine de *Heron*, parce que l'eau qui entre dans la cavité inférieure resserre l'air qui y étoit, & diminue son volume avant que cet air puisse vaincre l'air extérieur qui pese sur l'eau qui sort. 5°. Dans la fontaine de *Heron*, l'air comprimé n'est pressé que par l'eau du tuyau GH, car l'air qui pese sur ce tuyau ne le comprime point & seroit en équilibre avec lui ; or le ressort est toujours égal à la force qui le comprime, donc la force de l'air comprimé est égale à la force de la colonne d'eau GH, en supposant que l'eau de la cavité inférieure ne monte qu'en H, ou à la force de la colonne qui pese sur le niveau qui est dans cette cavité, si ce niveau est plus haut que H ; mais ce ressort agit de la même façon sur l'eau de la cavité supérieure, donc cette eau agit avec une vitesse qu'elle auroit acquise si elle étoit tombée de la hauteur de la colonne qui pese sur le niveau de l'eau de la cavité inférieure, & par conséquent elle monte à une hauteur égale à la hauteur de cette colonne, mais il faut prendre garde que le niveau de l'eau de la cavité inférieure s'élevant toujours, la hauteur de la colonne GH diminue aussi toujours, & que par conséquent la hauteur de l'eau qui sort va en diminuant, d'autant plus que le niveau de l'eau de la cavité superieure baisse à mesure que l'eau sort.

De la Pompe aspirante, & de la Pompe refoulante.

35. La Pompe aspirante est un cylindre creux AB (*Fig.* 13.) fermée à l'une de ses extremités par un couvercle ou *soupape* G qui s'ouvre en dedans, de façon qu'elle peut retomber par son propre poids; on adapte à ce cylindre un piston HF dont le bout est

creux & se ferme par une autre soupape R qui s'ouvre du côté de A ; l'extremité H du piston est jointe à un levier QP qui qui tourne librement autour d'un point fixe P, & qui a un bras QS à son extremité Q, afin qu'en tirant de Q vers S, ou en poussant de S vers Q, on puisse aisément enfoncer ou retirer le piston.

Quand on veut se servir de cette machine, on met son extremité B dans l'eau, tenant le cylindre dans une situation verticale, on enfonce le piston jusqu'en G, & l'air qui se trouve entre le piston & la soupape inférieure étant comprimé par ce mouvement, s'ouvre un passage par la soupape R, laquelle se referme dès que le piston touche la soupape inférieure ; on retire le piston, & comme alors la colonne d'air qui pese sur le piston est soutenue par la soupape R, laquelle ne le laisse pas passer dans l'espace que le piston abandonne, la colonne d'air qui pese sur l'eau devient plus forte, à cause que rien ne pese plus sur la soupape G, & par conséquent elle oblige la soupape G de s'ouvrir, & l'eau monte dans le cylindre jusqu'au piston, supposé toujours que l'espace compris entre la soupape G & le piston n'excede pas 32 pieds qui est la plus grande hauteur à laquelle le poids de l'atmosphere peut faire monter l'eau ; on enfonce de nouveau le piston,& l'eau qui est montée dans le cylindre se trouvant pressée entre le piston & la soupape G qui se referme par son propre poids & par la compression de l'eau, la soupape R est contrainte de s'ouvrir & de donner passage à l'eau, jusqu'à ce que le piston vienne à toucher la soupape G, car alors l'eau qui pese sur la soupape R l'oblige de se refermer ; on retire le piston, & tandis qu'il entre encore de l'eau par la soupape G, le piston enleve celle qui est au-dessus de la soupape R, & l'oblige de couler par un canal AX qui est au sommet du cylindre AB ; ainsi en redoublant les coups de piston, on fait monter dans le canal AX autant d'eau que l'on veut.

36. Dans la Pompe refoulante (*Fig.* 14.) le piston HR entre par l'ouverture inférieure B qui trempe dans l'eau, & l'on met vers le milieu du cylindre un diaphragme HI ayant une soupape G ; quand donc on tire le piston de G en B la soupape R s'ouvre pour donner passage à l'eau, & se referme quand le piston est en B ; & quand on enfonce le piston de B vers G l'eau comprise entre le piston & le diaphragme ouvre la soupape G, & entre dans la cavité supérieure AI ; & il est aisé de voir qu'en redoublant les coups de piston, on peut faire monter dans le canal VX tant d'eau que l'on voudra.

37. Toutes les Machines inventées pour élever l'eau par le moyen de l'air, sont fondées sur les principes que nous venons d'expliquer dans ce Chapitre, & la plupart même ne sont que des repetitions & des combinaisons de celles qu'on vient de voir; quant à celles qui élevent l'eau sans le secours de l'air, leur mechanisme n'étant établi que sur les principes qui sont répandus dans tout cet Ouvrage, il seroit inutile de m'arrêter à en donner l'explication.

CHAPITRE III.

Du Cours des Rivieres.

DEFINITIONS.

38. LE *lit* d'un Fleuve ou d'une Riviere est le canal dans lequel il coule, & la *section* d'un Fleuve est un plan vertical que l'on conçoit couper l'eau perpendiculairement à son courant, ou à ses rives, ensorte que si ce plan existoit réellement, l'eau seroit arrêtée comme par une digue.

Les rives d'un fleuve étant ordinairement fort irregulieres; les sections le sont aussi, mais on peut les reduire à des parallelogrammes rectangles, dont l'un des côtés seroit la largeur du Fleuve.

PROPOSITION V.

39. *Tout fleuve qui n'est arrêté par aucun empêchement coule avec une vitesse qui s'accelere.*

DEMONSTRATION.

Le fonds du lit d'un fleuve peut être ou horizontal ou incliné à l'horison, ce qui fait deux cas.

Si le fonds est horizontal, les couches d'eau inférieures sont pressées par les supérieures; or l'eau qui est pressée coule avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur de la surface supérieure de l'eau qui la presse (*N.* 13), donc les différentes couches d'un fleuve coulent avec des vitesses égales à celles qu'elles auroient acquises en tombant de la hauteur de la surface supérieure de l'eau, & par conséquent leurs vitesses étant comme les racines de ces hauteurs (*N.* 13.) sont

des vitesses accelerées, d'autant plus qu'à mesure que ces couches coulent, elles reçoivent toujours des nouvelles impressions de l'eau supérieure qui les presse.

Si le fonds du lit est incliné à l'horison, l'eau étant un corps pesant descend le long du fonds de même que les corps graves descendent le long des plans inclinés, c'est-à-dire avec une vitesse accelerée.

COROLLAIRE.

40. Il suit de-là 1°. Que les fleuves coulent d'autant plus vite que le fonds de leur lit est plus profond, ou que son angle d'inclinaison avec l'horizon est plus grand. 2°. Que les fleuves coulent plus vite dans les endroits plus écartés de leur source que dans ceux qui en sont plus près. 3°. Que leurs différentes couches ont d'autant plus de vitesse qu'elles sont plus près du fonds, parce que celles qui sont plus près du fonds sont plus chargées que les autres.

Que si l'expérience n'est pas toujours d'accord avec ce que nous venons de dire, cela vient de l'inégalité & de la rudesse du fonds & des rives qui arrêtent le mouvement de l'eau, tantôt plus, tantôt moins.

DEFINITION.

41. Toutes les couches d'eau d'un fleuve ayant des vitesses inégales à cause de l'inégalité des hauteurs, si parmi ces vitesses l'on en prend une qui soit telle qu'en supposant que toutes les couches coulent avec cette vitesse, il s'écoule autant d'eau par une section qu'il s'en écoule dans le même tems avec les vitesses inégales, cette vitesse s'appellera *vitesse moyenne*.

PROPOSITION VI.

42. *Si par différentes sections égales d'un ou de plusieurs fleuves l'eau coule avec la même vitesse, les quantités d'eau qui passeront par ces sections dans le même tems seront égales.*

DEMONSTRATION.

Puisque les sections sont égales, c'est-à-dire de même base & de même hauteur, il y a autant de couches d'eau dans les unes que dans les autres, & les différentes vitesses des couches d'eau d'une section sont égales aux différentes vitesses des couches

ches de l'autre; donc la viteſſe moyenne de l'une eſt égale à la viteſſe moyenne de l'autre ; or il eſt viſible que ſi l'eau couloit par les unes & par les autres avec cette viteſſe moyenne, les quantités d'eau qui s'écouleroient dans le même tems ſeroient égales, donc les quantités d'eau qui s'écoulent dans le même tems avec des viteſſes inégales, ſont auſſi égales, puiſque la quantité d'eau qui s'écoule par une ſection avec les viteſſes inégales des couches, eſt la même qui s'écouleroit dans le même tems en donnant à toutes les couches la viteſſe moyenne.

COROLLAIRE I.

43. Donc ſi les ſections par où l'eau coule avec la même viteſſe ſont inégales, les quantités d'eau qui couleront dans le même tems ſont inégales, & le rapport de ces quantités eſt le même que celui des ſections, c'eſt-à-dire, que ſi une ſection eſt double, triple, quadruple, &c. d'une autre ſection, la quantité d'eau qui en ſortira ſera double, triple, quadruple, &c. de celle qui ſortira par l'autre ſection; car les quantités d'eau ne ſont autre choſe que les ſections multipliées par les viteſſes qui ſont ici égales.

COROLLAIRE II.

44. Si les ſections ſont égales & les viteſſes inégales, les quantités d'eau ſeront comme les viteſſes; car ſi la viteſſe de l'une eſt, par exemple, double de la viteſſe de l'autre, il doit s'écouler dans le même tems une quantité d'eau double à cauſe qu'une viteſſe double fait parcourir dans le même tems un eſpace double.

Et ſi les ſections ſont inégales & les viteſſes auſſi, les quantités d'eau qui en ſortiront dans le même tems ſeront en raiſon compoſée, de la raiſon des ſections, & de la raiſon des viteſſes, ce qui eſt trop clair pour avoir beſoin de demonſtration.

Il faut entendre ici par le mot de viteſſe les viteſſes moyennes, parce qu'il s'écouleroit autant d'eau avec ces viteſſes qu'il s'en écoule avec les viteſſes inégales, comme il a déja été dit.

DEFINITION.

45. On dit qu'un fleuve eſt dans *un état permanent* quand il n'augmente ni ne decroit, & que toutes ſes ſections ſont d'égale hauteur quoiqu'elles ſoient d'inégale largeur.

Au reſte comme il ſe trouve ſouvent dans les fleuves des creux,

où l'eau ne coule point, de façon que quand tout le fleuve feroit à sec, ces creux ne laisseroient pas que d'être remplis, il faut entendre par la hauteur d'une section une ligne verticale sur la surface de l'eau, & qui ne descend que jusqu'à la couche la plus basse qui coule comme le reste du fleuve, par exemple, si la ligne ABCDE (*Fig.* 15.) représente le fonds du lit d'un fleuve qui coule de A vers E, & qu'on veuille une section qui passe le point C du creux BCD dans lequel l'eau ne coule point comme le reste de l'eau du fleuve, dont nous supposons que la surface supérieure est la droite HI, on élevera du point C une droite CR perpendiculaire à la surface supérieure de l'eau, mais on ne prendra pour la hauteur de la section que la partie RS qui se termine à la derniere couche ASE qui coule comme le reste du fleuve.

PROPOSITION VII.

46. *Si un fleuve est dans un état permanent, quelqu'inégales que soient les sections qu'on voudra lui faire, les quantités d'eau qui passeront par ces sections dans le même tems seront toutes égales.*

DEMONSTRATION.

Soit la figure AE le plan d'un fleuve qui coule de A vers D (*Fig.* 16),& les droites GB,FC, MN le plan de différentes sections inégales faites en différens endroits; si on veut que la section FC étant plus large que la section GB, il passe plus d'eau par la section FC qu'il n'en passe par la section GB dans le même tems, il s'ensuivra qu'entre les deux sections FC, GB la hauteur du fleuve baissera, ce qui est contre l'hypotèse, puis qu'on suppose que le fleuve est dans un état permanent; & si l'on veut qu'il passe plus d'eau par GB qu'il n'en passe par FC dans le même tems, la hauteur de l'eau s'élevera davantage entre les deux sections, ce qui est encore contre l'hypotèse; donc puisqu'il ne peut passer ni plus ni moins d'eau par l'une & l'autre dans le même tems sans changer l'état permanent du fleuve, il s'ensuit que les quantités d'eau qui passent par les différentes sections dans le même tems sont égales.

COROLLAIRE.

47. Il suit de là 1°. Que l'eau coule plus vîte par les moindres sections que par les plus grandes, car si les vitesses étoient égales, il est évident qu'il passeroit plus d'eau dans le même tems par les plus grandes sections que par les

moindres; mais nous venons de prouver que les quantités qui passent par toutes les sections sont égales, donc, &c. 2°. Que si l'on retrecit la largeur du fleuve en quelque endroit, le fleuve cessera d'être dans un état permanent; car ou l'eau coulera avec la même vitesse qu'auparavant, ou elle coulera plus vite; si elle coule avec la même vitesse, donc il en passera moins par cet endroit qu'il n'en passoit, & par conséquent le fleuve doit s'enfler du côté de la source; que si elle coule plus vite, cette plus grande vitesse ne pourroit venir que d'une plus grande pente qui se trouveroit dans le fonds, puisque nous supposons qu'on n'auroit rien changé dans ce fonds; donc cette vitesse devroit venir de ce que la section deviendroit plus haute, & par conséquent de ce que le fleuve enfleroit en cet endroit. 3°. Que si l'on élargit le fleuve en quelque endroit, le fleuve cessera encore d'être dans un état permanent; car ou la vitesse sera la même, ou elle sera moindre, si la vitesse est la même, il passera plus d'eau par cet endroit qu'il n'en passoit auparavant, & par conséquent l'eau baissera du côté de la source, & si la vitesse est moindre, cette moindre vitesse ne venant point de ce que le fonds sera moins incliné, puisqu'on suppose que ce fonds est toujours le même, il faudra nécessairement qu'elle vienne de ce que la hauteur de l'eau est diminuée; & il ne faut pas dire que si les raisons que nous venons de donner sont vrayes, il n'y a donc jamais de fleuve dans un état permanent, à moins que toutes les sections ne soient d'égale largeur & d'égale hauteur; car dans les fleuves permanens le plus ou le moins de vitesse vient du plus ou du moins de frottement qui se fait entre les sections. 4°. Que les vitesses moyennes des sections sont entr'elles reciproquement comme les sections, car puisque dans le même instant il passe autant d'eau par la petite section que par la grande, les produits des sections par leurs vitesses moyennes sont égaux, car les quantités d'eau ne sont autre chose que ces produits; nommant donc A la premiere section, V sa vitesse, a la seconde section, u sa vitesse, on aura $AV = au$, donc $V, u :: a, A$.

PROPOSITION VIII.

48. *Si un fleuve est enflé, la quantité d'eau qui passe par une de ses sections, est à la quantité d'eau qui passoit dans un tems égal par la même section, avant que le fleuve enflât en raison composée de la section du fleuve enflé à la section du fleuve non enflé, & de la vitesse*

moyenne de la section du fleuve enflé à la vitesse moyenne de la section du fleuve non enflé.

DEMONSTRATION.

Je considere la section après & avant le gonflement du fleuve comme deux différentes sections d'un même fleuve, & je les nomme S, *s*, leurs vitesses moyennes V, *u*, & les quantités d'eau qui coulent par ces sections dans le même tems Q, *q*; supposons que par la section S avec la vitesse *u* de l'autre section, il s'écoulât dans le même tems une quantité d'eau que je nomme *m*, il est évident qu'en supposant les vitesses égales les quantités d'eau sont comme les sections, puisque ces quantités ne sont autre chose que les sections multipliées par les vitesses qui sont ici supposées égales; donc *m*, *q* :: S, *s*; de même il est clair que si nous supposons que les quantités Q, *m* coulent de deux sections égales S, S dans le même tems avec les vitesses V, *u*, ces quantités seront comme les vitesses; donc Q, *m* :: V, *u*, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons Q*m*, *mq* :: SV, *su*, & divisant la premiere raison par *m*, nous aurons Q, *q* :: SV, *su*.

COROLLAIRE I.

49. Puisque Q, *q* :: SV, *su*, donc Q*su*=*q*SV, d'où l'on tire V, *u* :: Q*s*, *q*S, c'est-à-dire les vitesses moyennes de deux sections ou de la même section d'un fleuve selon deux états différens, sont en raison composée de la raison directe des quantités d'eau, & de la raison inverse des sections, s'il y en a deux, ou de la raison inverse des différentes grandeurs de la même section, s'il n'y en a qu'une, considerée sous deux états différens d'un même fleuve.

COROLLAIRE II.

50. S'il y a deux sections & que les quantités Q, *q* soient égales, on aura SV=*su*, à cause de Q, *q* :: SV, *su*, donc V, *u* :: *s*, S, c'est-à-dire les vitesses moyennes sont reciproques aux sections quand les quantités d'eau sont égales.

COROLLAIRE III.

51. S'il n'y a qu'une section, & que nous appellions *a* l'augmentation de quantité d'eau qui coule dans un tems égal après

le gonflement, nous aurons $Q = q + a$, & comme $Q, q :: SV, su$, nous aurons $q + a, q :: SV, su$, & divisant $q + a - q, q :: SV - su, su$, ou $a, q :: SV - su, su$, c'est-à-dire, l'augmentation est à la quantité qui couloit auparavant comme la différence des produits des vitesses moyennes par les grandeurs différentes des sections, est au produit de la section avant le gonflement par sa vitesse moyenne.

COROLLAIRE IV.

52. S'il n'y a qu'une section & qu'elle soit un rectangle, les différentes grandeurs de cette section avant & après le gonflement sont comme les hauteurs, ainsi l'augmentation est à la quantité d'eau qui couloit auparavant comme la différence des produits des hauteurs par les vitesses est au produit de la hauteur avant le gonflement multipliée par la vitesse.

PROPOSITION IX.

53. *Les différentes vitesses des couches d'eau qui passent par une section d'un canal incliné, sont comme les ordonnées d'une demi-parabole tronquée.*

DEMONSTRATION.

Soit AB (*Fig.* 17.) le profil du lit d'un canal qui coule de A vers B; AH la ligne horizontale qui passe par le sommet A du canal, & CD une section du fleuve.

La couche AC descendant le long de AC a acquis en C une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur CH du plan incliné AC, & elle n'en a point acquis une plus grande par la pression de l'eau supérieure comme nous le démontrerons dans le Corollaire suivant; de même la couche AD a acquis en D une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur DG du plan incliné AD, & ainsi des autres couches; donc les vitesses acquises sont comme les racines des hauteurs CH, DG; je prolonge CD jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne horizontale AH en N, & les triangles semblables HCN, GDN, donnent HC, GD :: CN, DN, donc les vitesses que les couches AC, AD ont acquises en C & D, sont comme les racines de CN, DN, puisqu'elles sont comme les racines de HC, GD, qui sont en même raison que CN, DN; ainsi supposant que CB, DE expriment les vitesses acquises en C & D,

la courbe NEB sera une demi-parabole, car les ordonnées C
DE seront entr'elles comme les racines des abscisses CN, DN
& les ordonnées comprises dans le tronquement CDEB exprim
ront les vitesses des couches comprises entre la plus basse AC
la plus haute AD, donc, &c.

COROLLAIRE I.

54. Pour faire voir que la pression de l'eau supérieure n'au
mente point la vitesse de l'eau inférieure dans les canaux incliné
il n'y a qu'à faire attention que l'eau de la couche AP descenda
le long du plan incliné AD de la même façon que les corps gr
ves, sa pesanteur se partage en deux directions dont l'une est
droite OR perpendiculaire au plan incliné AO, & l'autre est
droite OD parallele à ce plan; or la couche AO en O ne pe
presser ni par la droite OR, ni par la droite OD la couche A
en C, donc l'eau en C n'est point pressée par la couche sup
rieure AO, & on prouvera de la même façon que l'eau en
n'est point pressée par les autres couches comprises entre la co
che supérieure AD & l'inférieure AC, & que toutes ces couch
intermediaires ne sont pas pressées les unes par les autres dans
section CD.

Dans les fleuves dont le fonds du lit AB n'est que très-peu i
cliné à *l'horizon*, la droite OR se confond à peu de chose pr
avec la droite OC, de même que celle-ci se confond avec
perpendiculaire CD, & par conséquent l'eau inférieure d'un
section se trouve pressée par la supérieure, laquelle ne coule pre
que que pour se mettre de niveau avec l'inférieure que sa pre
sion fait couler.

Il y a donc cette différence entre l'eau des fleuves, dont
fonds est à très-peu de chose près horizontal, & l'eau de ce
dont le fonds est plus incliné, que dans les premiers l'eau inf
rieure est pressée par la supérieure, au lieu que dans les autres l'ea
supérieure ne presse point l'inférieure, parce que sa pesanteur
partage en deux parties, dont l'une n'agit que sur le plan inclin
& l'autre n'agit ni sur le plan incliné ni sur l'eau inférieure.

COROLLAIRE II.

55. Dans les canaux & les fleuves qui ont le fonds du lit i
cliné, l'eau du fonds coule quelque fois avec moins de vite

que la supérieure, à cause du frottement du fonds.

COROLLAIRE III.

56. Si l'on connoit la vitesse CB de la couche inférieure, la vitesse DE de la supérieure, & la hauteur CD de la section, on pourra aisément déterminer le diametre CN & le parametre de la parabole.

Car puisqu'on a $\overline{CB}^2$, $\overline{DE}^2$ :: CN, DN, par la proprieté de la parabole, donc $\overline{CB}^2 - \overline{DE}^2$, $\overline{DE}^2$ :: CN — DN, DN :: CD, DN, ainsi la quatriéme proportionnelle à la différence des quarrez de CB, DE, au quarré de DE & à la hauteur CD, sera la droite DN, laquelle étant ajoutée à CD donnera le diametre CN.

Et pour trouver le parametre, on prendra une troisiéme proportionnelle à la droite CN & à la droite CB, ce qui est évident par la nature de la parabole.

COROLLAIRE IV.

57. La droite CD étant prise pour une perpendiculaire quelconque tirée dans la section d'un canal ou d'un fleuve, si l'on connoit les espaces CB, DE, parcourus dans un certain tems par les couches extrêmes, c'est-à-dire par l'inférieure & la supérieure, on connoîtra la quantité d'eau qui sort dans le même tems par la droite CD en cette sorte.

Je cherche le diametre CN de la parabole, comme il a été dit dans le Corollaire précédent, & l'espace parabolique CNE devient connu, car par la proprieté de cette parabole, l'espace CNB est $\frac{2}{3}$ CB × CN, de même l'espace parabolique NDE est $\frac{2}{3}$ DE × DN, ainsi l'espace CDEB est $\frac{2}{3}$ CB × CN — $\frac{2}{3}$ DE × DN, mais l'espace CDEB est la somme des espaces parcourus par toutes les couches dans le même tems, & cette somme est égale à la quantité d'eau écoulée dans le même tems par la section CD; donc cette quantité d'eau est $\frac{2}{3}$ CB × CN — $\frac{2}{3}$ DE × DN.

COROLLAIRE V.

58. Si la section est un parallellogramme rectangle, on aura

la quantité d'eau qui s'écoule dans le même tems par la section en multipliant la quantité d'eau qui sort par la perpendiculaire CD, par la largeur de la section, ce qui est évident.

COROLLAIRE VI.

59. Pour trouver la vitesse moyenne, il faut diviser l'espace CDEB par la hauteur CD, & le quotient donnera la droite CT qui sera la vitesse moyenne; car si toutes les couches avoient la vitesse moyenne, les espaces qu'elles parcourroient dans un même tems seroient égaux, ainsi ces espaces formeroient un rectangle CDTV égal à l'espace parabolique CDEB, & les hauteurs de ces deux espaces seroient égales, d'où il est évident que pour avoir la largeur CT du rectangle, il faut diviser l'espace parabolique par la hauteur CD.

COROLLAIRE VII.

60. Et pour avoir sur la droite CD le point X auquel correspond la vitesse moyenne XZ, on cherchera cette vitesse moyenne par le Corollaire précédent, on le mettra de C en T, du point T on élevera sur CT la perpendiculaire TZ, & du point Z où elle coupe la courbe, on menera l'ordonnée ZX qui sera la vitesse moyenne, ce qui est évident.

Mais si on veut avoir la distance NX du point X au sommet de la parabole, on aura par la proprieté de cette courbe $\overline{CB}^2$, $\overline{XZ}^2$ :: CN, XN, & par conséquent la quatriéme proportionnelle au quarré de la vitesse CB, au quarré de la vitesse moyenne XZ, & à l'abscisse CN, sera la distance cherchée XN.

PROPOSITION X.

61. *Si le fonds du lit d'un Canal ou d'un Fleuve est horizontal; les vitesses des différentes couches qui passent par une section, sont comme les ordonnées d'une demi-parabole.*

DEMONSTRATION.

Soit AB (*Fig.* 18.) le profil du lit du fleuve qui coule de A vers

vers B, & CD le profil d'une ſection ; les viteſſes des couches AC, LE, IG, &c. qui paſſent par la ſection CD étant comme les racines des hauteurs CD, ED, GD, &c. ſeront par conſéquent comme les ordonnées d'une parabole ; or le lit du fleuve étant horizontal, toutes ces couches n'ont d'autre viteſſe que celles qu'elles reçoivent de l'eau ſupérieure, & la couche ſupérieure n'étant point preſſée, n'a par elle-même qu'une viteſſe infiniment petite, donc toutes les viteſſes des différentes couches ſont comme les ordonnées d'une demi-parabole complette CDB.

COROLLAIRE I.

62. La viteſſe moyenne eſt à la viteſſe de la plus baſſe couche comme 2 à 3 ; car pour avoir la quantité d'eau qui coule par la perpendiculaire CD de la ſection, dans le même tems que la couche la plus baſſe parcourt l'eſpace BC, il faut multiplier BC par les deux tiers de la hauteur DC, ce qui donne $\frac{2}{3}CB \times DC$, & par conſéquent diviſant cette quantité par la hauteur DC, on aura $\frac{2}{3}CB$ pour la largeur CX du rectangle CXZD égal à la parabole ; donc CX ſera la viteſſe moyenne, puiſqu'on ſçait que toutes les couches coulant avec cette viteſſe parcourroient un rectangle CXZD égal à la parabole CDB dans le même-tems qu'elles parcourroient avec leur différentes viteſſes la parabole CDB.

COROLLAIRE. II.

63. Et pour trouver le point G par où paſſe la couche qui a la viteſſe moyenne, on fera $\overline{CB}^2$, $\frac{4}{9}\overline{CB}^2$ :: CD, $\frac{4}{9}$CD, ainſi on aura DG $= \frac{4}{9}$CD.



CHAPITRE IV.

Du choc des Fluides.

64. DANS le choc d'un corps ſolide AB (*Fig.* 19.) contre un autre corps RS, il y a trois choſes à conſidérer. 1°. L'angle HIK ſous lequel le corps AB choque le corps RS, c'eſt-à-dire l'angle que fait la direction HI du corps AB avec la face RS qu'il choque, car nous avons démontré dans la *Mecanique*, que plus cet angle approche du droit, plus le choc eſt grand. 2°. La viteſſe, car la force d'un corps étant le produit de la maſſe par la viteſſe du corps AB, il eſt viſible qu'un corps qui a plus de viteſſe choque un autre corps avec plus de force que s'il avoit moins de viteſſe. 3°. Enfin, la denſité du corps AB, parce qu'un corps qui ſous un même volume a plus de denſité qu'un autre, contient auſſi plus de maſſe, & que par conſéquent ſi les angles de direction ſont les mêmes & les viteſſes auſſi, le corps qui a plus de denſité ou de maſſe, choquera avec une plus grande force.

Quant à l'étendue de la partie TB qui choque la face RS, il n'importe pas qu'elle ſoit plus ou moins grande ; car toutes les parties du corps AB étant étroitement liées enſemble, l'effort qui eſt répandu dans toutes ſes parties paſſe & ſe réunit en TB, en ſorte que RS reçoit le même choc que ſi toutes les parties de AB le touchoient.

Dans le choc d'un fluide contre un ſolide, ou contre un autre fluide, il faut non-ſeulement avoir égard à l'angle d'inclinaiſon de la direction du fluide, à la viteſſe & à la denſité, mais encore à l'étendue ou au volume de la partie qui choque, parce que dans le fluide toutes les parties n'étant pas étroitement liées entr'elles comme celles des ſolides, leur effort ne ſe communique pas des unes aux autres de la même façon.

Soit par exemple, le fluide AB (*Fig.* 20.) qui choque le corps KS, il eſt viſible que s'il n'y a que les parties C, D, E, qui choquent KS, le choc ſera moins grand que ſi toutes les parties C, D, E, F, G, B, choquoient à la fois, parce que les parties C, D, E, ne reçoivent que l'impreſſion des colonnes AC,

HD, IE, & nullement celle des autres colonnes.

65. Et il faut observer que l'étendue ou le volume de la partie CE, ou CB qui choque doit s'estimer par la largeur de cette partie, & par la vitesse dont l'eau est mue, parce que plus la vitesse sera grande, & plus il y aura de molécules d'eau qui choqueront dans un même tems ; par exemple, si avec une certaine vitesse il n'y a que les molécules C, D, qui choquent la partie CD dans un certain tems, il est visible qu'avec une vitesse double, il y aura deux fois plus de molécules qui choqueront cette partie dans le même-tems, c'est-à-dire, non-seulement les molécules C, D, choqueront, mais encore les molécules N, O, qui suivent celles-ci, & ainsi des autres.

PROPOSITION XI.

66. Si un même fluide choque avec une même direction & une même vitesse deux plans inégaux BC, DE, (Fig. 21.) *les forces dont ces plans sont choqués, sont comme les plans.*

DEMONSTRATION.

Par la supposition, les vitesses AB, HD sont égales, de même que les directions, & il y a aussi égalité entre les densités, puisque c'est le même fluide ; donc la différence du choc ne peut venir que du côté des volumes qui choquent les plans ; or à cause de l'égalité des vitesses, les volumes sont comme les plans BC, DE ; donc les chocs sont comme les plans BC, DE, mais les chocs étant les effets des forces, sont proportionnels aux forces ; donc les forces sont comme les plans.

COROLLAIRE I.

67. Si les vitesses AB, HD, *sont inégales & les plans égaux, les forces des chocs sont comme les quarrés des vitesses.*

Par la supposition, les plans sont égaux, & les vitesses inégales ; donc les volumes qui choquent sont comme les vitesses, or les forces sont comme les produits de ces volumes ou masses par leur vitesses ; donc les forces sont comme les produits des vitesses par les vitesses, ou comme les quarrez des vitesses.

COROLLAIRE II.

68. Si les vitesses sont inégales & les plans inégaux, les forces

des chocs sont en raison composée de la raison des plans, & de raison des quarrez des vitesses.

Par la supposition, les plans sont inégaux de même que l viteffes ; donc les volumes qui choquent sont en raison compos des plans & des viteffes ; or les forces sont comme les produ des volumes ou masses par les viteffes ; donc elles sont comn les produits des plans par les quarrez des viteffes, ou en rais composée des plans & des quarrez des viteffes.

PROPOSITION XII.

69. *Si deux fluides de différentes densités choquent des plans égau avec la même direction & des vitesses égales, les forces des chocs so comme les densités.*

DEMONSTRATION.

A cause de l'égalité des plans & des viteffes, les volum qui choquent sont égaux ; or les masses qui ont même volun sont entr'elles comme leur densités, donc les masses qui ch quent sont comme les densités, mais les forces sont comm les produits des masses par les viteffes, & par la supposition, l viteffes sont égales ; donc les forces sont comme les masses, c comme les densités.

COROLLAIRE I.

70. *Si les densités sont inégales & les plans aussi, les forces d chocs sont en raison composée des densités & des plans.*

A cause de l'inégalité des plans & de l'égalité des viteffes, l volumes qui choquent sont comme les plans, & les masses qu choquent sous ces volumes sont en raison composée des volume & des densités ; donc elles sont aussi en raison composée des plan & des densités ; mais à cause de l'égalité des viteffes, les force sont comme les masses ; donc les forces sont en raison composé des plans & des densités.

COROLLAIRE II.

71. *Si les densités & les vitesses sont inégales & les plans égaux les forces des chocs sont entr'elles en raison composée de la raison de densités & de la raison des quarrez des vitesses.*

A cause de l'égalité des plans, les volumes sont comme le viteffes & les masses qui choquent sous ces volumes, sont en

raiſon compoſée des volumes & des denſités, donc elles ſont auſſi en raiſon compoſée des viteſſes & des denſités, mais les forces ſont comme les produits des maſſes par les viteſſes ; donc elles ſont comme le produit des quarrez des viteſſes par les denſités ou en raiſon compoſée de la raiſon des denſités & de la raiſon des quarrez des viteſſes.

COROLLAIRE III.

72. *Si les denſités, les viteſſes, & les plans ſont inégaux, les forces des chocs ſont en raiſon compoſée de la raiſon des denſités, de la raiſon des plans & de la raiſon des quarrez des viteſſes.*

A cauſe de l'inégalité des plans & des viteſſes, les volumes ſont en raiſon compoſée des plans & des viteſſes, & les maſſes qui choquent ſous ces volumes étant en raiſon compoſée des denſités & des volumes, ſont par conſéquent en raiſon compoſée des denſités, des viteſſes, & des plans ; mais les forces ſont en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes, donc elles ſont auſſi en raiſon compoſée des plans, des denſités, & des quarrez des viteſſes.

PROPOSITION XIII.

73. *Si l'eau d'un Canal incliné choque directement les aîles d'une roue, la force du choc eſt comme le produit de l'aîle choquée* C *multipliée ſucceſſivement par le rayon* CD, *par la denſité de l'eau & par la hauteur* AB *de la chute de l'eau* (Fig. 22.)

DEMONSTRATION.

La force abſolue du choc eſt comme l'aîle ou le plan C multiplié par la denſité, & enſuite par le quarré de la viteſſe (*N. 64. 65.*) mais la viteſſe que l'eau a acquiſe en C eſt égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur AB, & par conſéquent elle eſt comme la racine de ſa hauteur, donc le quarré de cette viteſſe eſt comme AB ; ainſi la force abſolue du choc eſt comme le plan C multiplié par la denſité de l'eau, & enſuite par la hauteur AC, mais cette force en s'appliquant en C devient comme un poids qui fait tourner la roue & dont la viteſſe eſt CD, donc ſon moment ou la force du choc qui fait tourner la roue eſt comme le plan C multiplié par la denſité de l'eau, puis par la hauteur AB, & enfin par le rayon CD, donc, &c.

COROLLAIRE I.

74. Si l'on a deux différens canaux & deux roues que l'eau fait tourner; la densité se trouvant alors la même, nous n'y aurons point d'égard, c'est pourquoi nommant P, p, les ailes des roues, R, r leur rayons, H, h les hauteurs des canaux, & F, f les forces des chocs qui font tourner les roues, nous aurons F, f :: $P \times R \times H$, $p \times r \times h$.

COROLLAIRE II.

75. Si l'on fait $P = p$, on aura F, f :: $R \times H$, $r \times h$, c'est-à-dire les ailes des roues étant égales, les forces des chocs sont en raison composée des rayons & des hauteurs.

COROLLAIRE III.

76. Si l'on fait $R = r$, on aura F, f :: $P \times H$, $p \times h$, c'est-à-dire les forces sont entr'elles en raison composée des ailes & des hauteurs, quand les rayons sont égaux.

COROLLAIRE IV.

77. Si l'on fait $H = h$, on aura F, f :: $P \times R$, $p \times r$; c'est-à-dire, les forces sont en raison composée des ailes & des rayons, quand les hauteurs sont égales.

COROLLAIRE V.

78. Si l'on fait $P = p$, & $R = r$, on aura F, f : : H, h, c'est-à-dire les ailes & les rayons étant égaux, les forces sont comme les hauteurs.

De même faisant $P = p$, & $H = h$, on aura F, f : : R, r, c'est-à-dire, les ailes & les hauteurs étant égales, les forces sont comme les rayons.

Enfin, faisant $H = h$, & $R = r$, on aura F, f : : P, p, c'est-à-dire, les hauteurs & les rayons étant égaux, les forces sont comme les ailes.

COROLLAIRE VI.

79. Si l'on fait $F = f$, on aura $P \times R \times H = p \times r \times h$; d'où l'on tire P, p :: $r \times h$, $R \times H$; c'est-à-dire les forces étant égales, les ailes sont en raison composée de la raison réciproque des rayons, & de la réciproque des hauteurs.

On peut tirer aisément d'autres Corollaires de tout ceci auquel je ne m'arrête point.

PROPOSITION XIV.

80. *Si un plan se meut dans un fluide qui est en repos, la résistance qu'il éprouve est comme ce plan multiplié par la densité du fluide, & ensuite par le quarré de la vitesse.*

DEMONSTRATION.

Que le plan se meuve avec une certaine vitesse dans un fluide qui est en repos, ou que le plan étant en repos, le fluide se meuve avec la même vitesse, c'est la même chose, c'est-à-dire le choc ou l'impression est la même ; or si le fluide se mouvoit avec la vitesse dont le plan se meut, & que le plan fut en repos, la force du choc seroit comme le plan multiplié par la densité du fluide, & ensuite par le quarré de la vitesse ; donc si le plan se meut, & que le fluide soit en repos, la résistance que le plan éprouvera sera comme le plan multiplié par la densité, & ensuite par le quarré de la vitesse.

COROLLAIRE I.

81. *Si deux plans inégaux se meuvent avec une même vitesse dans un fluide en repos, les résistances qu'ils éprouvent sont entr'elles comme les plans.*

Car si les plans étoient en repos, & que le fluide les choquât avec la même vitesse, les forces des chocs seroient comme les plans (*N. 66.*)

COROLLAIRE II.

82. *Si deux plans inégaux se meuvent avec des vitesses inégales dans un fluide, les résistances qu'ils éprouvent sont en raison composée des plans & des quarrez des vitesses.*

Ceci se démontre comme dans le Corollaire précédent, & on pourroit tirer grand nombre d'autres Corollaires que j'obmets parce qu'ils sont trop faciles, après ce qui a été dit dans les Propositions précédentes.

PROPOSITION XV.

83. *Si un fluide choque indirectement une droite* AB (Fig. 23.) *selon des droites paralleles* AC, DB, *sa vitesse absolue est à sa vi-*

teſſe reſpective comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'incidence.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que la droite AC exprime la viteſſe abſolue du fluide ſelon ſa direction AC, & menons du point C la droite CF perpendiculaire à AB, ſelon les loix du mouvement composé, la viteſſe AC équivaut aux deux viteſſes CF, AF, mais le fluide agiſſant ſelon la viteſſe AF n'influe rien ſur la ligne AB; donc il n'agit ſur AB qu'avec la viteſſe CF, or en prenant CA pour le rayon total, la droite CF eſt le ſinus de l'angle CAF qui eſt l'angle d'inclinaiſon de la direction AC, donc la viteſſe abſolue AC du fluide eſt à la viteſſe reſpective CF avec laquelle elle influe ſur la ligne AB comme le ſinus total AC au ſinus d'incidence CF.

COROLLAIRE I.

84. *La maſſe du fluide qui choque la ligne* AC *indirectement, eſt à la maſſe qui la choqueroit directement avec la même viteſſe comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus total.*

Je mene BE perpendiculaire à AC, & il eſt viſible qu'il n'y a pas plus de filets d'eau qui vont choquer AB qu'il n'y en a qui choquent la droite BE ſur laquelle ces filets ſont perpendiculaires; ainſi le nombre des filets qui choquent AB eſt exprimé par la droite BE, mais ſi AB étoit choquée directement le nombre des filets qui la choqueroit directement ſeroit exprimé par AB, & comme nous ſuppoſons la viteſſe égale dans le choc indirect & dans le choc direct, le volume du choc oblique eſt exprimé par BE, de même que le volume du choc direct eſt exprimé par AB; donc la maſſe qui choque indirectement AB eſt à la maſſe qui la choqueroit directement comme EB eſt à AB; or en prenant AB pour ſinus total, la droite EB eſt le ſinus de l'angle d'incidence CAB, donc, &c.

COROLLAIRE II.

85. *La force du fluide qui choque indirectement la droite* AB *eſt à la force du même fluide qui le choqueroit comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence eſt au quarré du ſinus total.*

La viteſſe abſolue eſt à la reſpective comme le ſinus total au ſinus de l'angle d'incidence (*N.* 83.), & la maſſe qui choqueroit directement

directement eſt à la maſſe qui choque obliquement auſſi comme le ſinus total à l'angle d'incidence (*N.* 84.), mais la force qui choqueroit directement eſt à la force qui choque obliquement en raiſon compoſée de la viteſſe abſolue à la viteſſe reſpective, & de la maſſe qui choqueroit directement à la maſſe qui choque obliquement ; donc la force qui choqueroit directement eſt à la force qui choque obliquement en raiſon compoſée du ſinus total au ſinus de l'angle d'incidence, & du ſinus total au ſinus de l'angle d'incidence, c'eſt-à-dire la force qui choqueroit directement eſt à la force oblique comme le quarré du ſinus total au quarré du ſinus de l'angle d'incidence.

COROLLAIRE III.

86. Si l'on décrit un demi-cercle AEB ſur la droite AB, & que du point B on mene une droite BE au point E, où la direction AC du fluide coupe la circonférence, & enfin du point E une perpendiculaire EH ſur le diametre, la force du choc direct ſera à la force du choc indirect comme le diametre AB eſt à ſa partie BH ; car à cauſe des triangles ſemblales AEH, BEH, on a :: AB, BE, BH ; donc AB, BH :: $\overline{AB}^2$, $\overline{BE}^2$, mais la force du choc direct eſt à la force du choc oblique comme $\overline{AB}^2$, $\overline{BE}^2$; donc ces deux forces ſont auſſi comme AB, BH.

COROLLAIRE IV.

87. Plus la direction CA eſt inclinée, ſur le diametre AB ; plus auſſi le point E s'éloigne du point A, & plus HB devient petit par rapport à AB ; par exemple, ſi la direction eſt RA, le point R eſt plus éloigné de A que le point E, & la droite FB eſt moindre par rapport à AB que la droite HB ; d'où il ſuit que la force du choc devient moindre à meſure que l'angle d'incidence devient moindre, & que les forces des chocs ſous différentes inclinaiſons CA, RA, ſont entr'elles comme les droites HB, FB.

COROLLAIRE V.

88. Si le fluide choquoit directement la droite AB, le volume de la maſſe qui choqueroit ſeroit la droite AB multipliée par la viteſſe, parce que ce volume, comme nous avons dit,

devient plus ou moins grand, à proportion de la viteſſe (*N.* 65) ainſi nommant V la viteſſe, la maſſe qui choque ſeroit AB × V & la force étant le produit de la maſſe par la viteſſe ſeroit AB × V × V = AB × V^2; or par le Corollaire précédent le choc direct eſt au choc indirect comme AB eſt à HB; faiſant donc AB, HB :: AB × V^2, $\frac{HB \times AB \times V^2}{AB}$ = HB × V^2, ce quatriéme terme exprimera la force du choc ſous la direction AC.

Et par la même raiſon on trouvera que la force du choc ſous la direction AR eſt FB × V^2, & ainſi des autres.

PROPOSITION XVI.

89. *Trouver l'angle ſous lequel l'eau doit choquer le gouvernail d'un Vaiſſeau pour faire tourner le Vaiſſeau le plus vite qu'il eſt poſſible.*

SOLUTION.

Suppoſons que la figure AB (*Fig.* 24.) repréſente le vaiſſeau qui va de A vers B, que la droite AC ſoit la poſition du gouvernail, lequel ſouffre la reſiſtance de l'eau ſelon la direction BA ou HC; nous ſavons que la reſiſtance que ce gouvernail ſouffre eſt égale à la force qu'il ſoutiendroit s'il étoit en repos & que l'eau le choquât ſelon les directions HC, BA avec la même viteſſe dont le Vaiſſeau eſt pouſſé de A vers B.

Du point A je mene AD perpendiculaire ſur la direction HC, & ſuppoſant que la droite DC repréſente la viteſſe de l'eau qui choqueroit le gouvernail s'il étoit en repos, il eſt évident que la maſſe d'eau qui choqueroit directement ce gouvernail ſeroit CA multiplié par la viteſſe DC, c'eſt-à-dire CA × DC (*N.* 65); or la maſſe qui choqueroit directement eſt à celle qui choque obliquement, comme le ſinus total eſt au ſinus d'incidence (*N.* 84), & en prenant pour ſinus total la droite AC, le ſinus de l'angle d'incidence HCA eſt la droite DA; donc faiſant AC, DA :: AC × DC, $\frac{DA \times AC \times DC}{AC}$ = DA × DC, le quatriéme terme DA × DC eſt la maſſe qui choque obliquement le gouvernail.

Or la viteſſe oblique DC eſt à la viteſſe directe comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus total (*N.* 84), ainſi tirant DO perpendiculaire ſur AC, la viteſſe oblique ſera à la viteſſe directe comme DO eſt à DC, car à cauſe des triangles rectangles DOC, CAD, on a DO, DC :: CA, AD; mais CA eſt à AD,

comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus total, donc, &c. & par conſéquent DO exprime la viteſſe oblique dont la maſſe de l'eau choque AC.

Mais la viteſſe DO avec laquelle la maſſe agit ſur AC n'étant pas perpendiculaire ſur la direction BN du Vaiſſeau que la force de la maſſe d'eau doit faire tourner, je mene AM parallele & égale à DO, & du point M la droite MN perpendiculaire à la direction du Vaiſſeau, & il eſt viſible par les regles du mouvement composé, que la viteſſe DO ou AM eſt équivalente à deux viteſſes AN, NM, dont la ſeule derniere NM peut agir pour faire tourner le Vaiſſeau, car la premiere AN étant dans la direction contraire à celle du Vaiſſeau ne peut tout au plus que rallentir ſon mouvement; ainſi la force que l'eau employe pour faire tourner le Vaiſſeau eſt le produit de la maſſe $DA \times DC$ par la viteſſe NM, & par conſéquent cette force eſt $DA \times DC \times NM$; mais le gouvernail AC eſt comme un levier ſur lequel cette force s'applique; concevant donc que l'effort de cette force ſoit réuni au centre de gravité P du gouvernail où elle agira de même que ſi elle étoit repandue ſur toute l'étendue de ce gouvernail, la diſtance PA ſera la viteſſe que cette force acquiert en agiſſant ſur le Vaiſſeau par le moyen du gouvernail, multipliant donc $DA \times DC \times NM$ par PA, nous aurons enfin $DA \times DC \times NM \times PA$ pour l'effort de l'eau ſur le vaiſſeau.

Maintenant pour trouver l'angle d'incidence DCA ſous lequel l'eau ſera capable de faire tourner le Vaiſſeau avec la plus grande viteſſe; du point O je mene OS parallele à DA, & les triangles rectangles AMN, DSO étant ſemblables & égaux, à cauſe des paralleles AM, DO, AN, DS, & de $AM = DO$, j'ai $MN = SO$.

Je nomme $AC = a$, $DC = x$, $AP = c$, $DA = b$; les triangles ſemblables DCA, DCO donnent CA, AD :: CD, CO, donc $a, b :: x, \frac{bx}{a} = CO$; de même les triangles ſemblables CDA, CSO donnent CA, AD :: CO, OS, donc $a, b :: \frac{bx}{a}$, $\frac{b^2x}{a^2} = OS$; or l'effort de l'eau qui agit pour faire tourner le Vaiſſeau eſt $DA \times DC \times NM \times AP$, mettant donc les valeurs analytiques de ces lignes, nous aurons $\frac{cb^3x}{a^2}$ pour la valeur de cet effort, mais à cauſe du triangle rectangle CDA nous avons $\overline{DA}^2 = \overline{CA}^2$

$-\overline{CD}^2$, donc $\overline{DA}^2 = a^2 - x^2 = b^2$, & mettant cette valeur de b^2 dans $\frac{cb^3x}{a^2}$, nous aurons $cbx - \frac{cbx^3}{a^2}$ pour l'effort de l'eau ſur le Vaiſſeau ; or cet effort doit être par la ſuppoſition le plus grand effort de l'eau pour faire tourner le Vaiſſeau, donc ſelon la regle *des plus grandes & moindres quantités*, je prens la différence $cbdx - \frac{3cbx^2dx}{a^2}$ de cet effort, & cette différence eſt égale à zero ; j'ai donc $cbdx - \frac{3cbx^2dx}{a^2} = 0$, d'où je tire $cbdx = \frac{3cbx^2dx}{a^2}$, ou $1 = \frac{3x^2}{a^2}$, & $a^2 = 3x^2$, qui ſe reduit à $\frac{1}{3}a^2 = x^2$, & tirant la racine quarrée, j'ai $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$; mais en prenant AC pour le ſinus total, la droite DC eſt le ſinus de l'angle CAD, donc ce ſinus eſt égal à la racine du tiers du quarré du ſinus total.

Suppoſant donc le ſinus total = 10000000 ſon quarré eſt 100000000000000 dont le tiers eſt 33333333333333, & la racine quarrée eſt 5773502 = CD = x, & cherchant ce ſinus dans les Tables des ſinus, je trouve qu'il appartient à un angle de 35 degrés 16 minutes ; donc l'angle ACD qui eſt le complement à l'angle droit de l'angle CAD eſt de 54 degrés 44 minutes, donc l'angle d'incidence de l'eau ſur le gouvernail doit être de 54 degrés 44 minutes, ſi l'on veut que cette eau faſſe tourner le Vaiſſeau avec la plus grande viteſſe poſſible.

COROLLAIRE.

90. On trouve de la même façon l'angle que l'aîle du moulin doit faire avec l'axe, afin que le vent la faſſe tourner le plus vite qu'il ſe puiſſe.

Suppoſons que la droite AB (*Fig.* 25.) repréſente l'axe du moulin, le plan CF l'aîle, que le vent ſouffle ſelon la direction AB de l'axe, & qu'après avoir mené SD parallele à AB, & CP perpendiculaire à SD, la droite HB repréſente la viteſſe du vent ; l'air ou le vent étant un fluide, la maſſe d'air qui choque le plan CF ou la ligne CD que nous conſidererons comme repréſentant le plan CF, ne ſera pas plus grande que la maſſe qui choque la droite CP, ainſi cette maſſe ſera CP × HB, je mene HI perpendiculaire à CD, & cette droite HI exprime la viteſſe dont l'air choque CD, & comme en menant IR perpendiculaire à l'axe AB, la viteſſe HI eſt équivalente aux deux HR, IR, & que cette derniere eſt la ſeule qui puiſſe faire tourner l'aîle autour de l'axe,

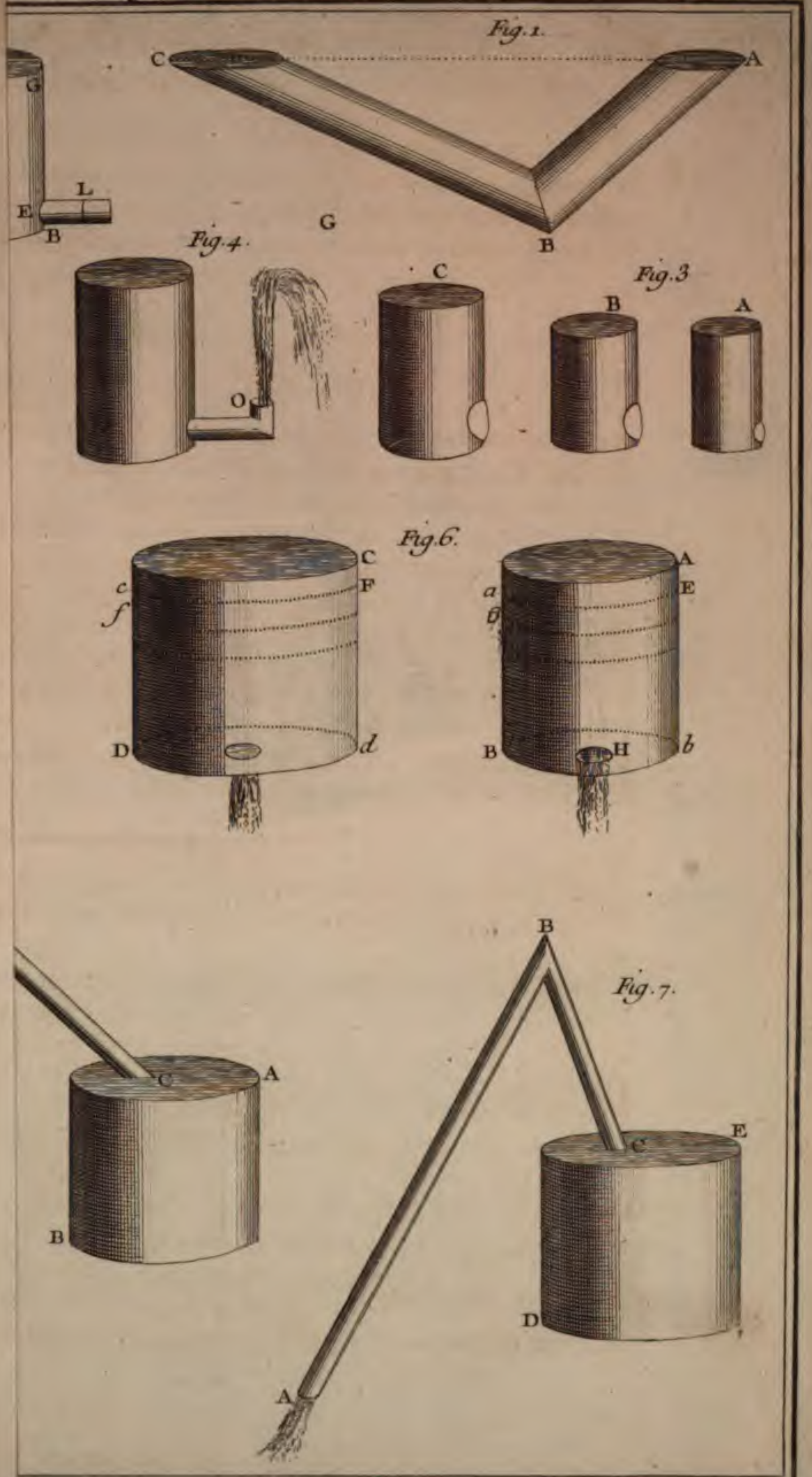

Fig.1.
C
A
B
G
L
E
B
Fig.4.
G
C
Fig.3
B
A
O
Fig.6.
C
c
F
f
D
d
A
a
E
B
H
b
B
Fig.7.
C
A
E
B
C
D
A



Fig. 9.

Fig. 13.

Fig. 12.

Fig. 16.

Fig. 18.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 23.

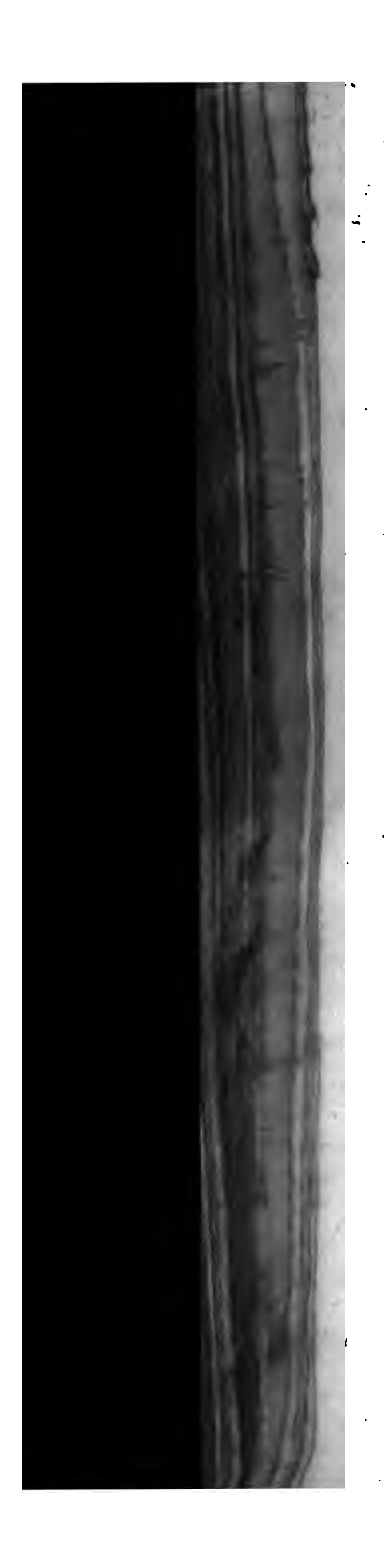
Fig. 25.

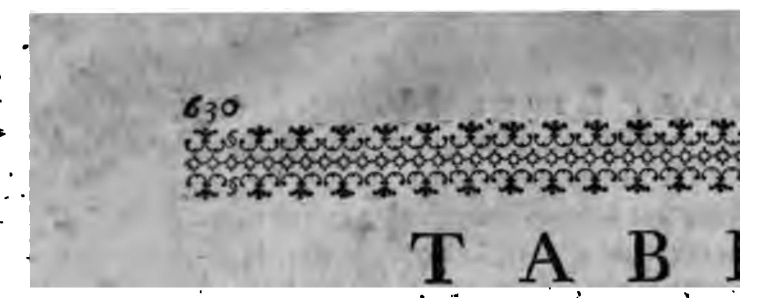
il s'enſuit que la force de la maſſe CP×HB qui agit pour faire tourner l'aîle eſt CP×HB×IR ; mais cette force agiſſant ſur cet aîle agit comme ſur un levier par le moyen duquel elle fait tourner l'axe ; prenant donc le centre de gravité G de ce levier, la diſtance BG eſt la viteſſe de cette force, & par conſéquent la force totale eſt CP×HB×IR×BG.

Je nomme PD $= x$, CD $= a$, CP $= b$, & BG $= c$, donc CB $= \frac{1}{2} a$, & HB $= \frac{1}{2} x$; les triangles ſemblables CDP, HBI donnent CD, CP :: HB, HI, donc $a, b :: \frac{1}{2} x, \frac{bx}{2a} =$ IH ; de même les triangles ſemblables CDP, HIR donnent CD, DP :: HI, IR, donc $a, x :: \frac{bx}{2a}, \frac{bx^2}{2a^2} =$ IR, & mettant les valeurs de CP, HB, IR, BG dans la force totale CP×HB×IR×BG, nous aurons $\frac{cbbx^3}{4a}$ pour l'expreſſion de cette force ; or $bb = aa - xx$, donc $\frac{cbbx^3}{4a^2} = \frac{cx^3}{4} - \frac{cx^5}{4a^2}$; mais $x^2 = aa - bb$, donc, mettant cette valeur de x^2, nous aurons $\frac{caax - bbcx}{4} - \frac{caax^3 + cbbx^3}{4a^2}$ pour l'expreſſion de la force, & prenant la différence nous aurons $\frac{aacdx - bbcdx}{4} - \frac{3aacx^2dx + 3cbbx^2dx}{4a^2} = 0$, donc $aacdx - bbcdx = \frac{3aacx^2dx - 3cbbx^2dx}{a^2}$, d'où l'on tire $a^2 = 3x^2$; & par conſéquent $\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$, de même que ci-deſſus.

Fin du quatriéme & dernier Livre.

De l'Imprimerie de J. CHARDON, 1741.





T A B

DES CHAPI

Contenus dans ce V

LIVRE PRE

De la Méchanique des Solides,

LIVRE SECOND.

De l'Hydrostatique.

LIVRE TROISIE'ME.

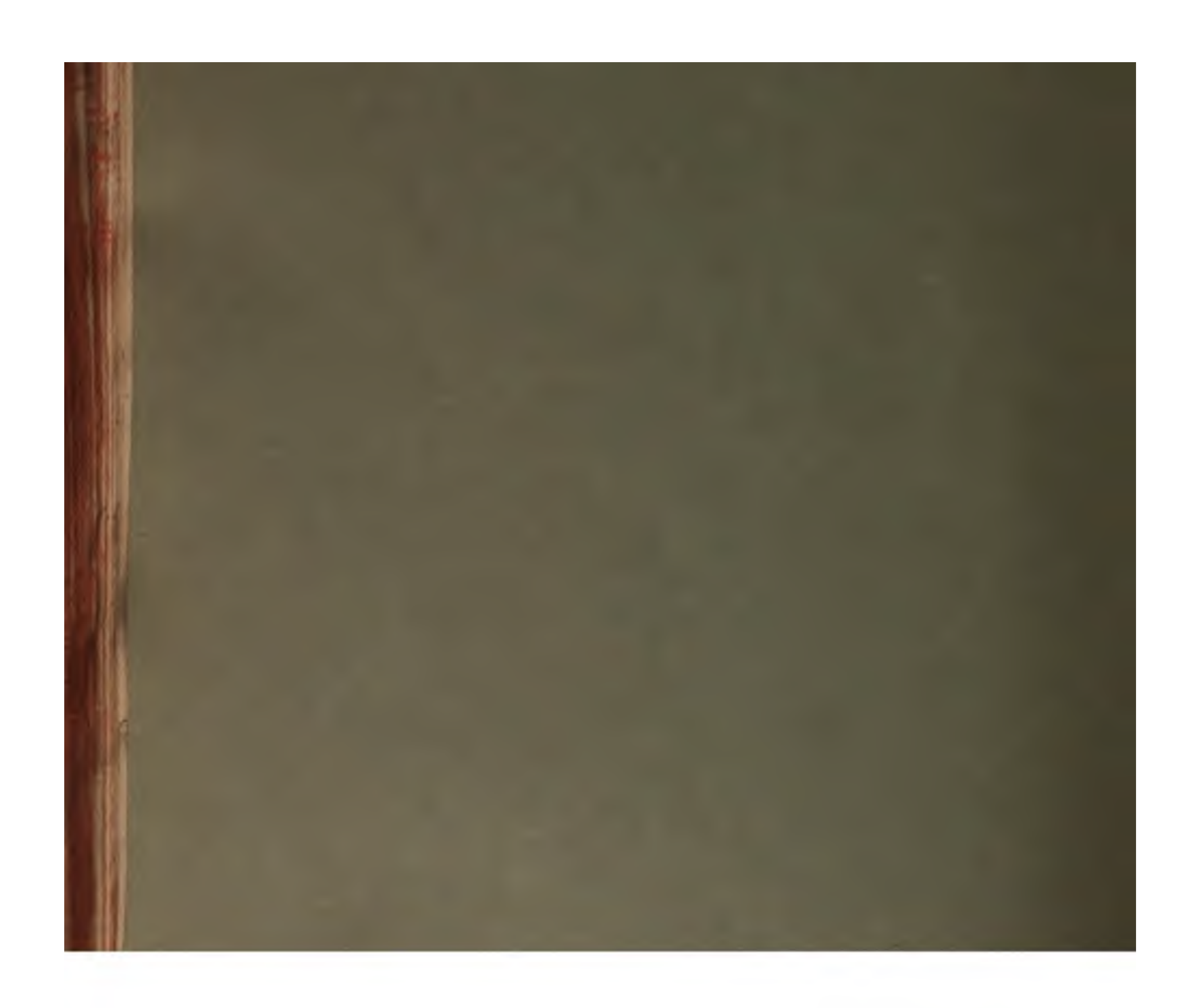
De l'Airométrie.

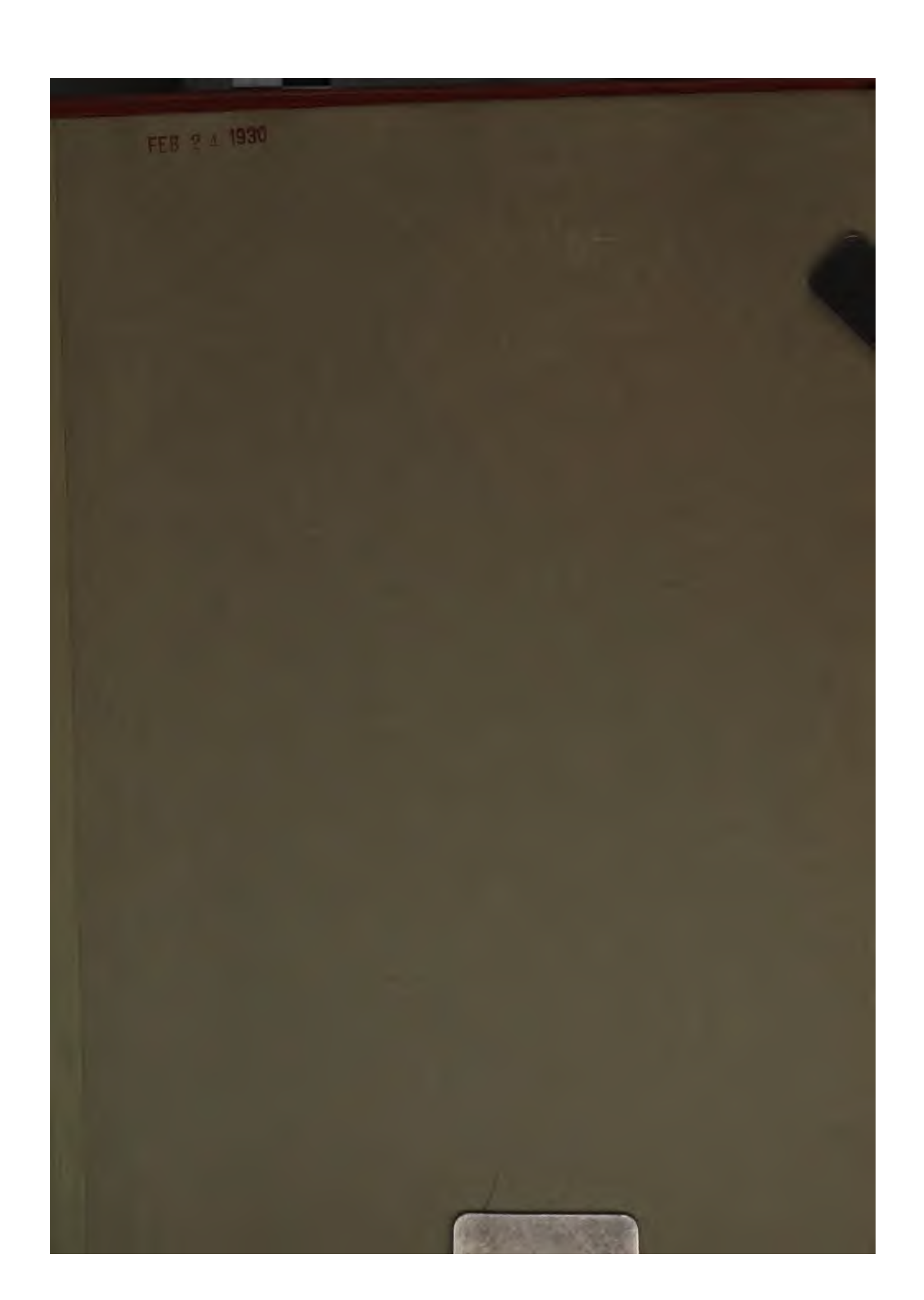
LIVRE QUATRIE'ME.

De l'Hydraulique.

Fin de la Table des Chapitres.






FEB 24 1930

